
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00844558 7

COURS D'ANALYSE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

LEÇONS
SUR LES
THÉORIES GÉNÉRALES
DE
L'ANALYSE

PAR

RENÉ BAIRE,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

TOME I.

PRINCIPES FONDAMENTAUX. — VARIABLES RÉELLES.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
39584 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS D'ANALYSE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

LEÇONS SUR LES THÉORIES GÉNÉRALES DE L'ANALYSE

PAR

RENÉ BAIRE,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

TOME I.

PRINCIPES FONDAMENTAUX. — VARIABLES RÉELLES.



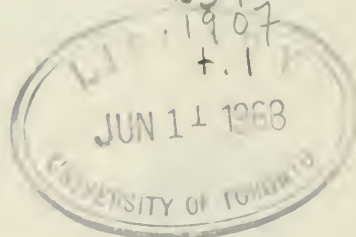
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1907

EN PRÉPARATION.

TOME II

Fonctions analytiques. — Équations différentielles.
Applications géométriques. — Fonctions elliptiques.



PRÉFACE.

L'Analyse mathématique, en raison de son extraordinaire développement, tend de plus en plus à se scinder en branches distinctes, et l'on peut dire qu'aujourd'hui la spécialisation, dans cette science, est devenue une nécessité. Mais, à cause de ce fait même, il peut sembler désirable de rassembler, en un livre de dimensions restreintes, les théories qui constituent le fonds commun à toutes ces branches spéciales. C'est ce que j'ai essayé de faire dans l'Ouvrage dont je publie aujourd'hui la première Partie, et qui est la reproduction de mon Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Dijon. Comme l'indique le titre, je me borne aux théories générales, mais je cherche à mettre le lecteur en mesure d'aborder sans difficulté une théorie particulière quelconque. J'estime d'ailleurs que ce but sera d'autant mieux atteint qu'une plus grande précision aura été introduite dans les sujets traités. Rigueur et simplicité ne sont nullement inconciliables, si l'on prend nettement le parti de faire pénétrer, dans l'enseignement des principes fondamentaux, certaines idées qui ont été acquises à la Science dans l'étude de questions d'ordre plus élevé. Pour en prendre un exemple frappant, la notion de bornes supérieure et inférieure d'un ensemble, qui commence seulement à être vulgarisée, permet de démontrer en peu de mots une foule de propositions qui nécessitaient autrefois des raisonnements longs et souvent diffus.

En résumé, je caractérise ainsi le point de vue auquel je me suis placé : limitation dans le choix des sujets, recherche de la

rigueur dans l'établissement des principes. J'ai tenu d'autre part à toujours spécifier nettement les résultats que je suppose connus du lecteur; cela est indispensable si l'on veut mettre en ordre les idées acquises et si l'on tient à pouvoir se rendre compte à chaque instant du chemin parcouru.

J'étudie tout d'abord, dans le premier Chapitre, les notions fondamentales de limite, de fonction, de continuité ; la méthode que j'emploie dans ce but est, avec quelques modifications de détail, celle que j'ai exposée pour la première fois en 1905 dans un Opuscule intitulé : *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité* (1).

On dit souvent que l'Analyse peut être construite en partant de la seule notion de nombre entier. Cela est exact; mais, si l'on veut se maintenir systématiquement à ce point de vue, si en particulier on veut ignorer la Géométrie, on se privera volontairement d'un secours précieux et l'on se condamnera, dans bien des cas, à de longs détours. Je crois donc préférable de chercher à légitimer les emprunts mutuels que se font, en fait, l'Analyse et la Géométrie. C'est ce qui m'a conduit, une fois le calcul des nombres irrationnels justifié par une voie purement analytique, à traiter la question de la mesure des grandeurs concrètes, et à montrer brièvement comment les hypothèses faites sur ces grandeurs interviennent dans l'application du calcul aux faits géométriques.

Dans le deuxième Chapitre sont traitées les notions de dérivée, de différentielle, d'intégrale. Il m'a toujours semblé que la notion de différentielle présente des difficultés beaucoup plus sérieuses que la plupart des cours ne voudraient le laisser croire; convenir de considérer la différentielle de la variable indépendante comme constante ne simplifie pas la question, bien au contraire; la difficulté est encore bien plus grande quand on introduit les différentielles secondes, qui ne sont pas, quoi qu'on en dise, des éléments de calcul complètement analogues aux différentielles premières. Les définitions que j'adopte, en particulier la définition des différentielles d'ordre supérieur (que je

(1) Paris, Vuibert et Nony; 1905.

crois nouvelle dans sa forme), me paraissent éviter toute obscurité. Dans un ordre d'idées voisin, la question des prétendus avantages de la notation différentielle ne me paraît pas toujours bien posée : l'emploi des différentielles est une chose, le fait de noter une dérivée de telle ou telle manière en est une autre; le point sur lequel il y a lieu d'insister, à mon avis, c'est la possibilité d'écrire, à l'aide des différentielles, des relations valables quel que soit le choix ultérieur des variables indépendantes; mais il importe peu qu'on représente les dérivées qui entrent dans ces relations par un signe ou par un autre. En réalité, il faut le dire hautement, il n'y a pas en Mathématiques de notation qui s'impose une fois pour toutes, les notations d'un même objet peuvent et doivent varier suivant la nature de la question qu'on traite.

En ce qui concerne les notions d'aire plane et de volume, étudiées au Chapitre III, je crois indispensable d'en donner une définition précise, qui ne fasse intervenir aucun élément de calcul étranger aux données géométriques; cela fait, en poursuivant les conséquences logiques de la définition, on est en mesure d'étudier l'évaluation par le calcul de ces éléments. La question se pose de même pour l'aire d'une surface courbe, mais ici les difficultés sont plus grandes; en m'inspirant des plus récents travaux faits sur cette question, je crois être parvenu à donner à l'intégrale classique un sens géométrique net et conforme aux idées intuitives.

Pour les intégrales multiples, étudiées dans le même Chapitre, je me suis appliqué à traiter l'évaluation de ces intégrales par des procédés rigoureux; la question du changement de variables, très délicate en elle-même, ne doit pas, à mon avis, être traitée par des artifices, mais par une étude approfondie de la correspondance établie entre les deux systèmes de variables; j'ai tenu à préparer cette étude en examinant tout d'abord le cas particulier où le changement de variables est linéaire.

Je me propose de traiter, dans la deuxième et dernière Partie de ce Cours, la théorie des fonctions analytiques, les équations différentielles, les applications géométriques et les principes essentiels de la théorie des fonctions elliptiques.

Cet Ouvrage est écrit d'après une première rédaction effectuée par un de mes auditeurs de la Faculté de Dijon, M. Cousson, auquel je suis heureux d'adresser mes affectueux remercîments pour sa collaboration active et dévouée. Je dois également exprimer à M. Gauthier-Villars ma vive gratitude pour l'empressement avec lequel il a accueilli ce Livre et pour le soin qu'il a apporté à son impression.

Dijon, 2 juin 1907.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME I.

CHAPITRE I.

NOMBRES IRRATIONNELS, LIMITES, CONTINUITÉ.

CHAPITRE II.

DÉRIVÉES ET INTÉGRALES DES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS ET EXTENSIONS DE LA NOTION D'INTÉGRALE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME I.

LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE.

CHAPITRE I.

NOMBRES IRRATIONNELS, LIMITES, CONTINUITÉ.

I. — Définition des nombres irrationnels.

1. A la base de l'Analyse mathématique se trouvent les notions de fonction, de limite et de continuité; elles sont intimement liées à la définition des nombres irrationnels, et il y a lieu tout d'abord d'établir et d'étudier ces notions fondamentales.

En Arithmétique, on étudie les nombres entiers, puis les nombres fractionnaires, auxquels on est amené par l'étude de la mesure des grandeurs; ensuite, en Algèbre, on introduit les nombres négatifs. Il convient de remarquer que toutes les règles de calcul démontrées en Algèbre élémentaire sont relatives à ces seuls nombres.

Or, on constate qu'ils ne suffisent pas à atteindre certains buts. Par exemple, on sait qu'il existe des nombres non carrés parfaits. Soit α un tel nombre. Le carré de tout nombre x est ou plus petit ou plus grand que α. Si l'on tient à attribuer un sens à la racine carrée de α, il est nécessaire de créer des nombres nouveaux.

De même, on sait, par la Géométrie, que l'on peut trouver deux grandeurs entre lesquelles il n'y ait pas de commune mesure : par exemple, le côté et la diagonale d'un carré. Pour donner un sens à la

notion de rapport de ces deux grandeurs, on sera conduit, là encore, à créer des nombres nouveaux.

§ 2. Les nombres entiers ou fractionnaires, positifs, nul et négatifs, sont dits nombres *rationnels*. Rappelons les propriétés suivantes de l'ensemble de ces nombres.

De deux nombres rationnels distincts a et b, l'un est plus petit que l'autre. Si a est plus petit que b, on écrit $a < b$, ou $b > a$.

Si trois nombres a, b, c sont tels que $a < b$, $b < c$, il en résulte $a < c$.

On exprime ces propriétés en disant que l'ensemble des nombres rationnels est *ordonné*.

Si a est un nombre rationnel, il y a une infinité de nombres rationnels plus petits que a, aucun d'eux n'est plus grand que tous les autres; il y a une infinité de nombres rationnels plus grands que a, aucun d'eux n'est plus petit que tous les autres.

§ 3. *Notion de coupure.* — On dit que l'*on effectue une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels si l'on partage cet ensemble en deux classes* A *et* B *telles que tout nombre de* A *est plus petit que tout nombre de* B.

Trois cas sont alors possibles :

1° La première classe A renferme un nombre a plus grand que tous les autres. Alors tout nombre de la première classe est inférieur ou égal à a; tout nombre de la deuxième classe B est plus grand que a, qui est de la première. Réciproquement, tout nombre rationnel inférieur ou égal à a doit faire partie de A, sans quoi il appartiendrait à B, et serait plus grand que a. En résumé, la classe A est constituée par l'ensemble des nombres rationnels inférieurs ou égaux à a. La classe B comprend les autres nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres supérieurs à a. Remarquons que, dans B, il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres.

2° L'hypothèse précédente n'est pas réalisée, c'est-à-dire que A ne renferme pas de nombre supérieur à tous les autres, mais on suppose que B renferme un nombre a inférieur à tous les autres. Par un raisonnement analogue au précédent, on constate que la classe B se compose des nombres rationnels supérieurs ou égaux à a, et la classe A des nombres inférieurs à a.

Il est évident que ces deux premiers cas sont réalisables.

3° Aucune des hypothèses précédentes n'est réalisée : c'est donc

que dans A il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres, dans B il n'y a pas de nombre plus petit que tous les autres. Montrons d'abord la possibilité de ce cas.

Soit α un nombre rationnel positif non carré parfait. Rangeons dans une classe A les nombres rationnels négatifs, nul, et les nombres positifs x, tels que l'on a $x^2 < \alpha$, puis, dans une classe B, les nombres rationnels x tels que l'on a $x^2 > \alpha$.

Ce partage constitue une coupure, car tout nombre de A est inférieur à tout nombre de B. Démontrons que A ne renferme pas de nombre plus grand que tous les autres, c'est-à-dire qu'étant donné un nombre x de A, on peut trouver dans A un nombre supérieur à x. D'abord le fait est évident si x est négatif ou nul. Prenons maintenant un nombre positif x tel que $x^2 < \alpha$. Il nous suffit de montrer que l'on peut trouver un nombre *positif* h tel que l'on ait

$$(x+h)^2 < \alpha,$$

car $x+h$ appartiendra à A et sera supérieur à x.

Nous avons à résoudre l'inégalité

$$x^2 + 2hx + h^2 < \alpha$$

ou

$$h(2x+h) < \alpha - x^2.$$

Il suffit de prendre h inférieur à 1 et tel que $h(2x+1)$ soit inférieur à $\alpha - x^2$, c'est-à-dire de prendre h inférieur à la fois à 1 et au nombre positif $\frac{\alpha - x^2}{2x+1}$.

De même, B n'a pas de nombre plus petit que tous les autres, c'est-à-dire que, si x appartient à B, on peut trouver un nombre positif h tel que $(x-h)$ appartienne encore à B. Il suffit pour cela de satisfaire à l'inégalité

$$(x-h)^2 > \alpha$$

ou

$$2hx - h^2 < x^2 - \alpha.$$

Celle-ci est vérifiée si nous avons

$$2hx < x^2 - \alpha,$$

ce qui a lieu si h est inférieur à $\frac{x^2 - \alpha}{2x}$. Ainsi les conditions du cas 3° sont réalisées.

Quand une coupure remplit les conditions du cas 3°, on con-

vient de dire qu'elle définit un nombre irrationnel λ, qui est par définition supérieur à tous les nombres de A et inférieur à tous les nombres de B. La même coupure définira toujours le même nombre irrationnel.

L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels constitue l'ensemble des *nombres réels*, ou simplement des *nombres*.

Il résulte de cette définition qu'une coupure étant effectuée dans l'ensemble des nombres rationnels, il y a toujours un nombre déterminé λ, rationnel ou irrationnel, tel que tout nombre de la première classe A est inférieur ou égal à λ, et que tout nombre de la seconde classe B est supérieur ou égal à λ. Nous dirons que A est la *classe inférieure relative à* λ, B *la classe supérieure*.

14. *Comparaison de deux nombres irrationnels.* — Soient λ et λ′ deux nombres irrationnels différents, A et B, A′ et B′ les classes inférieures et supérieures relatives respectivement à λ et à λ′.

Dire que λ et λ′ sont différents, c'est dire que les coupures (A, B) et (A′, B′) ne sont pas identiques. Par suite les classes A et A′ ne sont pas identiques. Supposons par exemple que A′ contienne un nombre a qui n'appartienne pas à A. Alors a appartient à B et n'appartient pas à B′. Tout nombre x de A est inférieur à a, qui appartient à B, et a, appartenant à A′, est inférieur à tout nombre de B′. Donc tout nombre x de A est inférieur à tout nombre de B′. Par suite A et B′ n'ont aucun élément commun; tout nombre de A est contenu dans A′, tout nombre de B′ est contenu dans B.

Les nombres rationnels se partagent alors en trois catégories :

1° Ceux qui sont contenus dans A, par suite aussi dans A′. Ils sont inférieurs à la fois à λ et à λ′.

2° Les nombres tels que a, qui font partie de B et de A′. Ils sont plus grands que λ et plus petits que λ′.

3° Les nombres qui font partie de B′ et par suite de B. Ils sont supérieurs à la fois à λ et à λ′.

Par définition, nous dirons que l'on a dans ce cas $\lambda < \lambda'$.

L'hypothèse inverse serait que A contient un nombre a n'appartenant pas à A′. On poserait dans ce cas $\lambda' < \lambda$.

15. *Si l'on a deux nombres réels quelconques* λ *et* λ′, *pour que l'on ait* $\lambda < \lambda'$, *il faut et il suffit qu'il existe un nombre rationnel* x *plus grand que* λ *et plus petit que* λ′.

En effet, quatre cas sont possibles :

1° λ et λ' sont rationnels. La propriété résulte de l'Algèbre élémentaire.

2° λ est rationnel, λ' est irrationnel.

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Supposons $\lambda < \lambda'$. Le nombre rationnel λ appartient à la classe inférieure relative à λ'. Il y a des nombres de cette classe plus grands que λ : ils sont plus petits que λ'.

La condition est suffisante. Supposons que l'on ait un nombre rationnel x tel que $\lambda < x$, $x < \lambda'$: x appartient à la classe inférieure relative à λ'. Donc λ, rationnel et inférieur à x, en fait aussi partie.

3° λ est irrationnel, λ' est rationnel. La démonstration est analogue à la précédente.

4° λ et λ' sont irrationnels. Le fait résulte alors de la notion de comparaison de deux nombres irrationnels (n° 4).

6. *L'ensemble des nombres réels est ordonné*, c'est-à-dire qu'*étant donnés trois nombres réels λ, μ, ν, les conditions $\lambda < \mu$, $\mu < \nu$ entraînent $\lambda < \nu$*. Remarquons que, dans le cas où μ est rationnel, le fait est inclus dans celui qui vient d'être énoncé (n° 5). Il reste à le démontrer quand μ est irrationnel.

Dans tous les cas, on peut, d'après le n° 5, trouver deux nombres rationnels a et b tels que

$$\lambda < a, \qquad a < \mu, \qquad \mu < b, \qquad b < \nu.$$

De $a < \mu$, $\mu < b$ résulte $a < b$, puisque a fait partie de la classe inférieure relative à μ, b de la classe supérieure.

De $a < b$, $b < \nu$ résulte $a < \nu$ (n° 5).

Enfin, de $\lambda < a$, $a < \nu$ résulte $\lambda < \nu$ (n° 5).

7. *Nombres irrationnels positifs et négatifs.* — Les nombres irrationnels plus grands que zéro sont dits *positifs*; les nombres irrationnels plus petits que zéro sont dits *négatifs*.

Soient λ un nombre irrationnel positif, A et B les classes inférieure et supérieure relatives à ce nombre. Zéro fait partie de A. Rangeons dans une classe A' les nombres opposés [1] aux nombres de B, et dans une classe B' les nombres opposés aux nombres de A. Ce partage con-

---

[1] On emploie aussi l'expression *égaux et de signe contraire* ou *symétriques*.

stitue une coupure, car tout nombre rationnel fait partie de A' ou de B' et tout nombre de A' est plus petit que tout nombre de B'.

Zéro fait partie de la classe B'. Donc la coupure (A', B') définit un nombre irrationnel négatif λ'. Nous dirons que λ' est le nombre *opposé* à λ et nous écrirons

$$\lambda' = -\lambda, \qquad \lambda = -\lambda'.$$

λ et λ' ont tous deux pour valeur absolue λ, et l'on écrit

$$|\lambda| = |\lambda'| = \lambda.$$

Il est évident que $\lambda = \mu$ entraîne $-\lambda = -\mu$ et que $\lambda < \mu$ entraîne $-\lambda > -\mu$, λ et μ étant des nombres réels quelconques.

8. *Valeurs approchées d'un nombre.* — Soient un nombre réel quelconque λ et un nombre rationnel positif α. Proposons-nous de comparer λ aux nombres de la suite indéfinie dans les deux sens

$$(1) \qquad \ldots\ldots \quad -\alpha, \quad 0, \quad \alpha, \quad 2\alpha \quad \ldots\ldots$$

Prenons deux nombres rationnels a, b tels que $a < \lambda < b$, puis deux entiers p et q tels que

$$p\alpha < a, \qquad q\alpha > b,$$

ce que nous savons faire puisqu'il s'agit de nombres rationnels. Il en résulte que l'on a

$$p\alpha < \lambda < q\alpha.$$

Bornons-nous à considérer les termes de la suite (1) compris entre $p\alpha$ et $q\alpha$. Le premier des termes de cette suite finie est plus petit que λ, le dernier est plus grand que λ. Parmi ceux qui sont inférieurs ou égaux à λ, prenons le plus grand. Soit $h\alpha$ ce terme. On aura

$$h\alpha \leq \lambda < (h+1)\alpha.$$

Le nombre $h\alpha$, qui est bien déterminé, est appelé *valeur approchée à α près par défaut de λ*. Le nombre $(h+1)\alpha$ est appelé *valeur approchée à α près par excès de λ*.

Soit un nombre rationnel α', tel que $\alpha' = \frac{\alpha}{k}$, k étant un entier positif. Si l'on considère la suite analogue à (1) obtenue en remplaçant α par α', on constate que cette nouvelle suite (2) contient tous les termes de la première, en particulier $h\alpha$ et $(h+1)\alpha$, de sorte que la valeur approchée de λ à α' près par défaut, $h'\alpha'$, est au moins égale à $h\alpha$; de même, $(h'+1)\alpha'$ est au plus égal à $(h+1)\alpha$.

Pour fixer les idées, considérons les valeurs approchées d'un nombre λ à $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$ près. Soient u_n la valeur approchée de λ à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut, v_n la valeur approchée de λ à $\frac{1}{10^n}$ près par excès. En donnant à n les valeurs entières positives 1, 2, 3, ..., on a

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_n \leqq \ldots,$$

$$v_1 \geqq v_2 \geqq \ldots \geqq v_n \geqq \ldots,$$

$$u_n \leqq \lambda < v_n,$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{10^n}.$$

9. *Soit λ un nombre quelconque, ε un nombre positif. On peut trouver deux nombres rationnels a et b tels que*

$$a < \lambda < b$$

et

$$b - a < \varepsilon.$$

Prenons un nombre rationnel positif η inférieur à ε. Si λ est rationnel, il suffit de prendre $a = \lambda - \frac{\eta}{2}$, $b = \lambda + \frac{\eta}{2}$.

Si λ est irrationnel, on prend pour a et b les valeurs approchées de λ à η près par défaut et par excès. Ce sont des nombres $h\eta$ et $(h+1)\eta$, comprenant λ entre eux et différant de moins de ε.

II. — Bornes supérieure et inférieure d'un ensemble.

10. Quand on considère des nombres, à l'exclusion des autres nombres, on dit que l'on considère un *ensemble*; par exemple, on peut parler de l'ensemble des nombres positifs, de l'ensemble des nombres rationnels, de l'ensemble des nombres plus petits que 1, de l'ensemble des nombres fractionnaires qui, réduits à leur plus simple expression, ont pour dénominateur une puissance de 3, etc.

Si l'on a un ensemble comprenant un nombre *fini* de nombres, l'un d'eux est supérieur ou égal à tous les autres. Mais ceci n'a plus lieu nécessairement si l'on considère un ensemble comprenant une infinité de nombres. Par exemple, dans l'ensemble des nombres négatifs, aucun n'est plus grand que tous les autres. Cette remarque justifie l'intérêt des notions que nous allons introduire.

Soit E un ensemble quelconque de nombres; a étant un nombre rationnel, deux cas sont possibles, qui s'excluent l'un l'autre :

1° a est inférieur ou égal à un certain nombre de E.

2° a est supérieur à tout nombre de E.

Il y a toujours des nombres rationnels satisfaisant à la condition 1°; s'il n'y en a pas qui satisfassent à la condition 2°, c'est que tout nombre rationnel est inférieur ou égal à un nombre de E; autrement dit, quel que soit le nombre rationnel a, il y a dans E un nombre au moins qui le surpasse. Dans ce cas on dit que E est *illimité supérieurement*; par exemple, l'ensemble des nombres entiers positifs est illimité supérieurement.

Dans le cas contraire, E est dit *borné supérieurement*. Les nombres rationnels se partagent en deux classes : la classe A, composée des nombres vérifiant 1°; la classe B, composée des nombres vérifiant 2°. Ce partage constitue une coupure, car tout nombre de A est inférieur ou égal à un certain nombre de E, lequel est inférieur à tout nombre de B. Il y a donc (n° 3, p. 4) un nombre M bien déterminé, tel que tout nombre de A est inférieur ou égal à M, tout nombre de B est supérieur ou égal à M. Ce nombre M est dit la *borne supérieure de l'ensemble* E. Il a les deux propriétés suivantes :

1° Tout nombre de E est inférieur ou égal à M. En effet, s'il y avait dans E un nombre $\alpha > M$, on pourrait trouver un nombre rationnel a tel que $\alpha > a > M$. Le nombre a ferait partie de la classe B tout en étant inférieur à un nombre α de l'ensemble E, ce qui est impossible.

2° Si λ est inférieur à M, il y a dans E un nombre supérieur à λ. En effet, prenons un nombre rationnel a tel que $\lambda < a < M$. a fait partie de la classe A; donc il existe dans E un nombre supérieur ou égal à a et par suite supérieur à λ.

On voit d'après cela que, parmi les nombres dont chacun est supérieur ou égal à tout nombre de E, il y en a un plus petit que tous les autres, c'est le nombre M.

Ainsi, *la borne supérieure de* E *est le plus petit parmi les nombres au moins égaux à tout nombre de* E.

Cette propriété ne peut évidemment appartenir qu'à un seul nombre.

Il résulte de ce fait les remarques suivantes :

Si l'ensemble E contient un nombre plus grand que tous les autres, ce nombre est la borne supérieure de E.

Si un ensemble E_1 est contenu dans un ensemble E, la borne supérieure de E_1, soit $M(E_1)$, est inférieure ou égale à la borne supérieure de E, $M(E)$.

Si tous les nombres d'un ensemble E sont inférieurs ou égaux à un nombre A, M(E) est inférieur ou égal à A.

Un nombre λ est la borne supérieure de l'ensemble des nombres inférieurs à λ.

11. On définit de même la notion de *borne inférieure*.

Étant donné un ensemble quelconque E, si, quel que soit le nombre a, il y a dans E un nombre inférieur à a, l'ensemble E est dit *illimité inférieurement*. Sinon, l'ensemble est dit *borné inférieurement*; on démontre alors l'existence d'un nombre déterminé m qui est dit la *borne inférieure de l'ensemble* et qui possède la double propriété caractéristique suivante :

1° Tout nombre de E est supérieur ou égal à m.

2° Si λ est un nombre plus grand que m, il y a dans E un nombre inférieur à λ.

m est le plus grand parmi les nombres qui sont inférieurs ou égaux à tous ceux de E.

S'il y a dans E un nombre plus petit que tous les autres, c'est la borne inférieure.

Si un ensemble E_1 est composé de nombres contenus dans E, la borne inférieure de E_1, soit $m(E_1)$, est supérieure ou égale à la borne inférieure de E, $m(E)$.

Si tous les nombres de E sont supérieurs ou égaux à un nombre A, $m(E)$ est supérieur ou égal à A.

Un nombre λ est la borne inférieure des nombres supérieurs à λ.

Quand un ensemble est borné à la fois supérieurement et inférieurement, nous dirons simplement qu'il est *borné*.

La borne inférieure d'un ensemble est inférieure ou égale à la borne supérieure de cet ensemble.

12. Si un ensemble est illimité supérieurement, nous conviendrons de dire qu'il a pour borne supérieure $+\infty$; si un ensemble est illimité inférieurement, nous conviendrons de dire qu'il a pour borne inférieure $-\infty$.

Les choses se passent comme si, à l'ensemble R des nombres, on adjoignait deux éléments nouveaux, l'un, $+\infty$, par définition supérieur a tous les éléments de R, l'autre, $-\infty$, par définition inférieur à tous les éléments de R. Soit R' ce nouvel ensemble; on peut avec cette convention énoncer le résultat suivant : *Un ensemble de nombres appartenant à* R' *a toujours une borne supérieure et une*

borne inférieure, qui sont des éléments de R'. Nous dirons que les éléments de R sont les nombres *finis*; $+\infty$ et $-\infty$ sont *infinis* et sont considérés comme opposés l'un à l'autre.

13. *Si l'on a deux ensembles de nombres* A *et* B *tels que tout nombre de* A *est inférieur ou égal à tout nombre de* B, *la borne supérieure* M(A) *de* A *est inférieure ou égale à la borne inférieure* m(B) *de* B.

En effet, prenons un nombre quelconque b de B. Par hypothèse, tous les nombres de A sont inférieurs ou égaux à b. Donc, on a

$$M(A) \leqq b \quad \text{ou} \quad b \geqq M(A).$$

La conclusion s'applique à tous les nombres b de B. Donc la borne inférieure m(B) de B est aussi supérieure ou égale à M(A).

III. — Différence de deux nombres.

14. Soient x et y deux nombres différents; soit $x < y$.

Considérons tous les couples de nombres rationnels a, b tels que

$$x \leqq a < b \leqq y.$$

Formons les différences $b - a$. Ce sont des nombres positifs. Leur ensemble A est borné, car il y a des nombres rationnels α et β tels que $\alpha < x$, $y < \beta$; la différence $\beta - \alpha$ est supérieure à toutes les différences $b - a$. L'ensemble A des nombres $b - a$ a donc une borne supérieure λ, qui est un nombre positif.

Dans le cas où x et y sont tous deux rationnels, parmi les couples (a, b) figure le couple $a = x$, $b = y$, et la différence correspondante $y - x$ est plus grande que toutes les autres différences $b - a$, de sorte que $y - x$ est alors la borne supérieure λ de l'ensemble A. On a donc dans ce cas

$$(1) \qquad y - x = \lambda, \qquad x - y = -\lambda.$$

Quand x et y ne sont pas tous deux rationnels, nous conviendrons de définir leur différence par les équations (1).

Si $x = y$, nous poserons

$$x - y = y - x = 0.$$

Ainsi, étant donnés deux nombres quelconques, la différence de ces deux nombres est parfaitement définie.

15. Si l'on a deux couples x', y' et x, y tels que

$$x' \leq x \leq y \leq y',$$

toutes les différences $b - a$ faisant partie de l'ensemble A relatif à x, y font aussi partie de l'ensemble A' analogue relatif à x', y' ; donc la borne supérieure de A est inférieure ou égale à la borne supérieure de A', d'où

$$y - x \leq y' - x'.$$

Si l'on sait que deux nombres x, y sont compris entre deux nombres x', y', on a

$$|y - x| \leq |y' - x'|.$$

16. On appelle *oscillation* d'un ensemble E ayant pour bornes supérieure et inférieure M et m, le nombre positif ou nul $\omega = M - m$.

17. *Si l'on a deux ensembles de nombres* A *et* B *tels que tout nombre de* A *est inférieur ou égal à tout nombre de* B *et si, quel que soit* ε *positif, il existe un nombre* a *de* A, *un nombre* b *de* B *tels que* $b - a < \varepsilon$, *la borne supérieure* $M(A)$ *de* A *est égale à la borne inférieure* $m(B)$ *de* B.

D'après la première hypothèse, on a (n° 13, p. 10)

$$M(A) \leq m(B).$$

Montrons que l'on ne peut avoir $M(A) < m(B)$.

En effet, si cela était, soient a un nombre quelconque de A, b un nombre quelconque de B, on aurait

$$a \leq M(A) < m(B) \leq b,$$

d'où

$$b - a \geq m(B) - M(A).$$

Prenons ε positif et inférieur au nombre positif $m(B) - M(A)$. Toutes les différences $b - a$ seraient supérieures à ε, contrairement à la seconde hypothèse.

IV. — Théorie des limites de suites.

18. Considérons une suite infinie de nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

On dit qu'*une telle suite a pour limite* λ, *ou tend vers* λ, *ou que* u_n *tend vers* λ, *quand* n *croît indéfiniment, si, quels que soient les nombres* λ' *et* λ'' *satisfaisant à la double inégalité*

$$\lambda' < \lambda < \lambda'',$$

il existe un entier p *tel que la condition* $n > p$ *entraine*

$$\lambda' < u_n < \lambda''.$$

Nous donnerons quelquefois une portée plus grande à la notion de limite en supposant que λ peut être égal à $+\infty$ ou à $-\infty$. Si par exemple $\lambda = +\infty$, il n'existe pas de nombre λ'', de sorte que, dire que la suite $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite $+\infty$, c'est dire que, quel que soit λ', il y a un nombre p tel que, pour $n > p$, on a

$$\lambda' < u_n.$$

Nous dirons que la seconde définition correspond au *sens étendu* de la notion de limite et la première au *sens ordinaire*.

19. *Suites non décroissantes.* — Considérons une suite telle que l'on ait

$$u_1 \leqq u_2 \leqq \ldots \leqq u_n \ldots.$$

Soit λ la borne supérieure (finie ou non) de l'ensemble des u_n. Je dis que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite λ (au sens étendu).

En effet, si λ'' est plus grand que λ, tous les u_n sont plus petits que λ''. Si λ' est plus petit que λ, d'après la seconde propriété de la borne supérieure, un au moins des u_n est supérieur à λ'; tous ceux qui suivent ce terme dans la suite ont la même propriété. Donc, à partir d'un certain rang, tous les u_n sont compris entre λ' et λ''; donc la suite a pour limite λ.

Suites non croissantes. — De même on reconnaît qu'une suite non croissante

$$u_1 \geqq u_2 \geqq \ldots \geqq u_n \geqq \ldots$$

a pour limite la borne inférieure de l'ensemble des nombres u_n.

Comme application, soient λ un nombre quelconque, u_n et v_n ses valeurs approchées à $\frac{1}{10^n}$ près par défaut et par excès (n° 8, p. 7). On a

$$u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq v_2 \leq v_1.$$

L'ensemble des u_n et l'ensemble des v_n sont tels que tout nombre du premier ensemble est inférieur à tout nombre du second ; comme on a de plus $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ et que, par suite, quel que soit $\varepsilon > 0$, pour une certaine valeur de n, on a $v_n - u_n < \varepsilon$, on en conclut (n° 17, p. 11) que la borne supérieure des u_n, soit $M(u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, est égale à la borne inférieure des v_n, soit $m(v_1, \ldots, v_n, \ldots)$. On a d'ailleurs (n° 8)

$$u_n \leq \lambda < v_n ;$$

d'où

$$M(u_1, \ldots, u_n, \ldots) \leq \lambda \leq m(v_1, \ldots, v_n, \ldots);$$

il y a donc égalité entre ces trois nombres.

Ainsi le nombre λ est *la borne supérieure de la suite de ses valeurs approchées par défaut* et *la borne inférieure de la suite de ses valeurs approchées par excès à* $\frac{1}{10^n}$ *près;* c'est donc aussi *la limite commune de ces deux suites.*

20. *Plus grande et plus petite limite.* — Soit une suite quelconque

$$(1) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots ;$$

n étant fixé, l'ensemble des nombres u_n, u_{n+1}, ... a une borne supérieure M_n et une borne inférieure m_n.

En donnant à n les valeurs entières successives 1, 2, 3, ..., on a

$$M_1 \geq M_2 \geq M_3 \geq \ldots \geq M_n \geq \ldots,$$
$$m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq \ldots \leq m_n \leq \ldots.$$

La première suite est une suite non croissante ; elle a pour limite la borne inférieure M des nombres M_n. La seconde est une suite non décroissante et a pour limite la borne supérieure m des nombres m_n. D'ailleurs un nombre quelconque M_n est supérieur ou égal aux nombres suivants M_{n+1}, ..., donc aussi aux nombres m_{n+1}, ..., donc à tous les nombres de la seconde suite. Il en résulte (n° 13, p. 10) que l'on a

$$M \geq m.$$

M est dit la *plus grande limite de la suite* (1), m est dit la *plus petite limite de cette suite*. M a les deux propriétés suivantes :

1° Si a est un nombre plus grand que M, il y a un entier p tel que, pour $n > p$, on a $u_n < a$.

En effet, la suite $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ tendant vers M, il y a un entier p, tel que pour $n > p$ on a $M_n < a$, d'où $u_n < a$;

2° Si a est plus petit que M, quel que soit p, on peut trouver un entier n supérieur à p, et tel que $u_n > a$.

En effet, quel que soit p, M_{p+1}, qui est au moins égal à M, est supérieur à a, c'est-à-dire que, dans la suite $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots$, il y a un nombre au moins supérieur à a.

La plus petite limite m a des propriétés analogues :

1° Si a est un nombre plus petit que m, à partir d'un certain rang les termes de la suite donnée sont tous supérieurs à a;

2° Si a est plus grand que m, quel que soit p, on peut trouver un entier n supérieur à p, tel que $u_n < a$.

21. *Pour que la suite* (1) *ait une limite (sens étendu), il faut et il suffit que* M *soit égal à* m, *et cette valeur est alors la limite.*

En effet, supposons d'abord que la suite ait une limite λ (sens étendu); prenons des nombres λ' et λ'' tels que

$$\lambda' < \lambda < \lambda''.$$

D'après la définition de la limite, il y a un entier p tel que pour $n > p$ on a

$$\lambda' < u_n < \lambda'',$$

c'est-à-dire que tous les nombres $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots$ sont compris entre λ' et λ''. Il en est donc de même des nombres M_{p+1}, m_{p+1}, donc aussi de M et m. Le raisonnement étant valable quel que soit λ' inférieur à λ, M et m surpassent tous les nombres inférieurs à λ. Par suite, ils sont au moins égaux à λ. De la même façon, on voit qu'ils lui sont au plus égaux. On a donc

$$M = m = \lambda.$$

La condition est donc nécessaire. Elle est suffisante. En effet, supposons que M soit égal à m; soit λ leur valeur commune. Prenons un nombre λ' inférieur à $\lambda = m$. D'après la première propriété de la plus petite limite, il y a un entier p tel que pour $n > p$ on a $\lambda' < u_n$. De même, soit λ'' un nombre supérieur à $\lambda = M$; à partir d'un cer-

tain rang, tous les u_n sont inférieurs à λ''. De sorte qu'à partir d'un certain rang les u_n sont compris entre λ' et λ'', ce qui montre que la suite (1) a pour limite λ.

On reconnaît ainsi que *la limite de* (1), *si elle existe, est unique.*

En considérant spécialement le cas d'une limite finie, on a l'énoncé suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite (1) *ait une limite finie est que* M *et* m *soient égaux à un même nombre fini.*

22. Théorème I (de Cauchy). — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ *ait une limite finie est que, à tout nombre* ε *positif, on puisse faire correspondre un entier* p *tel que les conditions* $\mu > p$, $\nu > p$ *entraînent*

$$|u_\mu - u_\nu| < \varepsilon.$$

1° La condition est nécessaire. En effet, supposons que la suite

(1) $$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

ait une limite λ. Donnons-nous un nombre ε positif et prenons (n° 9, p. 7) deux nombres rationnels α, β satisfaisant aux inégalités

$$\alpha < \lambda < \beta, \qquad \beta - \alpha < \varepsilon.$$

D'après la définition de la limite, il y a un entier p tel que

$$\mu > p, \qquad \nu > p$$

entraînent

$$\alpha < u_\mu < \beta, \qquad \alpha < u_\nu < \beta,$$

d'où résulte (n° 15, p. 11)

$$|u_\mu - u_\nu| < \beta - \alpha < \varepsilon.$$

2° Pour faire voir que la condition est suffisante, nous allons montrer qu'elle n'est pas remplie si la suite n'a pas une limite finie.

Soient M et m la plus grande et la plus petite limite de la suite. Les cas possibles sont les suivants :

(*a*) $$M = m = +\infty,$$

(*b*) $$M = m = -\infty,$$

(*c*) $$M > m.$$

(*a*.) Cas de $M = m = +\infty$. Donnons-nous un nombre rationnel positif A, un entier p, et choisissons un autre entier $\mu > p$.

Considérons le terme u_μ. Prenons un nombre rationnel B supérieur à u_μ. $B + A$ est un certain nombre rationnel. La suite (1) ayant pour limite $+\infty$, à partir d'un certain rang les termes de la suite dépassent tous $B + A$. On peut donc prendre un entier ν supérieur à μ et tel que

$$u_\nu > B + A.$$

On a alors

$$u_\mu < B < B + A < u_\nu,$$

d'où (n° 15, p. 11)

$$|u_\mu - u_\nu| > (B + A) - B = A,$$

de sorte que, p et A étant pris arbitrairement, on peut trouver deux entiers μ et ν supérieurs à p et tels que $|u_\mu - u_\nu|$ soit supérieur à A. La condition de l'énoncé n'est donc pas remplie.

(*b*.) Une démonstration analogue s'applique au cas de $M = m = -\infty$.

(*c*.) Cas de $M > m$. Prenons deux nombres α, β tels que

$$m < \alpha < \beta < M.$$

Quel que soit p, de $m < \alpha$ résulte qu'il y a un entier μ supérieur à p, tel que $u_\mu < \alpha$; de $\beta < M$ résulte qu'il existe un entier ν supérieur à p, tel que $u_\nu > \beta$.

Des inégalités

$$u_\mu < \alpha < \beta < u_\nu$$

résulte (n° 15, p. 11)

$$|u_\mu - u_\nu| > \beta - \alpha.$$

La condition de l'énoncé n'est pas vérifiée pour ε, dès que ε est inférieur à $\beta - \alpha$.

Le théorème I est donc établi.

Théorème II. — *Si l'on a deux suites*

(1) $$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

(2) $$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots,$$

dont la première a une limite finie λ, *pour que la seconde ait aussi pour limite* λ, *il faut et il suffit que* $|u_n - v_n|$ *ait pour limite* 0.

1° La condition est nécessaire. En effet, supposons que v_n tende vers λ comme u_n. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons deux nombres α, β, tels que

$$\alpha < \lambda < \beta, \qquad \beta - \alpha < \varepsilon.$$

Quand n dépasse une certaine valeur, on a à la fois

$$\alpha < u_n < \beta, \qquad \alpha < v_n < \beta;$$

d'où résulte

$$|u_n - v_n| < \beta - \alpha < \varepsilon.$$

La conclusion étant vraie quel que soit le nombre positif ε, cela veut dire que le nombre $|u_n - v_n|$ a pour limite o.

2° La condition est suffisante. Pour le montrer, nous allons faire voir qu'elle n'est pas remplie si v_n ne tend pas vers λ.

Soient M et m la plus grande et la plus petite limite de la suite (2). Par hypothèse, on n'a pas $M = m = \lambda$.

On peut avoir $M > \lambda$, ou bien $M = \lambda$ avec $m < \lambda$, de sorte que l'on a au moins une des deux conditions $M > \lambda$, $m < \lambda$.

Soit par exemple $M > \lambda$. Prenons deux nombres α et β tels que

$$\lambda < \alpha < \beta < M.$$

Il y a un entier p tel que, quel que soit $n > p$, on a $u_n < \alpha$. D'autre part, comme on a $\beta < M$, on peut trouver $n > p$ tel que $v_n > \beta$.

De

$$u_n < \alpha < \beta < v_n,$$

résulte

$$|u_n - v_n| > \beta - \alpha.$$

Il suffit alors de choisir ε inférieur à $\beta - \alpha$, pour que la condition de l'énoncé ne puisse être remplie pour ε.

On ferait, en partant de l'hypothèse $m < \lambda$, une démonstration analogue.

THÉORÈME III. — *Pour qu'une suite*

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

ait pour limite le nombre λ (*fini*) *il faut et il suffit que* $|v_n - \lambda|$ *ait pour limite* o.

Cet énoncé s'obtient en appliquant le théorème précédent au cas où tous les nombres de la première suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont égaux à un même nombre λ, et où par conséquent cette suite a pour limite λ.

THÉORÈME IV. — *Si une suite*

(1) $$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n, \quad \ldots$$

a pour limite λ, *la suite des nombres opposés*

$$-u_1, \quad -u_2, \quad \ldots, \quad -u_n, \quad \ldots$$

a pour limite $-\lambda$.

En effet, soient α et β deux nombres tels que

$$\alpha < -\lambda < \beta.$$

Il en résulte (n° 7, p. 6)

$$-\beta < \lambda < -\alpha.$$

Comme la suite (1) tend vers λ, il y a un entier p tel que, pour $n > p$, on a

$$-\beta < u_n < -\alpha,$$

ce qui entraîne

$$\alpha < -u_n < \beta.$$

Cette double inégalité exprime que la suite

$$-u_1, \quad -u_2, \quad \ldots, \quad -u_n, \quad \ldots$$

a pour limite $-\lambda$.

THÉORÈME V. — *Si la suite*

(1) $$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

tend vers λ, *la suite*

(2) $$|u_1|, \quad |u_2|, \quad \ldots, \quad |u_n|, \quad \ldots$$

tend vers $|\lambda|$.

En effet, si λ est positif, à partir d'un certain rang, u_n est positif; on a, à partir de ce rang, $|u_n| = u_n$, et, comme $|\lambda| = \lambda$, l'égalité $\lim u_n = \lambda$ peut s'écrire $\lim |u_n| = |\lambda|$.

Si λ est négatif, à partir d'un certain rang, u_n est négatif; on a, à partir de ce rang, $|u_n| = -u_n$; comme $|\lambda| = -\lambda$, et comme, d'après le théorème IV, $\lim u_n = \lambda$ entraîne $\lim(-u_n) = -\lambda$, on peut écrire $\lim |u_n| = |\lambda|$.

Enfin, si λ est nul, quel que soit le nombre ε positif, il y a un nombre p tel que, pour $n > p$, on a $-\varepsilon < u_n < \varepsilon$, d'où $|u_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $|u_n|$ a pour limite o.

THÉORÈME VI. — *Si l'on a deux suites*

$$u_1, \; u_2, \; \ldots, \; u_n, \; \ldots,$$
$$v_1, \; v_2, \; \ldots, \; v_n, \; \ldots,$$

dont la première tend vers λ, la seconde vers μ, λ et μ étant deux nombres finis, la suite de terme général $v_n - u_n$ a pour limite $\mu - \lambda$.

Remarquons que, dans le cas de $\lambda = \mu$, cet énoncé constitue la première partie du théorème II.

Supposons maintenant $\mu \neq \lambda$, par exemple $\mu > \lambda$. Soit ε un nombre rationnel positif. Prenons deux nombres rationnels a et b tels que

$$a < \lambda < b < \mu, \qquad b - a < \varepsilon,$$

puis deux nombres rationnels c et d tels que

$$b < c < \mu < d, \qquad d - c < \varepsilon,$$

de sorte que

(1) $$a < \lambda < b < c < \mu < d$$

avec

(2) $$b - a < \varepsilon, \qquad d - c < \varepsilon.$$

Dès que n surpasse un certain entier p, on a

(3) $$a < u_n < b < c < v_n < d.$$

Des inégalités (1) résulte (n° 15, p. 11)

(4) $$c - b \leqq \mu - \lambda \leqq d - a.$$

Des inégalités (3) résulte de même

(5) $$c - b \leqq v_n - u_n \leqq d - a.$$

De (4) et (5) résulte de la même manière

$$|(\mu - \lambda) - (v_n - u_n)| \leqq (d - a) - (c - b),$$

et, comme a, b, c, d, ε sont rationnels, on a, d'après (2),

$$d - a - (c - b) = d - c + b - a < 2\varepsilon,$$

donc

$$|(\mu - \lambda) - (v_n - u_n)| < 2\varepsilon.$$

ε étant arbitraire, on a

$$\lim |(\mu - \lambda) - (v_n - u_n)| = 0.$$

D'après le théorème III, cela signifie que l'on a

$$\lim (v_n - u_n) = \mu - \lambda.$$

C'est la propriété que nous voulions établir. En changeant les signes et en se servant du théorème IV, on a

$$\lim(u_n - v_n) = \lambda - \mu,$$

c'est-à-dire que le théorème a lieu dans quelque sens que l'on prenne la différence.

On a aussi (Théorème V)

$$\lim |u_n - v_n| = |\lambda - \mu|.$$

V. — Notions de fonction et de continuité.

23. En Mathématiques, on représente par une lettre un nombre susceptible de prendre différentes valeurs. On dit alors que l'on a une *variable*.

Si, aux différentes valeurs d'une première variable x, correspondent, suivant une loi que l'on indique, différents nombres, on convient de considérer ces nombres comme les valeurs d'une autre variable qui est dite *fonction* de la première. Celle-ci reçoit le nom de *variable indépendante* ou d'*argument* de la fonction.

Par exemple, si l'on donne une suite de nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, le nombre u_n est fonction du rang n. La partie entière d'un nombre x est une fonction de x; $-x$ est une fonction de x; x lui-même est une fonction de x.

De même, si l'on considère plusieurs variables, c'est-à-dire plusieurs lettres dont chacune est susceptible de représenter différents nombres, si à chaque système de valeurs attribuées aux variables correspond un nombre, suivant une loi que l'on indique, on convient de considérer ces derniers nombres comme les valeurs d'une même variable qui est dite *fonction* des premières, lesquelles sont les *variables indépendantes*.

Par exemple, en Arithmétique, on apprend à donner un sens aux expressions $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$. Les trois premières sont définies quels que soient les nombres rationnels a et b, la quatrième est définie à condition que b soit différent de o. Ce sont des fonctions de a et b.

Nous avons défini précédemment $x-y$ quels que soient les nombres réels x et y; $x-y$ est donc une fonction de x et y.

24. Étant donnés deux nombres a et b, tels que $a < b$, on appelle *intervalle* (a, b) l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x \leq b$, *intervalle* $(-\infty, a)$ l'ensemble des nombres x tels que $x \leq a$, *intervalle* $(a, +\infty)$ l'ensemble des nombres x tels que $a \leq x$, *intervalle* $(-\infty, +\infty)$ l'ensemble de tous les nombres.

Le premier de ces intervalles est dit *borné*; les autres sont au contraire *illimités*.

Si l'on a plusieurs variables $x, y, \ldots$ et des intervalles correspondant respectivement à chacune de ces variables, on appelle *champ* l'ensemble des systèmes de valeurs attribuées aux variables $x, y, \ldots$, telles que x fait partie de l'intervalle de variation relatif à x, y de l'intervalle relatif à y, etc.

Le champ est *borné* si tous ces intervalles de variation sont bornés. Il se compose alors de l'ensemble de tous les systèmes de valeurs de $x, y, \ldots$, tels que

$$a \leq x \leq a', \qquad b \leq y \leq b', \qquad \ldots,$$

$a, a', b, b', \ldots$ étant des nombres finis.

Le champ formé par tous les systèmes de valeurs possibles attribuées à $x, y, \ldots$ est défini par

$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty, \qquad \ldots.$$

Nous dirons que c'est le *champ indéfini* des variables $x, y, \ldots$.

Pour abréger le langage, quand on considérera simultanément plusieurs variables, nous appellerons *point* un système de valeurs déterminées attribuées à ces variables. Nous dirons que l'on a un *point rationnel* si toutes ces valeurs sont rationnelles.

Limite d'une suite de points. — On dit que *la suite de points*

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, \ldots), \quad \ldots$$

a pour limite le point $(x_0, y_0, \ldots)$, *quand* n *croît indéfiniment, si l'on a*

$$\lim x_n = x_0, \qquad \lim y_n = y_0, \qquad \ldots.$$

25. *Continuité.* — Soit une fonction d'une ou plusieurs variables $f(x, y, \ldots)$ définie pour tous les points d'un champ C. (Ce champ se réduit à un intervalle s'il n'y a qu'une variable.) Soit $(x_0, y_0, \ldots)$ un point du champ C.

On dit que *la fonction* f *est continue au point* $(x_0, y_0, \ldots)$ *si,*

pour toute suite de points appartenant au champ C,

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, \ldots), \quad \ldots,$$

et tendant vers le point $(x_0, y_0, \ldots)$, *on a*

$$\lim f(x_n, y_n, \ldots) = f(x_0, y_0, \ldots).$$

Si cette condition est vérifiée pour tout point $(x_0, y_0, \ldots)$ du champ C, on dit que *f est continue dans le champ*.

Par exemple, les fonctions $(-x)$, $|x|$, qui sont définies pour toute valeur de x, c'est-à-dire dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, sont continues, car, d'après les théorèmes IV et V, p. 18, on sait que

$$\lim x_n = x_0$$

entraîne

$$\lim(-x_n) = -x_0, \qquad \lim |x_n| = |x_0|.$$

La fonction $x - y$ des deux variables x et y, qui a été définie pour toutes les valeurs de x et de y, est continue, car on a vu (théorème VI, p. 19) que

$$\lim x_n = x_0, \qquad \lim y_n = y_0$$

entraînent

$$\lim(x_n - y_n) = x_0 - y_0.$$

La valeur approchée de x à une unité près par défaut (partie entière de x) est une fonction définie pour toute valeur de x. *Ce n'est pas une fonction continue.* Prenons par exemple $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, et donnons à n les valeurs entières 1, 2, 3, ... La suite obtenue a pour limite 1, lorsque n augmente indéfiniment, tandis que la valeur approchée à une unité près par défaut de x_n est toujours égale à 0, donc a pour limite 0, qui n'est pas égal à la partie entière de 1.

VI. — Fonctions d'arguments rationnels.

26. Étudions particulièrement les fonctions connues par l'Arithmétique et l'Algèbre élémentaire et définies pour des valeurs rationnelles attribuées aux variables.

Considérons une fonction f de deux variables x, y définie pour tous les points *rationnels* appartenant à un champ C.

Nous dirons que *la fonction f est uniformément continue dans* C, *si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre*

positif α, *tel que les conditions*

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha$$

entraînent

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon,$$

(x, y) *et* (x', y') *étant deux points rationnels quelconques du champ* C.

Remarquons que la condition sera certainement remplie pour tout nombre positif ε, si elle l'est pour tout nombre *rationnel* positif.

127. *Les fonctions* $x + y$ *et* $x - y$, *qui sont définies pour tout point rationnel* (x, y), *sont uniformément continues dans le champ indéfini*

$$-\infty < x < +\infty, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Pour résoudre le problème indiqué dans la définition de la continuité uniforme, il nous faut vérifier les conditions

$$|(x + y) - (x' + y')| < \varepsilon, \qquad |(x - y) - (x' - y')| < \varepsilon.$$

Ces conditions seront vérifiées si l'on a

$$|x - x'| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y - y'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

128. *La fonction* xy *est uniformément continue dans tout champ borné.* Soit C un tel champ, défini par les conditions

$$a \leqq x \leqq a', \qquad b \leqq y \leqq b'.$$

Prenons un nombre rationnel A supérieur aux valeurs absolues des quatre nombres a, a', b, b'; pour tout point du champ on a

$$|x| < A, \qquad |y| < A.$$

Il s'agit de résoudre l'inégalité

$$|xy - x'y'| < \varepsilon.$$

Nous l'écrirons

$$|(x - x')y + x'(y - y')| < \varepsilon.$$

Cherchons à satisfaire aux deux inégalités

$$|(x - x')y| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |(y - y')x'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dans le champ considéré, ces inégalités seront vérifiées, si l'on vérifie les suivantes :

$$|x - x'| A < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y - y'| A < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit pour cela de prendre $x - x'$ et $y - y'$ plus petits en valeur absolue que $\frac{\varepsilon}{2A}$.

129. La fonction $\frac{x}{y}$ est définie en tout point rationnel (x, y) tel que $y \neq 0$. Pour qu'elle soit définie en tous les points rationnels d'un champ borné C

$$a \leq x \leq a', \qquad b \leq y \leq b',$$

il faut et il suffit que C ne contienne aucun point pour lequel y soit nul, c'est-à-dire que l'intervalle (b, b') ne contienne pas o, ou encore que b et b' soient différents de o et de même signe. Je dis que *la fonction* $\frac{x}{y}$ *est uniformément continue dans un tel champ.*

Prenons un nombre μ, positif, rationnel et inférieur aux valeurs absolues de b et b', et un nombre positif rationnel A supérieur aux valeurs absolues de a, a', b, b'. Pour tout point rationnel du champ, on a

$$|x| < A, \qquad \mu < |y| < A.$$

Il s'agit de vérifier la condition suivante :

$$\left| \frac{x}{y} - \frac{x'}{y'} \right| < \varepsilon,$$

qui s'écrit

$$\frac{|xy' - x'y|}{|yy'|} < \varepsilon.$$

Cherchons à vérifier l'inégalité suivante, obtenue en diminuant le dénominateur de la précédente :

$$\frac{|xy' - x'y|}{\mu^2} < \varepsilon$$

ou

$$|(x - x')y + x(y' - y)| < \varepsilon\mu^2.$$

Il suffit de résoudre les inégalités :

$$|x - x'| A < \frac{\varepsilon\mu^2}{2}, \qquad |y' - y| A < \frac{\varepsilon\mu^2}{2}.$$

On voit que la condition sera vérifiée en prenant $x - x'$ et $y - y'$ inférieurs en valeur absolue à $\frac{\varepsilon\mu^2}{2A}$.

VII. — Principe d'extension.

§ 30. Nous nous proposons, étant donnée une fonction $f(x, y)$ de deux arguments rationnels, supposée uniformément continue dans tout champ borné où elle se trouve définie, de définir une fonction $F(x, y)$ *d'arguments quelconques, qui soit égale à* $f(x, y)$ *en tout point rationnel et qui, de plus, soit continue.*

La fonction F sera définie en tout point (x_0, y_0) possédant la propriété suivante : il existe des nombres a, a', b, b' tels que l'on a

$$a < x_0 < a', \qquad b < y_0 < b'.$$

et la fonction f est définie en tous les points rationnels du champ C, défini par

$$a \leqq x \leqq a', \qquad b \leqq y \leqq b'.$$

Remarquons que, s'il s'agit des fonctions $x + y$, $x - y$, xy, tout point (x_0, y_0) vérifie la condition. S'il s'agit de la fonction $\frac{x}{y}$, tout point (x_0, y_0) du plan tel que $y_0 \neq 0$ remplit la condition ; en effet, étant donné un tel point, prenons deux nombres b et b' de même signe et tels que $b < y_0 < b'$, puis deux nombres a, a' arbitraires ; dans le champ ainsi obtenu, la fonction est définie en tout point rationnel.

Cela étant, soit C le champ correspondant à un point (x_0, y_0) qui remplit la condition indiquée. Rappelons qu'à un nombre positif donné ε, on peut faire correspondre un nombre α positif, tel que, pour deux points rationnels (x, y), (x', y') de C, les conditions

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha$$

entraînent

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

On peut trouver une suite de nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, tendant vers x_0 et une suite de nombres rationnels $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, tendant vers y_0 ; on a ainsi une suite de points

$$(1) \qquad (x_1, y_1), (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n), \quad \ldots$$

tendant vers (x_0, y_0). Quand n dépasse une certaine valeur, x_n fait

partie de l'intervalle (a, a'), y_n de l'intervalle (b, b'), et par suite le point (x_n, y_n) fait partie du champ C. Supposons cette condition remplie à partir du premier point. Je dis que la suite

$$(2) \qquad f(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad f(x_n, y_n), \quad \ldots$$

a une limite quand n croît indéfiniment.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Prenons un nombre positif α qui corresponde à ε d'après la loi indiquée. Du fait que l'on a

$$\lim x_n = x_0, \qquad \lim y_n = y_0,$$

résulte, d'après le théorème I, 1° (p. 15) qu'il y a un entier p, tel que les conditions

$$\mu > p, \qquad \nu > p$$

entraînent

$$|x_\mu - x_\nu| < \alpha, \qquad |y_\mu - y_\nu| < \alpha,$$

lesquelles entraînent elles-mêmes l'inégalité

$$|f(x_\mu, y_\mu) - f(x_\nu, y_\nu)| < \varepsilon.$$

D'après le théorème I, 2°, ce fait exprime que la suite (2) a une limite. Soit λ cette limite.

Je dis qu'elle reste la même si l'on remplace la suite (1) par une autre suite de points rationnels tendant vers (x_0, y_0), soit

$$(x'_1, y'_1), \quad \ldots, \quad (x'_n, y'_n), \quad \ldots.$$

On a, par hypothèse,

$$\lim x'_n = x_0, \qquad \lim y'_n = y_0.$$

D'après le théorème II, 1° (p. 16), il y a un entier p, tel que, pour $n > p$, on a

$$|x_n - x'_n| < \alpha, \qquad |y_n - y'_n| < \alpha.$$

Ces conditions entraînent

$$|f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n)| < \varepsilon.$$

Comme la suite (2) a une limite λ, ceci exprime, d'après le théorème II, 2°, que la suite

$$f(x'_1, y'_1), \quad \ldots, \quad f(x'_n, y'_n), \quad \ldots$$

a la même limite λ. Ce nombre λ est donc indépendant de la suite choisie, *il ne dépend que de* (x_0, y_0).

La fonction F cherchée, si elle existe, devant être continue en (x_0, y_0), doit être égale en ce point à λ. *Nous poserons*

$$F(x_0, y_0) = \lambda.$$

Il faut montrer que la fonction F ainsi définie vérifie les conditions imposées. Tout d'abord, si (x_0, y_0) est rationnel, nous pouvons prendre, quel que soit n, $x_n = x_0$, $y_n = y_0$. Il est évident que l'on a dans ce cas $\lambda = f(x_0, y_0)$, d'où

$$F(x_0, y_0) = f(x_0, y_0),$$

donc F *est égal à* f *en tout point rationnel.*

Montrons maintenant que, ε et α ayant la même signification que plus haut, pour deux points *quelconques* (x, y), (x', y') du champ C, les conditions

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha$$

entraînent

$$|F(x, y) - F(x', y')| \leqq \varepsilon.$$

En effet, si x est différent de x', prenons une suite de nombres rationnels $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, tous compris entre x et x' et tendant vers x, et une suite de nombres rationnels $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$, tous compris entre x et x' et tendant vers x'. Si x est égal à x', prenons une suite de nombres rationnels, tous contenus dans l'intervalle de variation de x relatif au champ C, et tendant vers $x = x'$, soit x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$; prenons $x'_n = x_n$. En opérant de même pour la variable y, on détermine deux suites de points *rationnels* du champ C

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n), \quad \ldots,$$
$$(x'_1, y'_1), \quad \ldots, \quad (x'_n, y'_n), \quad \ldots;$$

la première tend vers (x, y), la seconde vers (x', y'), et l'on a, quel que soit n,

$$|x_n - x'_n| < \alpha, \qquad |y_n - y'_n| < \alpha.$$

Ceci entraîne

$$|f(x_n, y_n) - f(x'_n, y'_n)| < \varepsilon.$$

Quand n croît indéfiniment, d'après le théorème VI (p. 20), le premier membre a une limite qui est

$$|\lim f(x_n, y_n) - \lim f(x'_n, y'_n)|$$

ou

$$|F(x, y) - F(x', y')|.$$

Donc

$$|F(x, y) - F(x', y')| \leqq \varepsilon.$$

Revenons au point (x_0, y_0). Si l'on a une suite *quelconque* de points

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n), \quad \ldots$$

tendant vers (x_0, y_0), la fonction sera définie en ces points, à partir d'un certain rang. Je dis que l'on a

$$\lim F(x_n, y_n) = F(x_0, y_0).$$

En effet, ε et α ayant toujours la même signification, quand n dépasse un certain entier, on a

$$|x_n - x_0| < \alpha, \qquad |y_n - y_0| < \alpha,$$

ce qui entraîne, d'après ce que l'on vient de voir,

$$|F(x_n, y_n) - F(x_0, y_0)| \leqq \varepsilon,$$

et, comme ε est arbitraire, cela signifie que

$$\lim F(x_n, y_n) = F(x_0, y_0).$$

Donc la fonction F est continue au point (x_0, y_0). *C'est donc une fonction continue en tout point où elle se trouve définie.*

Ainsi la fonction F est bien déterminée et remplit toutes les conditions imposées. Nous dirons que F *est la fonction f étendue,* et le procédé de définition de F s'appellera *principe d'extension.*

31. On a vu que chacune des fonctions d'arguments rationnels

$$x + y, \quad x - y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}$$

est uniformément continue dans tout champ borné où elle se trouve définie. Donc le principe d'extension s'applique à ces fonctions, et donne naissance à des fonctions d'arguments quelconques que nous continuerons à désigner par les mêmes notations et à appeler *somme, différence, produit, quotient.* Les trois premières sont définies pour tout point (x, y); la quatrième est définie pour tout système (x, y) tel que $y \neq 0$.

La définition de ces quatre fonctions est nouvelle, sauf en ce qui concerne $x - y$.

Nous avons, en effet, défini précédemment (nº 14, p. 10) une fonction $x - y$ d'arguments quelconques, dont nous avons démontré qu'elle est continue (nº 25, p. 22) et qu'elle se réduit, quand x et y sont rationnels, à la fonction définie par l'Algèbre élémentaire. Ces

deux propriétés ne pouvant appartenir qu'à une seule fonction, la première définition coïncide avec la définition actuelle.

Les quatre fonctions sont continues, c'est-à-dire que, si

$$(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n), \quad \ldots$$

est une suite de points tendant vers (x, y), les expressions suivantes :

$$x_n + y_n, \quad x_n - y_n, \quad x_n y_n, \quad \frac{x_n}{y_n}$$

tendent respectivement vers

$$x + y, \quad x - y, \quad xy, \quad \frac{x}{y}.$$

On peut donc dire que *le résultat des quatre operations de l'Arithmétique, effectuées sur deux nombres x, y quelconques, est la limite vers laquelle tend le résultat obtenu en effectuant la même opération sur deux nombres x_n, y_n, tendant respectivement vers les nombres donnés.*

Il convient de remarquer que, si l'on a une fonction de plusieurs variables et que l'on donne à certaines de ces variables des valeurs fixes, la fonction se réduit à une fonction des autres variables. Si la première fonction est continue, la nouvelle fonction l'est *a fortiori*. Signalons comme cas particulier d'un quotient $\frac{x}{y}$ le cas de $x = 1$. On obtient alors la fonction $\frac{1}{y}$, qui est dite l'*inverse* de y.

32. *Fonctions composées.* — Soient x, y, ... des variables, f, φ, ... des fonctions de x, y, ... ; f, φ, ... peuvent être, à leur tour, arguments d'une nouvelle fonction F. Celle-ci peut alors être considérée comme une fonction $\Phi(x, y, \ldots)$ de x, y, ... par l'intermédiaire des fonctions f, φ, ... On dit que c'est une *fonction composée* de x, y, ...

Dans le cas d'une seule variable indépendante x et d'une seule fonction intermédiaire f, la fonction F est dite *fonction de fonction*.

Les quantités $x + (y + z)$ et $x(y + z)$, par exemple, sont fonctions composées des trois variables x, y, z par l'intermédiaire des fonctions x et $y + z$.

Si f, φ, ... sont fonctions continues des variables x, y, ... et si F est fonction continue de f, φ, ..., la fonction

$$\Phi(x, y, \ldots) = F(f, \varphi, \ldots)$$

est fonction continue de x, y, ... en tout point où les fonctions considérées se trouvent définies.

En effet, soient $(x_0, y_0, \ldots)$ un point, et

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots) \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, \ldots), \quad \ldots$$

une suite quelconque de points tendant vers $(x_0, y_0, \ldots)$. D'après l'hypothèse, si l'on pose, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$f_n = f(x_n, y_n, \ldots), \qquad \varphi_n = \varphi(x_n, y_n, \ldots), \quad \ldots,$$

F est définie et continue pour tous les systèmes de valeurs $(f_n, \varphi_n, \ldots)$.

Chacune des fonctions f, φ, ... étant continue, on a

$$\lim f_n = f_0, \qquad \lim \varphi_n = \varphi_0, \qquad \ldots;$$

F étant continue par rapport à f, φ, ..., il en résulte

$$\lim \mathrm{F}(f_n, \varphi_n, \ldots) = \mathrm{F}(f_0, \varphi_0, \ldots),$$

ce qui s'écrit

$$\lim \Phi(x_n, y_n, \ldots) = \Phi(x_0, y_0, \ldots);$$

cela exprime que la fonction $\Phi(x, y, \ldots)$ est continue.

VIII. — Extension du calcul algébrique.

33. Le calcul algébrique comprend le calcul des égalités et le calcul des inégalités. Occupons-nous d'abord du premier.

Le calcul algébrique des égalités résulte d'un certain nombre de principes que l'on établit en Arithmétique et en Algèbre élémentaire et qui peuvent se résumer dans le Tableau suivant de formules, où x, y, z désignent des nombres rationnels :

$$x + y = y + x,$$
$$x + (y + z) = x + y + z,$$
$$x + 0 = x,$$
$$x - x = 0,$$
$$0 - x = -x,$$
$$x + (-y) = x - y,$$
$$-(-x) = x,$$
$$xy = yx,$$
$$x(yz) = xyz,$$
$$(x + y)z = xz + yz,$$

$$x \cdot 0 = 0,$$
$$x \cdot 1 = x,$$
$$x(-y) = -xy,$$
$$\frac{x}{x} = 1 \qquad (x \neq 0),$$
$$\frac{x}{y} = x\frac{1}{y} \qquad (y \neq 0).$$

34. *Si deux fonctions f et φ, d'arguments quelconques $x, y, \ldots$, sont continues et sont égales pour tout point rationnel, elles sont encore égales pour un point quelconque.*

Soit $(x_0, y_0, \ldots)$ un point quelconque. Prenons une suite de points rationnels

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n, \ldots), \quad \ldots$$

tendant vers $(x_0, y_0, \ldots)$. Par hypothèse, on a, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$f(x_n, y_n, \ldots) = \varphi(x_n, y_n, \ldots).$$

Quand n croît indéfiniment, les deux membres, en vertu de la continuité de f et de φ, ont pour limites respectivement $f(x_0, y_0, \ldots)$ et $\varphi(x_0, y_0, \ldots)$; donc on a

$$f(x_0, y_0, \ldots) = \varphi(x_0, y_0, \ldots).$$

Cela posé, toutes les fonctions qui figurent dans le Tableau précédent sont fonctions continues des variables qui y entrent, les unes en vertu du principe d'extension, les autres en vertu de ce principe et du théorème relatif à la continuité des fonctions composées; par conséquent ces égalités, valables quand les arguments ont des valeurs rationnelles, sont encore valables quand ces arguments sont quelconques.

Ainsi, *toutes les règles du calcul algébrique relatives aux transformations d'égalités s'appliquent aux nombres quelconques.*

35. *Calcul des inégalités.* — Les règles fondamentales du calcul des inégalités établies en Arithmétique et en Algèbre élémentaire sont les suivantes :

De $x > y$ et $y > z$ résulte $x > z$,
De $x > 0$ résulte $-x < 0$,
De $x > y$ résulte $x + z > y + z$,
De $x > y$ et $z > 0$ résulte $xz > yz$.

La première règle a été étendue à des nombres quelconques (nº 6, p. 5). La seconde résulte de la définition des nombres opposés (nº 7, p. 6). Généralisons la troisième.

x et y étant deux nombres quelconques, soit $x > y$. D'après la définition de la différence (nº 14, p. 10), cette inégalité entraîne

$$x - y > 0,$$

ce qui peut s'écrire, d'après le calcul des égalités étendu,

$$(x+z) - (y+z) > 0,$$

d'où résulte

$$x + z > y + z.$$

Étendons de même la quatrième règle. Montrons d'abord que le produit de deux nombres positifs *quelconques* x, y est positif. Prenons deux suites *croissantes* de nombres *rationnels positifs*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$$

tendant vers x et

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots$$

tendant vers y. On a

$$x_n y_n > 0, \qquad x_n y_n < x_{n+1} y_{n+1};$$

donc $x_n y_n$ tend en *croissant* vers xy. Donc on a $xy > 0$.

Cela étant, revenons aux inégalités

$$x > y, \qquad z > 0.$$

De $x > y$ résulte $x - y > 0$, d'où, d'après ce qui précède,

$$(x - y) z > 0,$$

ce qui s'écrit, d'après le calcul des égalités étendu,

$$xz - yz > 0$$

ou

$$xz > yz.$$

Ainsi, *le calcul algébrique relatif aux transformations d'égalités et d'inégalités par addition, soustraction, multiplication, division, se trouve étendu aux nombres quelconques.*

236. Si x, y, z, ... sont des variables, en effectuant sur ces variables et sur des nombres a, b, c, ... les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication, on obtient des *polynomes* par rapport à x, y, z, ...

En effectuant ces opérations et en outre l'opération de division, on obtient des *fractions rationnelles*. Toute fraction rationnelle en $x, y, z, \ldots$ peut être considérée comme fonction composée des variables $x, y, z, \ldots$ avec un certain nombre d'intermédiaires, chaque fonction intermédiaire étant obtenue en effectuant l'une des quatre opérations arithmétiques sur d'autres fonctions intermédiaires. L'application du théorème des fonctions composées (p. 29) montre qu'une fraction rationnelle en $x, y, z, \ldots$ est fonction *continue* de $x, y, z, \ldots$ en tout point où elle est définie.

Si $u, v, \ldots$ sont des fonctions continues de certaines variables $x, y, z, \ldots$, toute fraction rationnelle en $u, v, \ldots$ est fonction continue de $x, y, z, \ldots$; cela résulte du théorème des fonctions composées. En particulier, *la somme, le produit, le quotient de deux fonctions continues de $x, y, z, \ldots$ sont fonctions continues de $x, y, z, \ldots$*.

IX. — Grandeurs concrètes.

37. La notion de nombre irrationnel et le calcul de ces nombres ayant été étudiés par une voie purement analytique, il y a lieu d'examiner de quelle manière et sous quelles conditions ces notions s'adaptent à l'étude des grandeurs concrètes, géométriques ou physiques, telles que longueur rectiligne, angle, durée, etc.

Étant donnée une espèce de grandeurs déterminée, nous dirons que cette espèce de grandeurs est *mesurable* si elle satisfait aux conditions suivantes :

On sait ce que c'est que deux grandeurs égales, qu'une grandeur plus grande qu'une autre, qu'une grandeur égale à la somme de plusieurs autres A, B, C, grandeur que nous représentons par $A + B + C$.

Si l'on a deux grandeurs A, B, telles que $A > B$, il existe une grandeur C telle que A est égale à la somme de B et C. La grandeur C ainsi définie se représente par $A - B$.

De plus, les notions d'égalité, de comparaison, d'addition et de soustraction sont telles qu'elles satisfont aux conditions qui régissent les notions analogues relatives aux nombres arithmétiques.

Par exemple, de $A > B$ et $B > C$ résulte $A > C$, de $A > B$ résulte $A + C > B + C$.

Une grandeur A peut être divisée en n parties égales, c'est-à-dire qu'il existe une grandeur A_1, telle que A est égale à la somme de

n grandeurs égales à A_1. On dit que A_1 est la $n^{\text{ième}}$ partie de A et l'on écrit

$$A_1 = \frac{A}{n}, \qquad \text{ou} \qquad A = n\,A_1.$$

Étant données deux grandeurs A, B, il y a un entier p tel que la grandeur pB est plus grande que A (axiome d'Archimède).

On en déduit qu'étant données deux grandeurs A, B, on peut trouver un entier n tel que $\frac{A}{n}$ soit inférieure à B. En effet, prenons n tel que la grandeur nB soit plus grande que A. La grandeur $A' = \frac{A}{n}$ est inférieure à B, car, si l'on avait $A' \geq B$, la somme de n grandeurs égales à A', c'est-à-dire A, serait, d'après les hypothèses relatives à l'addition des inégalités entre grandeurs, supérieure ou égale à la grandeur nB, contrairement au fait que $nB > A$.

38. *Comparaison de deux grandeurs de même espèce.* — Soient A et B deux grandeurs de même espèce. Prenons un entier n et considérons les grandeurs $\frac{B}{n}$, $2\frac{B}{n}$, $3\frac{B}{n}$, ... Nous admettons (axiome d'Archimède) qu'il existe des grandeurs de cette suite supérieures à A. Alors, ou bien A est égale à une des grandeurs de la suite, ou bien est comprise entre deux grandeurs consécutives. En tout cas, il y a un entier p tel que l'on a

$$p\frac{B}{n} \leq A < (p+1)\frac{B}{n}.$$

Les nombres fractionnaires $\frac{p}{n}$, $\frac{p+1}{n}$ ainsi définis sont dits *mesures approchées de* A *à* $\frac{1}{n}$ *près, par défaut et par excès, quand on prend* B *pour unité.*

Faisons $n = 1, 2, 3, \ldots$; considérons l'ensemble α des mesures approchées par défaut et l'ensemble β des mesures approchées par excès. Ces ensembles possèdent les propriétés suivantes :

1° Tout nombre $\frac{p}{n}$ de α est inférieur ou égal à tout nombre $\frac{q}{n'}$ de β. En effet, on a

$$p\,\frac{B}{n} \leq A < q\,\frac{B}{n'}.$$

Si nous divisons B en nn' parties égales, la grandeur $p\frac{B}{n}$ est égale

à pn' de ces parties, la grandeur $q\frac{B}{n'}$ est égale à qn de ces parties. La seconde étant plus grande que la première, on a $qn > pn'$, c'est-à-dire $\frac{p}{n} < \frac{q}{n'}$.

2° Quel que soit le nombre positif ε, il existe un nombre de α et un nombre de β différant entre eux de moins de ε.

En effet, le nombre $\frac{p}{n}$ de α et le nombre $\frac{p+1}{n}$ de β diffèrent de $\frac{1}{n}$, qui est inférieur à ε si l'on a $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

De ces deux propriétés résulte (n° 17, p. 11) qu'*il y a un nombre déterminé* λ *qui est borne supérieure de l'ensemble des mesures approchées par défaut et borne inférieure de l'ensemble des mesures approchées par excès.* Ce nombre λ est dit la *mesure exacte de* A *quand on prend* B *pour unité* ou encore le *rapport de* A *à* B.

39. Plaçons-nous à un point de vue en quelque sorte réciproque. Dans l'espèce de grandeurs considérée, choisissons-en une U que nous appellerons *unité*. On peut former des grandeurs égales à U, 2U, ..., pU, ... et à $\frac{U}{1}$, $\frac{U}{2}$, ..., $\frac{U}{n}$, ...

Formons la grandeur égale à p fois la grandeur $\frac{U}{n}$; sa mesure est $\frac{p}{n}$, et nous pouvons la désigner par $\frac{p}{n}$U.

Remarquons que, si $\frac{p}{n} = \frac{p'}{n'}$, les grandeurs $\frac{p}{n}$U et $\frac{p'}{n'}$U sont identiques, car toutes deux sont égales à $pn' = p'n$ fois la grandeur $\frac{U}{nn'}$. Si l'on a $\frac{p}{n} < \frac{p'}{n'}$, la grandeur $\frac{p}{n}$U est plus petite que la grandeur $\frac{p'}{n'}$U, car la première est égale à pn' fois, la seconde à $p'n$ fois la grandeur $\frac{U}{nn'}$.

En résumé, à tout nombre positif rationnel α correspond une grandeur de mesure α, et ces grandeurs sont entre elles dans le même ordre de grandeur relatif que les nombres qui les mesurent.

Soit maintenant λ un nombre positif irrationnel. Soit G_1 l'ensemble des grandeurs mesurées par les nombres rationnels inférieurs à λ, et soit G_2 l'ensemble des grandeurs mesurées par les nombres rationnels supérieurs à λ.

D'après ce qui précède, toute grandeur G_1 est plus petite que toute

grandeur G_2. De plus, soit B une grandeur de l'espèce considérée : on peut trouver une grandeur G_1 et une grandeur G_2 telles que la grandeur différence $G_2 - G_1$ soit inférieure à B. En effet, prenons un entier n tel que $\frac{U}{n} < B$; soit $\frac{p}{n}$ la valeur approchée de λ à $\frac{1}{n}$ près par défaut. Les deux grandeurs $\frac{p}{n}U$ et $\frac{p+1}{n}U$ font partie, la première de G_1, la seconde de G_2, et ont pour différence $\frac{U}{n}$, inférieure à B.

Supposons qu'il existe une grandeur G mesurée par le nombre irrationnel λ. Soient n un entier et $\frac{p}{n}$ la valeur approchée de λ à $\frac{1}{n}$ près par défaut. Les grandeurs $\frac{U}{n}$, $2\frac{U}{n}$, ..., $p\frac{U}{n}$, qui sont parmi les grandeurs G_1, sont plus petites que G, car $\frac{p}{n}$ est la mesure approchée de G à $\frac{1}{n}$ près par défaut. Au contraire, les grandeurs $\frac{p+1}{n}U$, $\frac{p+2}{n}U$, ..., qui sont parmi les grandeurs G_2, sont plus grandes que G. Donnons à n toutes les valeurs entières; nous obtiendrons, d'une part, toutes les grandeurs G_1, d'autre part, toutes les grandeurs G_2 : ainsi G est supérieure aux premières et inférieure aux secondes.

Il ne peut exister deux grandeurs G et G′ différentes satisfaisant à la condition d'être supérieures à toutes les grandeurs G_1, inférieures à toutes les grandeurs G_2. En effet, soit $G < G'$: toute grandeur G_2 devant être plus grande que G′, et toute grandeur G_1 devant être plus petite que G, toute grandeur $G_2 - G_1$ serait au moins égale à la grandeur $G' - G$, ce qui contredirait un résultat précédent.

Axiome de continuité. — Nous supposons que l'espèce de grandeurs considérée satisfait aux conditions du n° 37 et en outre à cette nouvelle condition : *Il existe effectivement une grandeur* G, *supérieure à toutes les grandeurs* G_1 *et inférieure à toutes les grandeurs* G_2, *c'est-à-dire une grandeur* G *mesurée par le nombre irrationnel* λ.

Dans ces conditions, tout nombre positif est la mesure d'une grandeur de l'espèce considérée, et ces grandeurs sont entre elles dans le même ordre de grandeur relatif que leurs mesures.

De telles grandeurs sont dites *grandeurs continues mesurables*.

40. *Une unité* U *étant fixée, la somme de deux grandeurs con-*

tinues mesurables G, G' a pour mesure la somme des nombres λ et λ' qui mesurent G et G'.

Le fait a lieu quand λ et λ' sont rationnels, car, si l'on réduit au même dénominateur les valeurs de λ et λ', soient $\lambda = \frac{p}{n}$, $\lambda' = \frac{p'}{n}$, la grandeur G est égale à p fois la grandeur $\frac{U}{n}$, la grandeur G' est égale à p' fois la grandeur $\frac{U}{n}$. G + G' est donc égale à $(p + p')$ fois la grandeur $\frac{U}{n}$; donc sa mesure est $\frac{p + p'}{n} = \lambda + \lambda'$.

Supposons maintenant λ et λ' quelconques. Prenons des nombres rationnels α, β, α', β' tels que $\alpha < \lambda < \beta$, $\alpha' < \lambda' < \beta'$.

Soient A et A' les grandeurs mesurées par α et α'. On a

$$A < G, \qquad A' < G',$$

d'où

$$A + A' < G + G'.$$

Donc la mesure μ de G + G' est supérieure à la mesure de A + A', qui est $\alpha + \alpha'$. De même on montre que μ est inférieure à $\beta + \beta'$. Les nombres $\lambda + \lambda'$ et μ sont compris entre $\alpha + \alpha'$ et $\beta + \beta'$, dont la différence peut être rendue aussi petite que l'on veut. On a donc

$$\mu = \lambda + \lambda'.$$

La proposition s'étend au cas d'un nombre quelconque de grandeurs.

Il en résulte aussi que, si l'on a deux grandeurs G et G', telles que G < G', mesurées par les nombres λ et λ', le nombre qui mesure G' — G est égal à $\lambda' - \lambda$.

41. Remarquons que les nombres positifs possèdent toutes les propriétés des grandeurs continues mesurables.

Soient deux nombres positifs a et b. *Le rapport de a à b est le quotient* $\frac{a}{b}$. En effet, d'abord la $n^{ième}$ partie de b, devant être un nombre qui, multiplié par n, reproduise b, est $\frac{b}{n}$. La mesure approchée par défaut de a à $\frac{1}{n}$ près, b étant l'unité, est le nombre $\frac{p}{n}$, tel que

$$p\frac{b}{n} \leq a < (p+1)\frac{b}{n};$$

on en déduit

$$\frac{p}{n} \leq \frac{a}{b} < \frac{p+1}{n}.$$

Cette double inégalité montre que $\frac{a}{b}$ est la borne supérieure des nombres $\frac{p}{n}$ et la borne inférieure des nombres $\frac{p+1}{n}$. Donc $\frac{a}{b}$ est la mesure exacte de a quand on prend b pour unité, ou encore le rapport de a à b.

12. *Grandeurs proportionnelles.* — Supposons qu'on ait deux grandeurs variables A, B, d'espèces différentes ou non, mais toutes deux continues mesurables et se correspondant de telle manière que :

1° A deux états identiques de A correspondent deux états identiques de B;

2° A la somme de deux états de A correspond la somme des deux états correspondants de B.

Soient A_1, A_2 deux états de A, et soit $A_1 > A_2$. Les états correspondants B_1 et B_2 de B sont tels que l'on a $B_1 > B_2$. En effet, il existe une grandeur $A_1 - A_2$ telle que A_1 est la somme de $A_1 - A_2$ et de A_2. A cette grandeur doit correspondre un état de B qui, ajouté à B_2, donne B_1, on a donc $B_1 > B_2$.

Cela posé, prenons, parmi les grandeurs A, un état de grandeur déterminé A_1 pour unité. Prenons pour unité, dans les grandeurs B, la grandeur B_1 qui correspond à A_1. Remarquons qu'à $\frac{A_1}{n}$, n étant entier, correspond une grandeur B'_1 qui, multipliée par n, doit donner B_1, correspondant à A_1; donc $B'_1 = \frac{B_1}{n}$; donc à $\frac{A_1}{n}$ correspond $\frac{B_1}{n}$ et à $p\frac{A_1}{n}$ correspond $p\frac{B_1}{n}$, quels que soient les entiers p et n.

Soient A_2 un état de la grandeur A, λ sa mesure, B_2 l'état correspondant de B. Je dis que la mesure de B_2, lorsqu'on prend B_1 pour unité, est λ.

Pour montrer que ces deux mesures exactes sont égales, il suffit de montrer que les mesures approchées à $\frac{1}{n}$ près par défaut sont égales, quel que soit n. La mesure approchée à $\frac{1}{n}$ près par défaut de A_2 est le nombre $\frac{p}{n}$, tel que

$$\frac{p}{n} A_1 \leqq A_2 < \frac{p+1}{n} A_1.$$

De là résulte, pour les grandeurs correspondantes,

$$\frac{p}{n} B_1 \leqq B_2 < \frac{p+1}{n} B_1.$$

Donc $\frac{p}{n}$ est la mesure approchée à $\frac{1}{n}$ près par défaut de B_2.

Ainsi, deux états correspondants des grandeurs A et B ont même mesure. En d'autres termes, *le rapport de deux états de grandeur* A *est égal au rapport des deux états de grandeur* B *correspondants*. On dit que les grandeurs A et B *varient proportionnellement ou sont proportionnelles*.

13. *Changement d'unité*. — Soit une grandeur A variable. Faisons choix d'une unité U dans cette espèce de grandeurs, et soit a la mesure de A. A et a sont deux grandeurs qui se correspondent. Elles sont proportionnelles, car à deux états identiques de A correspondent deux mesures égales, et à la somme de deux états de A correspond pour a la somme des mesures de ces deux états. Par suite, si nous désignons par A_1 et A_2 deux états de A, par a_1 et a_2 les nombres qui les mesurent, le rapport de A_2 à A_1 est égal au rapport de a_2 à a_1, c'est-à-dire au quotient $\frac{a_2}{a_1}$. On peut donc écrire

$$\text{Rapport de } A_2 \text{ à } A_1 = \frac{\text{rapport de } A_2 \text{ à } U}{\text{rapport de } A_1 \text{ à } U}.$$

C'est le *théorème du changement d'unité*.

X. — Relations entre l'Analyse et la Géométrie.

14. Les généralités qui viennent d'être établies sur les grandeurs concrètes s'appliquent en particulier aux grandeurs étudiées en Géométrie, par exemple aux longueurs rectilignes, aux angles, aux aires polygonales. De même, sur un cercle déterminé, et indépendamment de la notion de longueur de la circonférence, on peut définir l'égalité de deux arcs, un arc somme de deux autres; cela suffit pour que l'on puisse considérer la grandeur arc de cercle sur un cercle déterminé comme continue mesurable.

La notion de rapport de deux grandeurs de même espèce, le théorème des grandeurs proportionnelles sont utilisés dans des théorèmes fondamentaux de la Géométrie, à savoir le théorème sur la mesure des angles au centre, le théorème des segments interceptés par deux sécantes sur des parallèles, les théorèmes relatifs à la mesure des aires des rectangles ayant une dimension commune, des volumes des parallélépipèdes ayant deux dimensions communes. Toutes les

relations de la Géométrie qu'on peut appeler *métriques*, c'est-à-dire où interviennent des rapports de grandeurs de même espèce, s'appuient sur ces théorèmes fondamentaux.

Quand on démontre, par exemple, que le rapport de deux angles au centre est égal au rapport des arcs correspondants, le théorème des grandeurs proportionnelles établit le fait dans toute sa généralité une fois qu'on a démontré par voie purement géométrique que les deux conditions fondamentales de la proportionnalité sont réalisées.

En résumé, toute la Géométrie élémentaire est fondée sur ses méthodes propres et sur le théorème des grandeurs proportionnelles.

On voit le rôle que jouent en Géométrie les nombres rationnels et irrationnels arithmétiques. Les nombres négatifs ou nuls interviennent ensuite quand on introduit les notions d'axe, de segment dirigé, de sens de rotation, etc.

Nous avons fait remarquer plus haut que la théorie de la mesure des grandeurs permet de comparer deux arcs d'un même cercle, mais non pas deux arcs sur des cercles différents, ou un arc de cercle et un segment rectiligne. Pour arriver à effectuer cette comparaison, il faut définir la longueur de la circonférence. Les raisonnements faits en Géométrie pour définir la longueur d'une circonférence peuvent se résumer ainsi : on démontre que, si l'on considère d'une part tous les polygones réguliers inscrits possibles, dont on désigne les périmètres par p, d'autre part tous les polygones réguliers circonscrits possibles, dont on désigne les périmètres par P,

1° Tout nombre p est plus petit que tout nombre P;

2° On peut trouver deux nombres p et P dont la différence soit inférieure à un nombre donné ε.

On appelle *longueur de la circonférence* le nombre déterminé l qui est borne supérieure de l'ensemble des nombres p et borne inférieure de l'ensemble des nombres P.

La longueur d'une circonférence, et par suite celle d'un arc de circonférence, étant une notion acquise, on définit les fonctions sinus et cosinus, à l'aide desquelles on construit la Trigonométrie.

Enfin, la Géométrie analytique, considérée à ce point de vue, est un ensemble de théorèmes et de propriétés qui sont des combinaisons de certaines relations métriques.

En résumé, la Géométrie, la Trigonométrie, la Géométrie analytique utilisent l'Arithmétique et l'Analyse pour l'étude des propriétés géométriques. Réciproquement, la Géométrie est utile pour l'Analyse de plusieurs manières. Elle fournit des représentations simples de

résultats analytiques, souvent aussi un langage rapide et commode. Enfin, elle montre l'existence de certaines fonctions simples, comme les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, qui, comme nous le verrons, jouent un rôle important en Analyse pure.

45. Si l'on considère un système de deux variables x, y, on sait comment, en coordonnées cartésiennes par exemple, on fait correspondre à tout système (x, y) un point du plan. Cette représentation est utile, soit que l'on considère une des variables, y, par exemple, comme fonction de x, soit que l'on considère les deux variables comme indépendantes. On a des résultats analogues quand il s'agit de trois variables x, y, z, soit que z soit fonction de x et y, soit que les trois variables soient indépendantes.

Par une extension de langage souvent commode, on fait la convention suivante : n étant un entier quelconque, supérieur ou non à 3, on dit qu'un système de valeurs attribuées à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constitue un point de l'*espace à n dimensions* G_n. Cet espace est l'ensemble de tous les points ainsi conçus.

On appelle *sphère de centre* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et de rayon ρ, dans l'espace à n dimensions, l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que l'on a

$$\Sigma (x_i - a_i)^2 = \rho^2.$$

L'intérieur de la sphère est l'ensemble des points pour lesquels on a

$$\Sigma (x_i - a_i)^2 < \rho^2.$$

46. *Ensembles de points* — Dans l'espace à n dimensions, on dit qu'un ensemble de points est *borné* si l'ensemble des valeurs des coordonnées de tous ses points est borné.

On dit qu'*une suite de points* $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ *tend vers le point limite* A_0 *si chacune des coordonnées de* A_p *tend vers la coordonnée correspondante de* A_0. On reconnaît que cette propriété peut encore se traduire par le fait suivant : quel que soit $\rho > 0$, les points de la suite $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ sont, quand p dépasse une certaine valeur, compris à l'intérieur de la sphère de centre A_0 et de rayon ρ.

Dans l'espace à n dimensions G_n, on dit qu'un ensemble de points E est *fermé* si, étant donnée une suite de points quelconques de E,

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p, \quad \ldots,$$

ayant pour limite un point A_0, ce point A_0 fait partie de E. Par

exemple, dans l'espace à une dimension, un intervalle (a, b), *extrémités comprises*, constitue un ensemble fermé. Au contraire, l'ensemble des valeurs de x telles que $a < x \leqq b$ n'est pas fermé, car on peut prendre une suite de valeurs de x de l'intervalle tendant vers a, qui ne fait pas partie de l'ensemble.

L'intervalle $(a \leqq x < +\infty)$ est un ensemble fermé.

Étant donnée une circonférence dans un plan, l'ensemble des points intérieurs et des points situés sur la courbe est un ensemble fermé. Au contraire, l'ensemble des points intérieurs à la circonférence n'est pas fermé.

47. *Si, dans l'espace à n dimensions constitué par les variables x, y,..., un ensemble de points* E, *borné, contient une infinité de points, il y a au moins un point* A_0, *de coordonnées* x_0, y_0, ..., *tel que, quel que soit* ε *positif, le champ*

$$|x - x_0| \leqq \varepsilon, \qquad |y - y_0| \leqq \varepsilon, \qquad \ldots$$

contient une infinité de points de E.

Comme E est borné, on peut trouver un champ C

$$a \leqq x \leqq a', \qquad b \leqq y \leqq b', \qquad \ldots,$$

contenant tous les points de E. Partageons C en 2^n champs partiels, chacun d'eux s'obtenant en remplaçant l'intervalle de variation (a, a') de x, soit par $\left(a, \frac{a+a'}{2}\right)$, soit par $\left(\frac{a+a'}{2}, a'\right)$, et opérant de même pour les autres variables y,.... L'un au moins de ces champs contient une infinité de points de E. Soit C_1 un tel champ :

$$a_1 \leqq x \leqq a'_1, \qquad b_1 \leqq y \leqq b'_1, \qquad \ldots;$$

on a les relations

$$a \leqq a_1 < a'_1 \leqq a', \qquad b \leqq b_1 < b'_1 \leqq b', \qquad \ldots,$$

$$a'_1 - a_1 = \frac{a'-a}{2}, \qquad b'_1 - b_1 = \frac{b'-b}{2}, \qquad \ldots.$$

En opérant sur C_1 comme sur C, et répétant indéfiniment l'opération, on a une suite de champs

$$C_1, \qquad C_2, \qquad \ldots, \qquad C_p, \qquad \ldots,$$

dont chacun contient une infinité de points de E.

Soient a_p, a'_p; b_p, b'_p, ... les nombres qui jouent relativement à C_p

le rôle que jouent a, a', b, b', ... relativement à C ; on a

$$a \leq a_1 \leq \ldots \leq a_p \leq \ldots,$$
$$a' \geq a'_1 \geq \ldots \geq a'_p \geq \ldots,$$
$$a'_p - a_p = \frac{a' - a}{2^p}.$$

On a pour b_p, b'_p, ... des relations analogues.

D'après cela, quand p croît indéfiniment, a_p et a'_p ont une limite commune x_0 ; b_p et b'_p ont une limite commune y_0, etc.

Le point $(x_0, y_0, \ldots)$ ainsi obtenu est tel que, quel que soit ε positif, quand p dépasse une certaine valeur, a_p et a'_p sont compris dans l'intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, b_p et b'_p dans l'intervalle $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, ..., c'est-à-dire que le champ

$$|x - x_0| < \varepsilon, \qquad |y - y_0| < \varepsilon, \quad \ldots$$

contient le champ C_p, par suite contient une infinité de points de E.

48. *Étant donnée, dans l'espace à n dimensions G_n, une suite de points*

(1) $$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p, \quad \ldots$$

distincts ou non, et dont l'ensemble est borné, on peut en extraire une suite de points

$$A_{\alpha_1}, \quad A_{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad A_{\alpha_h}, \quad \ldots,$$

d'indices croissants, tendant vers un point limite A_0.

En effet, deux cas sont possibles :

1° Les points distincts de (1) sont en nombre fini. Alors l'un d'eux au moins est répété une infinité de fois. Il sera, par exemple, aux rangs α_1, α_2, ..., α_h, ... La suite A_{α_1}, A_{α_2}, ..., A_{α_h}, ... a un point limite, savoir ce point lui-même.

2° Il y a dans (1) une infinité de points distincts. Soit E leur ensemble. Donnons-nous une suite de nombres positifs tendant vers zéro : ε_1, ε_2, ..., ε_h, ... D'après le n° 47, il existe un point A_0 de coordonnées $(x_0, y_0, \ldots)$ tel que, quel que soit ε_h, le champ C_h

$$|x - x_0| < \varepsilon_h, \qquad |y - y_0| < \varepsilon_h, \quad \ldots$$

contient une infinité de points de E.

En particulier, le champ C_1 contient une infinité de points de E. Soit A_{α_1} l'un d'eux. Le champ C_2 contient une infinité de points de E ;

par conséquent il contient une infinité de points de la suite (1) parmi ceux qui suivent A_{α_1}. Soit A_{α_2} l'un de ces points. C_3, contenant une infinité de points de E, contient une infinité de points parmi ceux qui suivent A_{α_2}. Soit A_{α_3} l'un d'eux. En poursuivant le raisonnement, on obtient une suite A_{α_1}, A_{α_2}, ..., A_{α_h}, ..., d'indices croissants. De plus, quel que soit h, le point A_{α_h} est contenu dans le champ C_h. Comme ε_h tend vers zéro, les coordonnées x, y, ... de A_{α_h} tendent vers x_0, y_0, ..., de sorte que le point A_{α_h} tend vers le point A_0.

49. *Notion de domaine.* — Des exemples tirés de la Géométrie montrent que l'on peut, dans certains cas, donner un sens précis à l'expression suivante : partager le plan en deux régions séparées par une courbe frontière. Par exemple, en se donnant une ellipse, on sait définir la région intérieure I et la région extérieure E. De même, étant donnée une parabole, on sait distinguer la région I qui contient le foyer de la région E qui ne le contient pas.

Un tel partage satisfait aux conditions suivantes : les points du plan sont répartis en trois catégories, I, E, F (F comprenant les points de la courbe). De tout point de I comme centre, on peut décrire un cercle dont tous les points font partie de I. De tout point de E comme centre, on peut décrire un cercle dont tous les points font partie de E. Si A est un point de la courbe frontière F, un cercle quelconque de centre A contient des points de I et des points de E.

D'une manière générale, dans l'espace à n dimensions G_n, supposons que l'on ait pu répartir les points de G_n en trois catégories, I, E, F, dans les conditions suivantes :

Si A est un point de F, toute sphère de centre A contient des points de I et des points de E. Réciproquement, un point A tel que toute sphère de centre A contient des points de I et des points de E est un point de F.

Si B est un point de I, une sphère de centre B et de rayon suffisamment petit ne contient que des points de I.

Si C est un point de E, une sphère de centre C et de rayon suffisamment petit ne contient que des points de E.

Les exemples donnés plus haut montrent que ces conditions peuvent être effectivement réalisées. Toutes les fois qu'elles le seront, nous dirons que l'ensemble des points de I et de F constitue un *domaine*. Les points de I sont les points *intérieurs au domaine*, les points de F en constituent *la frontière*, ceux de E sont *extérieurs*.

Le domaine D constitué par la réunion de I et de F est un ensemble

fermé. En effet, soit une suite de points de D, A_1, A_2, ..., A_p, ..., ayant un point limite A_0. Ce point A_0 ne peut faire partie de E, car, s'il en faisait partie, on pourrait trouver une sphère de centre A_0 dont tous les points feraient partie de E. Le point A_p, pour p assez grand, ferait partie de E, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

La frontière F est un ensemble *fermé*, car, si une suite de points de F, A_1, A_2, ..., A_p, ..., a pour limite un point A_0, toute sphère Σ de centre A_0 contient à son intérieur des points de la suite; si A_p est un tel point, on peut trouver une sphère Σ' de centre A_p contenue dans Σ, et, comme A_p fait partie de F, Σ' contient des points de I et de E; donc il en est de même de Σ. Donc A_0 fait partie de F.

Si A *est un point intérieur au domaine,* B *un point extérieur, le segment de droite* AB *contient au moins un point de la frontière.*

En effet, de A comme centre, décrivons une sphère de rayon $\rho < AB$; elle coupe AB en un point C. Si ρ est assez petit, le segment AC ne contient que des points de I. Soit β la borne supérieure des nombres ρ tels que cette condition est remplie, et soit H le point de AB tel que $AH = \beta$. Tout point de AB situé entre A et H fait partie de I, tandis que, si H' est un point situé entre H et B, il y a entre H et H' des points de E ou F. Il en résulte qu'une sphère de centre H contient toujours des points de I et des points de E. Donc H est un point de F.

On dit qu'un domaine est *borné* lorsque l'ensemble des points dont il se compose est borné.

Un champ, borné ou non, constitue un domaine.

XI. — Infiniment petits et infinis.

50. Une quantité variable qui tend vers zéro est dite un *infiniment petit*. Si α et β tendent simultanément vers zéro, et s'il y a un nombre k tel que $\frac{\beta}{\alpha^k}$ tend vers un nombre fini et différent de zéro lorsque α tend vers zéro, on dit que β est infiniment petit d'ordre k par rapport à α. Deux infiniment petits α, β sont *équivalents*, si leur rapport tend vers 1 quand α tend vers zéro. Dans l'étude de la limite d'un rapport d'infiniment petits, on peut remplacer chacun d'eux par un infiniment petit équivalent. En effet, si α, α' d'une part, β, β' de l'autre

sont équivalents, on peut écrire

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'} \times \frac{\alpha'}{\alpha} \times \frac{\beta}{\beta'},$$

et, comme $\frac{\alpha'}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\beta'}$ ont pour limite un, si l'un des rapports $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\beta'}{\alpha'}$ a une limite, l'autre a la même limite.

L'inverse d'une quantité infiniment petite tend en valeur absolue vers $+\infty$ et est dit un *infiniment grand* ou un *infini*. Étant donnés deux infiniment grands α, β, s'il y a un nombre k tel que $\frac{\beta}{\alpha^k}$ a une limite finie et différente de zéro quand α grandit indéfiniment, on dit que β est infiniment grand d'ordre k par rapport à α. De même, deux infiniment grands sont équivalents si leur rapport a pour limite un.

XII. — Théorèmes sur les fonctions continues.

51. *Nouvelle définition de la continuité.* — Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction de n variables définie en tous les points d'un domaine D de l'espace G_n. Soit A_0 un point de ce domaine. La première définition de la continuité en A_0 (n° 25, p. 21) est celle-ci : pour toute suite de points $A_1, \ldots, A_p, \ldots$ de D, tendant vers A_0, on a

$$\lim f(A_p) = f(A_0).$$

Seconde définition. — *La fonction f est continue au point A_0 du domaine D si, à tout nombre ε positif, on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour tout point $(x, y, \ldots)$ du domaine, les conditions*

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \alpha, \qquad \ldots$$

entraînent

$$|f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon.$$

Nous allons montrer que cette seconde définition est équivalente à la première. En effet, supposons d'abord que la fonction satisfasse aux conditions de la première définition. Donnons-nous une suite de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ tendant vers zéro. Si la fonction ne satisfait pas à la seconde définition, c'est que, pour un certain nombre ε' positif, quel que soit α_p, on peut trouver un point $A_p(x_p, y_p, \ldots)$ tel que l'on ait

$$(1) \qquad |x_p - x_0| < \alpha_p, \qquad |y_p - y_0| < \alpha_p, \qquad \ldots$$

en même temps que

$$(2) \qquad |f(x_p, y_p, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| > \varepsilon.$$

Donnons à p les valeurs 1, 2, 3, ... On détermine ainsi une suite de points A_1, A_2, ..., A_p, ... qui a pour limite A_0 d'après les inégalités (1) et d'après le fait que α_p tend vers zéro. On doit donc avoir

$$\lim f(A_p) = f(A_0),$$

ce qui contredit l'inégalité (2). Ainsi la première définition entraîne la seconde.

Réciproquement, partons de la seconde définition.

Soit une suite de points

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p, \quad \ldots$$

tendant vers A_0 et soit ε un nombre positif. Déterminons α par la condition de l'énoncé de la seconde définition. Quand p dépasse une certaine valeur, on a

$$|x_p - x_0| < \alpha, \qquad |y_p - y_0| < \alpha, \qquad \ldots,$$

d'où résulte, d'après la seconde définition,

$$|f(x_p, y_p, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon;$$

comme ε est arbitraire, cela signifie que

$$\lim f(A_p) = f(A_0),$$

c'est-à-dire qu'en partant de la seconde définition nous retrouvons la première.

De la seconde définition on déduit que les bornes supérieure et inférieure des valeurs de la fonction dans le champ

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \alpha, \qquad \ldots$$

tendent vers $f(x_0, y_0, \ldots)$ quand α tend vers zéro.

52. *Continuité uniforme. — Si $f(x, y, \ldots)$ est une fonction définie en tous les points d'un domaine borné* D *et continue en tous les points de ce domaine, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, pour deux points quelconques $(x, y, \ldots)$, $(x', y', \ldots)$ du domaine, les conditions*

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha, \qquad \ldots$$

entraînent

$$|f(x, y, \ldots) - f(x', y', \ldots)| < \varepsilon.$$

Donnons-nous une suite de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots$ tendant vers zéro. Si la proposition est inexacte, il y a un nombre positif ε' tel que, quel que soit α_p, on peut trouver un couple de points $A_p(x_p, y_p, \ldots)$, $A'_p(x'_p, y'_p, \ldots)$ vérifiant les conditions

$$|x_p - x'_p| < \alpha_p, \qquad |y_p - y'_p| < \alpha_p, \quad \ldots$$

avec

$$|f(A_p) - f(A'_p)| \geq \varepsilon'.$$

Faisons successivement $p = 1, 2, 3, \ldots$, nous obtenons une suite de couples de points (A_p, A'_p). De la suite $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$, dont l'ensemble est borné, nous pouvons (n° 48, p. 43) extraire une suite

$$A_{\gamma_1}, \quad A_{\gamma_2}, \quad \ldots, \quad A_{\gamma_h}, \quad \ldots$$

tendant vers un point limite A_0. Ce point A_0 fait partie du domaine, puisque celui-ci est un ensemble fermé.

La suite de points correspondants

$$A'_{\gamma_1}, \quad A'_{\gamma_2}, \quad \ldots, \quad A'_{\gamma_h}, \quad \ldots$$

a aussi pour limite A_0, car, si l'on considère, par exemple, la coordonnée x, on a

$$|x_{\gamma_h} - x'_{\gamma_h}| < \alpha_{\gamma_h}.$$

Or α_{γ_h} tend vers zéro. Donc x'_{γ_h} a même limite que x_{γ_h}.

On déduit de là, en vertu de la continuité de la fonction,

$$\lim f(A_{\gamma_h}) = f(A_0), \qquad \lim f(A'_{\gamma_h}) = f(A_0),$$

d'où

$$\lim |f(A_{\gamma_h}) - f(A'_{\gamma_h})| = 0.$$

Mais ceci est en contradiction avec le fait que l'on a toujours

$$|f(A_{\gamma_h}) - f(A'_{\gamma_h})| \geq \varepsilon'.$$

On exprime la propriété obtenue en disant que *la continuité est uniforme*. On en tire la conséquence suivante. *Soit* $\alpha > 0$; *si l'on considère tous les couples de points* $A(x, y, \ldots)$, $A'(x', y', \ldots)$ *tels que* $|x - x'| < \alpha$, $|y - y'| < \alpha$, $\ldots$, *la borne supérieure* β *des nombres* $|f(x, y, \ldots) - f(x', y', \ldots)|$ *tend vers zéro avec* α.

53. *Une fonction continue dans un domaine borné est bornée et atteint chacune de ses bornes.*

Soit M la borne supérieure des valeurs de la fonction f dans le domaine, ou plus brièvement la borne supérieure de f. Prenons une suite de nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \ldots$ inférieurs à M et tendant vers M.

A chaque entier p nous pouvons faire correspondre un point X_p du domaine tel que l'on ait $f(X_p) > \lambda_p$. De la suite de points $X_1, X_2, \ldots, X_p, \ldots$ ainsi obtenue, extrayons (n° 48) une suite $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots, X_{\alpha_h}, \ldots$ tendant vers un point limite X_0. Ce point X_0 fait partie du domaine qui est un ensemble fermé. On a donc $\lim f(X_{\alpha_h}) = f(X_0)$.

D'autre part, on a

$$\lambda_{\alpha_h} < f(X_{\alpha_h}) \leqq M,$$

d'où, comme λ_{α_h} tend vers M,

$$f(X_0) = \lim f(X_{\alpha_h}) = M.$$

Cela montre :

1° que la borne supérieure M est un nombre fini ;

2° que cette borne supérieure est atteinte en un point du domaine.

On montrerait de même que la fonction est bornée inférieurement et atteint en un point sa borne inférieure.

54. *Si $f(x)$ est une fonction d'une variable x, continue dans l'intervalle borné (a, b), elle prend, au moins une fois, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Supposons, pour fixer les idées, $f(a) < f(b)$, et soit λ tel que

$$f(a) < \lambda < f(b).$$

Considérons l'ensemble des nombres x de l'intervalle (a, b) pour lesquels on a $f(x) \leqq \lambda$. Cet ensemble contient a et ne contient pas b. Soit c sa borne supérieure. Quel que soit ε positif, l'intervalle $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ contient à la fois des nombres pour lesquels on a $f(x) \leqq \lambda$, à savoir certains nombres $< c$, et des nombres pour lesquels on a $f(x) > \lambda$, à savoir les nombres $> c$ de l'intervalle $(c, c + \varepsilon)$. Donc les bornes supérieure et inférieure de la fonction dans cet intervalle comprennent entre elles le nombre λ. Mais ces deux bornes tendent vers $f(c)$ quand ε prend une suite de valeurs tendant vers zéro (n° 51, p. 47). On a donc

$$f(c) = \lambda.$$

On voit ainsi qu'*une fonction continue ne peut passer d'une*

valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.

55. *Fonction croissante ou décroissante.* — Une fonction d'une variable x, définie, soit pour toutes, soit seulement pour certaines valeurs d'un intervalle, est dite *constamment croissante*, si pour deux valeurs x, x' on a toujours

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} > 0.$$

Elle est dite *constamment décroissante* si l'on a

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} < 0.$$

Une fonction constamment croissante ou décroissante ne peut prendre qu'une fois, dans un intervalle, une valeur donnée.

56. *Une fonction f constamment croissante ou constamment décroissante dans un intervalle borné (a, b), qui prend une fois toute valeur de l'intervalle (m, M), m et M étant les bornes inférieure et supérieure des valeurs de f dans l'intervalle, est continue pour toute valeur de l'intervalle (a, b).*

Supposons, par exemple, la fonction f croissante. Soit x_0 une valeur de l'intervalle, que nous prendrons d'abord distincte de a et b. $f(x_0)$ est compris entre m et M et est distinct de ces deux nombres. Prenons un nombre ε positif et tel que $f(x_0) - \varepsilon$, $f(x_0) + \varepsilon$ appartiennent à l'intervalle (m, M). Par hypothèse, la fonction prend la valeur $f(x_0) - \varepsilon$ pour un certain nombre x_1, qui doit être inférieur à x_0; de même, elle prend la valeur $f(x_0) + \varepsilon$ pour une valeur x_2 supérieure à x_0. Pour toutes les valeurs de x telles que $x_1 < x < x_2$, $f(x)$ est compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$, c'est-à-dire entre $f(x_0) - \varepsilon$ et $f(x_0) + \varepsilon$. Si α est le plus petit des nombres $x_2 - x_0$ et $x_0 - x_1$, la condition $|x - x_0| < \alpha$ entraîne $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, c'est-à-dire que la fonction est continue.

Si $x_0 = a$, on a $f(a) = m$. Le raisonnement s'applique en considérant seulement les inégalités de droite.

Si $x_0 = b$, on conserve seulement les inégalités de gauche.

Enfin, une démonstration analogue s'applique au cas où la fonction est décroissante.

57. *Fonctions inverses.* — Soit $X = f(x)$ une fonction continue dans un intervalle borné (a, b), toujours croissante ou toujours décroissante dans cet intervalle. Soient m et M les bornes inférieure et supérieure des valeurs de la fonction dans cet intervalle. Comme $f(x)$ est continue et varie toujours dans le même sens, elle prend, une fois et une seule, toute valeur comprise entre m et M. Donc, étant donné un nombre X tel que

$$m \leq X \leq M,$$

il existe un nombre x de l'intervalle (a, b), et un seul, tel que

$$f(x) = X.$$

On peut donc considérer x comme une fonction de X, définie dans l'intervalle (m, M). On pose $x = \varphi(X)$ et l'on dit que $x = \varphi(X)$ est la fonction *inverse* de $X = f(x)$. φ est croissante ou décroissante suivant que f est croissante ou décroissante. En effet, si f est, par exemple, croissante, des deux conditions $x_0 < x_1$, $f(x_0) < f(x_1)$, l'une entraîne l'autre, donc $\varphi(X)$ est aussi une fonction croissante.

De plus, la fonction φ prend une fois toute valeur de l'intervalle (a, b), car, si x_0 est une telle valeur, en posant $X_0 = f(x_0)$, la fonction φ prend la valeur x_0 lorsque $X = X_0$. Donc (nº 56), $\varphi(X)$ est une fonction *continue* pour toute valeur de l'intervalle (m, M).

Cette notion s'étend au cas des fonctions définies dans des intervalles non bornés. Par exemple, si f est une fonction définie dans l'intervalle $(a, +\infty)$, continue et toujours croissante, tendant vers $+\infty$ en même temps que x, en appliquant le théorème des fonctions inverses à un intervalle (a, A), et donnant ensuite à A des valeurs croissant indéfiniment, on obtient une fonction inverse définie dans l'intervalle $[f(a), +\infty]$, continue et toujours croissante.

XIII. — Étude des fonctions $\sqrt[m]{x}$, x^y, $\log x$.

58. *Fonction* $\sqrt[m]{x}$. — La fonction $X = x^m$, où m est un entier positif, est définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$; elle est continue, toujours croissante (d'après le calcul algébrique des inégalités étendu) et tend vers $+\infty$ avec x. Cette fonction X a donc une fonction inverse; on la désigne par la notation

$$x = \sqrt[m]{X}.$$

La fonction x est définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$, continue et toujours croissante. C'est la *racine* $m^{\text{ième}}$ *arithmétique* de X.

Si u est une fonction de plusieurs variables $x, y, \ldots$ et si, dans un certain domaine, u est positif, $\sqrt[m]{u}$ est, dans le même domaine, une fonction continue des variables $x, y, \ldots$ (d'après le théorème sur la continuité des fonctions composées, p. 29, n° 32).

59. *Fonction* x^y. — En supposant définie l'expression $\sqrt[m]{x}$, le calcul des radicaux et la théorie des exposants fractionnaires, négatifs et nul, permettent de donner un sens à l'expression x^y, x étant un nombre *positif* et y un nombre *rationnel* quelconque. On a, si y est positif et égal à $\frac{p}{q}$: $x^y = \sqrt[q]{x^p}$; si $y = 0$: $x^y = 1$; si $y = -y'$, y' étant positif : $x^y = \frac{1}{x^{y'}}$.

On démontre que l'expression x^y ainsi définie a les propriétés suivantes :

$$\text{I.} \qquad \left\{ \begin{aligned} x^y . x'^y &= (x . x')^y, \\ x^y . x^z &= x^{y+z}, \\ (x^y)^z &= x^{y.z}. \end{aligned} \right.$$

II. Si, dans x^y, on fixe y, la fonction de x que l'on obtient est définie pour toute valeur positive de x ; elle est croissante si $y > 0$, décroissante si $y < 0$, égale à 1 si $y = 0$. D'ailleurs, cette fonction est continue, par application du principe des fonctions composées.

III. Si, dans x^y, on fixe x, la fonction de y obtenue, définie pour toutes les valeurs rationnelles de y, est croissante si $x > 1$, décroissante si $x < 1$, égale à 1 si $x = 1$.

IV. x étant fixé, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$, tel que

$$|y| < \alpha$$

entraîne

$$|x^y - 1| < \varepsilon.$$

Je dis que x^y, considérée comme fonction d'arguments rationnels, est *uniformément continue dans tout champ borné* C de la forme

$$\alpha \leq x \leq \alpha', \qquad \beta \leq y \leq \beta',$$

α étant un nombre positif (*voir* n° 26, p. 22).

Prenons un nombre a supérieur aux nombres α' et $\frac{1}{\alpha}$, de sorte que

$$\frac{1}{a} < \alpha \leq \alpha' < a.$$

Prenons un entier n supérieur à $|\beta|$ et à $|\beta'|$. On a, dans C,

$$\frac{1}{a} < x < a, \qquad -n < y < n;$$

x étant compris entre $\frac{1}{a}$ et a, x^y est, d'après la propriété II, compris entre $\left(\frac{1}{a}\right)^y = a^{-y}$ et a^y.

y étant compris entre $-n$ et n, en vertu de la propriété III, a^{-y} et a^y sont tous deux compris entre a^{-n} et a^n. On a donc, dans C,

$$a^{-n} < x^y < a^n.$$

Cela posé, il faut, étant donné ε positif, vérifier l'inégalité

(1) $$|x^y - x'^{y'}| < \varepsilon.$$

Elle le sera si l'on vérifie les deux suivantes :

(2) $$|x^y - x'^y| < \frac{\varepsilon}{2},$$

(3) $$|x'^y - x'^{y'}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

L'inégalité (2) peut s'écrire

(4) $$x^y\left|\left(\frac{x'}{x}\right)^y - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme on a $x^y < a^n$, l'inégalité (4) sera vérifiée si l'on vérifie

(5) $$\left|\left(\frac{x'}{x}\right)^y - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2a^n}.$$

$\left(\frac{x'}{x}\right)^y$ étant compris entre $\left(\frac{x'}{x}\right)^n$ et $\left(\frac{x'}{x}\right)^{-n} = \left(\frac{x}{x'}\right)^n$, (5) sera vérifiée si l'on vérifie les deux inégalités suivantes :

(6) $$\left|\left(\frac{x'}{x}\right)^n - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2a^n}, \qquad \left|\left(\frac{x}{x'}\right)^n - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2a^n}$$

ou

(7) $$|x'^n - x^n| < \frac{\varepsilon}{2a^n}x^n, \qquad |x^n - x'^n| < \frac{\varepsilon}{2a^n}x'^n.$$

Comme x^n et x'^n sont supérieurs à a^{-n}, ces deux inégalités seront

vérifiées si l'on a

$$(8) \qquad |x'^n - x^n| < \frac{\varepsilon}{2a^n}\cdot\frac{1}{a^t}.$$

Or, x^n est une fonction continue de x, par suite uniformément continue dans l'intervalle borné $\left(\frac{1}{a}, a\right)$. Donc l'inégalité (8) est vérifiée dès que l'on a

$$|x - x'| < \gamma,$$

γ étant un certain nombre positif. L'inégalité (2) est ainsi résolue.

L'inégalité (3) s'écrit

$$x'^y\,|x'^{y'-y} - 1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Elle est vérifiée si l'on a

$$(9) \qquad |x'^{y'-y} - 1| < \frac{\varepsilon}{2a^n};$$

$x'^{y'-y}$ est compris entre $a^{y'-y}$ et $\frac{1}{a^{y'-y}} = a^{y-y'}$. Il suffit donc, pour vérifier (9), de vérifier les deux inégalités

$$(10) \qquad |a^{y'-y} - 1| < \frac{\varepsilon}{2a^n}, \qquad |a^{y-y'} - 1| < \frac{\varepsilon}{2a^n}.$$

Cela a lieu, d'après la propriété IV, quand on a

$$|y - y'| < \gamma_1,$$

γ_1 étant un certain nombre positif.

En résumé, les conditions

$$|x - x'| < \gamma, \qquad |y - y'| < \gamma_1$$

entraînent l'inégalité (1); la proposition est démontrée.

Le principe d'extension est donc applicable à x^y, et cela en tout point (x_0, y_0) tel que $x_0 > 0$, car on peut prendre α, α', β, β', avec $\alpha > 0$, tels que $\alpha < x_0 < \alpha'$, $\beta < y_0 < \beta'$.

Par conséquent, il existe une fonction bien déterminée de x, y que nous désignerons encore par x^y, définie pour tous les points (x, y) tels que $x > 0$, continue et se réduisant quand y est rationnel à la fonction connue x^y.

D'après le théorème des fonctions composées, les fonctions $x^y x'^y$, $x^y x^z$, $(x^y)^z$, ... qui figurent dans le Tableau I (p. 52), sont fonctions continues des variables qui y entrent. Les équations I étant vérifiées

quand les variables sont rationnelles et les deux membres de chaque équation étant fonctions continues de ces variables, les mêmes égalités ont encore lieu quand x et y sont quelconques (n° 34, p. 31).

Si u et v sont des fonctions de variables quelconques (x, y, ...), continues dans un certain domaine et si, de plus, dans ce domaine, u est positif, la fonction u^v est fonction continue des variables x, y, ... dans ce domaine.

Remarque. — Si l'on a $x > 1$, $y > 0$, je dis que l'on a $x^y > 1$. En effet, prenons une suite y_1, y_2, ..., y_n, ... de nombres rationnels positifs tendant en croissant vers y. Dans ces conditions, x^{y_n} tend en croissant vers x^y. Comme on a $x^{y_n} > 1$, on a aussi $x^y > 1$.

60. Dans l'expression x^y, donnons à y une valeur fixe a. On obtient la fonction x^a. C'est une fonction continue, croissante si l'on a $a > 0$, décroissante si $a < 0$, en vertu de l'égalité

$$(x+h)^a = x^a\left(1+\frac{h}{x}\right)^a$$

et de la remarque précédente.

61. *Fonction exponentielle.* — En fixant x et faisant varier y, on a la fonction a^y qui est dite *fonction exponentielle*.

Cette fonction est croissante si $a > 1$, décroissante si $a < 1$, en vertu de $a^{x+h} = a^x a^h$ et de la même remarque, égale à 1 si $a = 1$.

Si l'exposant tend vers $+\infty$, la fonction exponentielle tend vers $+\infty$ si $a > 1$; elle tend vers zéro si $a < 1$.

L'expression $\frac{a^y}{y^b}$, où b est un nombre positif, et où a est supérieur à 1, tend vers $+\infty$ en même temps que y. En effet, donnons d'abord à y des valeurs positives entières et posons $u_n = \frac{a^n}{n^b}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^b}$. Ce rapport tend vers a lorsque n augmente indéfiniment. En prenant un nombre a' tel que $1 < a' < a$, pour $n \geqq p$, p étant un certain entier, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dépasse a' et l'on a $u_{p+1} > a' u_p$, $u_{p+2} > a'^2 u_p$, et généralement $u_{p+h} > a'^h u_p$. Donc u_{p+h} croît indéfiniment avec h.

Si y n'est pas entier, soit μ sa partie entière; on a $\mu \leqq y < \mu + 1$, d'où

$$a^{\mu} \leqq a^y < a^{\mu+1},$$
$$\mu^b \leqq y^b < (\mu+1)^b.$$

Donc $\dfrac{a^y}{y^b}$ est compris entre les deux expressions

$$\frac{a^\mu}{(\mu+1)^b} = \frac{a^{\mu+1}}{(\mu+1)^b}\,\frac{1}{a}, \qquad \frac{a^{\mu+1}}{\mu^b} = \frac{a^\mu}{\mu^b}\,a,$$

qui, toutes deux, tendent vers $+\infty$. Donc $\dfrac{a^y}{y^b}$ tend aussi vers $+\infty$.

62. *Fonction* $\log x$. — Posons $X = a^x$, a étant positif et différent de 1. La fonction X est définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et est toujours croissante ou toujours décroissante. Ses bornes supérieure et inférieure sont $+\infty$ et 0. Il en résulte l'existence d'une fonction inverse bien déterminée. On la désigne comme il suit :

$$x = \log_a X.$$

C'est la fonction logarithmique dans le système de *base* a. Elle est définie pour toute valeur de X intérieure à l'intervalle $(0, +\infty)$ et est croissante si $a > 1$, décroissante si $a < 1$.

Les propriétés fondamentales de la fonction logarithmique résultent de celles de l'exponentielle.

1° De

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

résulte, en posant $X = a^x$, $Y = a^y$,

$$\log_a XY = x + y$$

ou

$$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y.$$

2° De

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

ou

$$X^y = a^{xy}$$

résulte

$$\log_a(X^y) = xy = y\log_a X.$$

3° Soient deux systèmes de logarithmes de bases a et a'. Prenons, dans le système de base a', les logarithmes des deux membres de l'égalité $a^x = X$. On a

$$x\log_{a'} a = \log_{a'} X$$

ou, en remplaçant x par $\log_a X$,

$$\log_a X \log_{a'} a = \log_{a'} X.$$

On a ainsi $\log_a X$, en fonction de $\log_b X$ et de $\log_a a$. C'est le théorème du changement de base. Si nous faisons $X = a'$, nous obtenons

$$\log_a a' \log_{a'} a = 1.$$

XIV. — Séries numériques.

63. La notion de *série* dérive de la notion de limite. Étant donnée une suite

$$(1) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

on forme la somme s_n des n premiers termes. Si s_n a une limite finie quand n croît indéfiniment, on dit que *la série* (1) *est convergente et a pour somme la limite de* s_n.

Dans tous les autres cas, on dit que la série est *divergente*. Mais si s_n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ (*cf.* n° 18), nous dirons que la série, quoique divergente, a une somme déterminée, égale à $+\infty$, ou $-\infty$.

Une condition nécessaire de convergence est que u_n tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Pour étudier la convergence d'une série, on peut supprimer un certain nombre de termes au commencement de la série.

Si l'on a plusieurs séries convergentes de termes généraux u_n, v_n, w_n, de sommes s, s', s'', la série de terme général $au_n + bv_n + cw_n$, a, b, c étant des constantes quelconques, est convergente et a pour somme $as + bs' + cs''$.

64. *Séries à termes positifs.* — Dans une série à termes positifs, s_n ne peut que croître avec n, donc s_n a une limite s, qui est finie, ou égale à $+\infty$. Il y a convergence dans le premier cas, divergence dans le second.

Dans tous les cas, *la somme s de la série est la borne supérieure de l'ensemble des nombres obtenus en faisant la somme d'un nombre fini de termes, pris arbitrairement dans la série.* En effet, nous savons déjà que s est la borne supérieure de l'ensemble $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$. Si l'on prend dans la série, d'une manière quelconque, des termes de somme Σ, il est évident que l'on a $\Sigma \leqq s_n$, n étant le rang le plus élevé des termes qui entrent dans la somme Σ. Donc, en adjoignant à l'ensemble des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ les différents nombres Σ qu'il est possible de former, on ne modifie pas la borne supérieure de l'ensemble.

Déplacement des termes. — Étant donnée une série

$$(1) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

à termes positifs, la série obtenue en écrivant les termes de (1) dans un ordre quelconque est équivalente à la première, c'est-à-dire qu'elle est convergente ou divergente en même temps et, si elle est convergente, a même somme que (1).

Précisons la notion de déplacement des termes d'une série. Considérons une suite d'entiers positifs i_1, i_2, i_3, ..., telle que chaque entier positif se trouve une fois et une seule dans cette suite. Considérons alors la série

$$(2) \qquad u_{i_1}, \quad u_{i_2}, \quad u_{i_3}, \quad \ldots, \quad u_{i_n}, \quad \ldots$$

Nous dirons que *c'est la série* (1) *dans laquelle on a changé l'ordre des termes.*

s est la borne supérieure de l'ensemble des nombres obtenus en faisant la somme d'un nombre quelconque de termes pris dans la série (1). Si l'on fait la même opération pour la série (2), il est évident que les deux ensembles de nombres sont identiques. Donc (2) a même somme que (1).

Groupement de termes. — Étant donnée une série à termes positifs, si α_1, α_2, ..., α_p, ... est une suite quelconque d'entiers croissants, la suite s_{α_1}, s_{α_2}, ..., s_{α_p}, ... a même limite que la suite s_1, s_2, ..., s_n, ...

Cela montre que l'on obtient une série équivalente à (1), en réunissant en un seul terme les α_1 premiers termes de (1), en un second terme les $(\alpha_2 - \alpha_1)$ termes qui suivent, etc. On dit qu'on effectue ainsi *un groupement de termes consécutifs dans la série.*

Plus généralement, on a une série équivalente à (1) en constituant une nouvelle série

$$(3) \qquad U_1, \quad U_2, \quad \ldots, \quad U_n, \quad \ldots$$

dont chaque terme U représente la somme d'un certain nombre de termes de (1) et cela de telle manière qu'un terme de (1) entre une fois et une seule comme élément d'un terme U.

En effet, la série (3) est équivalente à celle qu'on obtient en remplaçant chacun de ses termes par la somme des termes u qui le composent et écrivant à la suite les uns des autres tous les termes u, dans l'ordre où on les rencontre. Cette série intermédiaire n'est autre que (1) dans laquelle on a déplacé les termes.

65. *Caractères de convergence.* — Étant données deux séries à termes positifs

(1) $$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n, \quad \ldots,$$

(2) $$v_1, \quad v_2, \quad \ldots \quad v_n, \quad \ldots,$$

si l'on a, à partir d'un certain rang, $v_n < u_n$, et si la série (1) est convergente, il en est de même de (2). En partant de là, on démontre un certain nombre de règles, dont les plus importantes sont les suivantes :

Si l'on a, à partir d'un certain rang, $\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n}$, et si la série (1) est convergente, il en est de même de (2).

Comme exemple de série convergente à termes positifs, on connaît les progressions géométriques décroissantes.

On établit, d'autre part, les faits suivants : la série de terme général $\frac{1}{n^\mu}$ est convergente si $\mu > 1$; la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente. On en conclut l'existence des caractères de convergence suivants, pour une série à termes positifs :

1° Si l'ensemble des nombres $n^\mu u_n$, μ étant supérieur à 1, est borné, la série est convergente $\left(\text{par comparaison avec la série de terme général } \frac{1}{n^\mu}\right)$.

2° Si nu_n reste, à partir d'un certain rang, supérieur à un nombre positif, la série est divergente $\left(\text{par comparaison avec la série de terme général } \frac{1}{n}\right)$.

3° Si l'on a, à partir d'un certain rang,

$$\sqrt[n]{u_n} < k < 1,$$

la série est convergente (par comparaison avec une progression géométrique de raison k).

4° Si l'on a, à partir d'un certain rang,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < k < 1,$$

la série est convergente (k étant considéré comme le rapport de deux termes consécutifs d'une progression géométrique de raison k).

66. *Séries à termes quelconques.* — Une série

(1) $$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n \quad \ldots$$

est dite *absolument convergente* si la série des valeurs absolues (ou modules) des termes est convergente. Posons $|u_n| = u'_n$, on a

$$u_n = (u_n + u'_n) - u'_n.$$

Comme $u_n + u'_n$ est égal à $2\,u_n$ si $u_n > 0$, à 0 si $u_n < 0$, on a

$$0 \leqq u_n + u'_n \leqq 2\,u'_n.$$

La série de terme général $(u_n + u'_n)$ est convergente si la série u'_n l'est, alors u_n est la différence entre les termes généraux de deux séries convergentes à termes positifs, donc la série (1) est convergente. D'ailleurs, la somme de ses n premiers termes a un module moindre que la somme des modules des termes. Donc sa limite S est inférieure ou égale à la somme S′ de la série des modules.

Dans une série absolument convergente, on peut déplacer, d'une manière quelconque, les termes sans changer la somme, car ce déplacement revient à opérer le déplacement analogue dans les deux séries convergentes à termes positifs $(u_n + u'_n)$ et u'_n. Leurs sommes ne sont pas modifiées, donc celle de la série proposée ne l'est pas non plus. Il en résulte que l'on peut aussi opérer un groupement de termes, pourvu qu'il satisfasse aux conditions indiquées plus haut (p. 58).

67. *Séries alternées.* — Ces séries sont constituées comme il suit : à partir d'un certain rang les termes vont en décroissant, tendent vers zéro et sont alternativement positifs et négatifs. On a, en supposant les conditions précédentes remplies à partir du premier rang, et posant $S_n = u_1 + \ldots + u_n$, avec $u_1 > 0$,

$$S_1 > S_3 > \ldots,$$
$$S_2 < S_4 < \ldots,$$
$$S_{2n-1} > S_{2n}.$$

On a ainsi deux ensembles de nombres tels que tout nombre du premier est plus grand que tout nombre du second. De plus, on peut trouver, dans les deux ensembles, deux nombres différant d'aussi peu que l'on veut. Il y a donc un nombre S qui est limite commune de ces deux suites. Donc la série est convergente.

68. La série

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

est convergente, car le rapport d'un terme au précédent tend vers 0,

lorsque n croît indéfiniment; sa somme se représente par le nombre e, de sorte que l'on a

$$e = 1 + \sum \frac{1}{n!} = 2,7\ldots.$$

L'expression $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, quand l'entier positif m tend vers $+\infty$, tend vers le nombre e. En effet, on a

$$(2) \qquad \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + \sum_{p=1}^{p=m} u_{m,p}$$

en posant

$$u_{m,p} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p.m^p} = \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\cdots\left(1 - \frac{p-1}{m}\right).$$

On reconnaît que, si p est fixe, $u_{m,p}$ augmente avec m, de sorte que, quand m augmente, $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ ne peut qu'augmenter. D'autre part, $u_{m,p}$, lorsque m croît indéfiniment, a pour limite $\frac{1}{p!}$ qui est le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme de la série e. On a donc

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e.$$

Je dis que $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, pour m suffisamment grand, peut dépasser $e - 2\varepsilon$, quel que soit le nombre ε positif. En effet, prenons q assez grand pour que, dans la série e, la somme S_q des $q+1$ premiers termes soit plus grande que $e - \varepsilon$. Astreignons-nous ensuite à prendre $m > q$. Dans le développement de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, considérons la somme des $q+1$ premiers termes. On a

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > 1 + \sum_{p=1}^{p=q} u_{m,p}.$$

Le second membre a pour limite S_q, donc, quand m dépasse un certain entier, dépasse $S_q - \varepsilon$, c'est-à-dire $e - 2\varepsilon$. En résumé, on a

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e.$$

On en déduit que $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, quand x croît indéfiniment d'une manière quelconque, tend vers e. En effet, supposons d'abord x po-

sitif, et soit m l'entier tel que $m \leqq x < m + 1$, on a

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{1}{m+1}} = \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Les deux termes extrêmes tendent vers e, quand x et, par suite, m tendent vers $+\infty$. Donc $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$ tend aussi vers e.

Si x tend vers $-\infty$, on pose $x = -x'$ et l'on a

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1 - \frac{1}{x'}\right)^{-x'} = \left(\frac{x'}{x' - 1}\right)^{x'} = \left(1 + \frac{1}{x' - 1}\right)^{x'-1} \left(1 + \frac{1}{x' - 1}\right).$$

Donc la limite est encore e. Il en résulte que, si x croît indéfiniment en valeur absolue par des valeurs de signes quelconques, on a

$$\lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

En posant $x = \frac{1}{\alpha}$, on peut encore dire que $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite e quand α tend vers zéro.

CHAPITRE II.

DÉRIVÉES ET INTÉGRALES DES FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES.

I. — Dérivées premières des fonctions d'une ou plusieurs variables.

69. Soit $f(x)$ une fonction d'une variable; x_0 étant une valeur de la variable, x_0+h une autre valeur, on forme le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Si ce rapport a une limite déterminée quand h tend vers zéro d'une manière quelconque, on dit que la fonction a, en x_0, *une dérivée*. Si ce fait a lieu pour toutes les valeurs d'un intervalle, les valeurs de cette dérivée constituent une nouvelle fonction de x. On la désigne par $f'(x)$.

Si l'on considère une fonction $f(x)$ dans un intervalle fini (a, b), quand on considère les valeurs $x_0=a$, $x_0=b$, il n'y a lieu de prendre que des accroissements positifs dans le premier cas, négatifs dans le second.

Si l'on représente en axes rectangulaires la fonction considérée par une courbe, on a, en chaque point, $f'(x_0)=\tang\alpha$, α étant l'angle de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 avec l'axe des x.

70. Une constante a pour dérivée zéro, x a pour dérivée l'unité. Si u, v, w sont des fonctions d'une variable x ayant des dérivées u', v', w', la fonction $au+bv+cw$, a, b, c étant des constantes, reçoit l'accroissement $a\Delta u+b\Delta v+c\Delta w$ quand, x recevant l'accroissement Δx, u, v, w reçoivent les accroissements Δu, Δv, Δw; elle a pour dérivée $\lim a\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim b\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim c\frac{\Delta w}{\Delta x}$, c'est-à-dire $au'+bv'+cw'$; la fonction uv, qui reçoit l'accroissement $u\Delta v+v\Delta u+\Delta u.\Delta v$, quand u et v reçoivent les accroissements Δu et Δv, a pour dérivée $uv'+vu'$.

On généralise cette dernière règle et l'on voit que le produit de plusieurs fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n$ a pour dérivée la somme des produits obtenus en remplaçant chaque fonction par sa dérivée. Ce résultat s'exprime d'une façon simple en introduisant le rapport $\frac{u'}{u}$ qu'on appelle la dérivée logarithmique de la fonction u : la dérivée logarithmique d'un produit est égale à la somme des dérivées logarithmiques des différents facteurs. Par application des règles relatives au produit, m étant un entier positif, la dérivée de x^m est mx^{m-1}.

Le quotient $\frac{u}{v}$ a pour accroissement $\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{\Delta u . v - \Delta v . u}{v^2\left(1+\frac{\Delta v}{v}\right)}$, donc a pour dérivée $\frac{u'v - v'u}{v^2}$.

71. *Dérivées des fonctions de fonctions.* — Soient u, fonction de x, et y, fonction de u. On suppose que u a une dérivée par rapport à x et y une dérivée par rapport à u. Soient x_0 une valeur de la variable, u_0 et y_0 les valeurs correspondantes de u et y, $x_0 + \Delta x$ une nouvelle valeur de x, $u_0 + \Delta u$, $y_0 + \Delta y$, les valeurs correspondantes de u et y. Toutes les fois que l'on a $\Delta u \neq 0$, on peut écrire

$$(1) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Deux cas sont à distinguer, suivant que l'on a, ou non, $(u'_x)_0 \neq 0$.

1° Si $(u'_x)_0 \neq 0$, quand $|\Delta x|$ est inférieur à un certain nombre positif α, Δu est différent de zéro. L'égalité (1) est applicable et donne

$$(2) \qquad y'_x = y'_u \, u'_x.$$

2° Si $(u'_x)_0 = 0$, donnons à Δx une suite de valeurs tendant vers zéro; les accroissements correspondants Δu sont de deux sortes : les uns nuls, les autres différents de zéro. A ces derniers s'applique la formule (1). Pour les autres, le Δy correspondant est nul, de sorte que, dans tous les cas, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite zéro.

Donc la formule $y'_x = y'_u . u'_x$ est applicable dans tous les cas; elle s'étend au cas de plusieurs fonctions intermédiaires.

72. *Dérivées des fonctions inverses.* — y étant une fonction de x, continue et toujours croissante ou toujours décroissante dans un intervalle, a une fonction inverse bien déterminée; Δy et Δx étant deux

accroissements correspondants, on a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

En écartant le cas où l'un des rapports tend vers zéro, on a, en prenant les limites des deux membres,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

D'ailleurs, si l'une des dérivées tend vers zéro, l'autre grandit indéfiniment.

73. *Dérivée de* $\log_a x$. — Considérons le rapport

$$\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h} = \frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Posons $h = \alpha x$. L'expression précédente devient

$$\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Quand h et par suite α tendent vers zéro, $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ tend vers e; la fonction logarithmique étant continue, $\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ a pour limite $\log_a e$. Il y a une dérivée qui est $\frac{1}{x}\log_a e$, ou encore $\frac{1}{x \log_e a}$, donc

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \log_e a}.$$

On appelle logarithmes népériens les logarithmes pris dans le système de base e; on les désigne par la notation $\mathrm{L}\,x$. On a

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\,\mathrm{L}\,a},$$

et dans le cas de $a = e$, comme $\mathrm{L}\,e = 1$,

$$(\mathrm{L}\,x)' = \frac{1}{x}.$$

Dérivée de la fonction exponentielle. — La fonction inverse de $y = a^x$ est, comme nous l'avons vu, $x = \log_a y$. Appliquant le

théorème sur la dérivée d'une fonction inverse, on a

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y\,\mathrm{L}a}} = y\,\mathrm{L}a = a^x\,\mathrm{L}a.$$

En particulier, on a

$$(e^x)' = e^x.$$

Cherchons la dérivée de x^a, a étant quelconque. Nous écrirons

$$x^a = (e^{\mathrm{L}x})^a = e^{a\mathrm{L}x},$$

et, d'après le théorème sur la dérivée d'une fonction de fonction,

$$(x^a)' = e^{a\mathrm{L}x}\,a\,\frac{1}{x} = a\,x^{a-1}.$$

La règle donnée pour le cas de l'exposant entier et positif se trouve étendue au cas d'un exposant quelconque.

74. Les fonctions trigonométriques $\sin x$ et $\cos x$ définies par la Géométrie sont continues. On a en effet :

$$(1)\qquad \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Le second membre a une valeur absolue moindre que $2\sin\frac{h}{2}$, donc tend vers zéro avec h ; $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ est aussi continue.

La formule (1) donne alors

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

d'où, d'après le fait que $\frac{\sin h}{h}$ tend vers 1 quand h tend vers zéro,

$$\lim\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x,$$

donc $\sin x$ a pour dérivée $\cos x$; $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ a pour dérivée $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$; $\mathrm{tang}\,x$ a pour dérivée $\frac{1}{\cos^2 x}$ ou $(1+\mathrm{tang}^2 x)$; $\mathrm{cotang}\,x$ a pour dérivée $\frac{-1}{\sin^2 x}$.

Fonctions trigonométriques inverses. — Pour définir une fonction trigonométrique inverse sans ambiguïté, il faut fixer l'intervalle dans

lequel on la considère. Par exemple, à tout nombre x de l'intervalle $(-1, +1)$ on peut faire correspondre un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus soit égal à x. On a ainsi une fonction bien déterminée qui est l'une des déterminations de *arc sin x*. Soit y cette fonction, on a

$$y = \text{arc sin } x, \qquad x = \sin y, \qquad x'_y = \cos y,$$

d'où

$$y'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Dans les conditions fixées, $\cos y$ est positif, le radical doit être pris avec le signe $+$.

De même, x étant un nombre quelconque, il y a dans l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ une seule détermination y de la fonction arc tang x. On a

$$y = \text{arc tang } x, \qquad x = \text{tang } y, \qquad x'_y = 1 + \text{tang}^2 y,$$

$$y'_x = \frac{1}{1 + \text{tang}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

75. *Théorème de Rolle. — Si une fonction f d'une variable x, continue dans un intervalle (a, b), s'annule pour les valeurs a, b, et a une dérivée pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle, cette dérivée s'annule au moins une fois dans l'intervalle.*

En effet, on a par hypothèse $f(a) = f(b) = 0$. Soient m et M les bornes des valeurs de la fonction dans l'intervalle (a, b). Si $m = \text{M} = 0$, la fonction est constante, sa dérivée est toujours nulle. Sinon, on a au moins une des conditions $m < 0$, $\text{M} > 0$.

Supposons par exemple $\text{M} > 0$. D'après le n° 53, la fonction atteint la valeur M pour une valeur au moins de la variable, nécessairement différente de a et de b. Soit x_0 une telle valeur. Pour toute valeur x de l'intervalle on a $f(x) \leqq f(x_0)$.

Cela posé, formons $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; le numérateur est négatif ou nul. Si l'on donne à x des valeurs tendant vers x_0 par valeurs supérieures, le rapport, étant négatif, a une limite négative ou nulle. Si l'on donne à x des valeurs tendant vers x_0 par valeurs inférieures, le rapport, étant positif, a une limite positive ou nulle. Cette limite est donc nulle, et, comme elle est égale à $f'(x_0)$, on a $f'(x_0) = 0$.

76. *Formule des accroissements finis.* — Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b), ayant une dérivée. Cherchons une expression du rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Soit A cette quantité. Posons

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - A(b-x).$$

$\varphi(x)$ est continue et a une dérivée qui est $-f'(x)+A$. Comme on a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, par application du théorème de Rolle, $\varphi'(x)$ s'annule pour une valeur c de l'intervalle, donc

$$\varphi'(c) = -f'(c) + A = 0,$$

d'où

$$A = f'(c),$$

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \qquad a < c < b.$$

En mettant x, $x+h$, $x+\theta h$ au lieu de a, b, c, on a

(1) $$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h) \qquad (0 < \theta < 1).$$

On doit interpréter ce résultat ainsi : x et $x+h$ étant deux valeurs de l'intervalle, il existe un nombre θ compris entre 0 et 1, tel qu'on a l'égalité (1).

Il résulte de la définition de la dérivée que, si dans un intervalle une fonction est constamment croissante, sa dérivée est positive ou nulle; si la fonction est décroissante, sa dérivée est négative ou nulle.

Réciproquement, si dans un certain intervalle la dérivée est positive, la fonction croît, car le second membre de (1) est du signe de h; si dans un certain intervalle la dérivée est négative, la fonction est décroissante. Si la dérivée est constamment nulle, la fonction est constante.

77. *Fonctions de plusieurs variables.* — Soit $f(x, y, z, \ldots)$ une fonction de plusieurs variables. Si l'on donne à toutes les variables moins une, x par exemple, des valeurs déterminées, la fonction f devient fonction de la seule variable x. Elle peut être continue par rapport à cette variable et avoir une dérivée. S'il en est ainsi pour toutes les valeurs de x d'un intervalle, et cela quelles que soient les valeurs attribuées à y, z, ..., cette dérivée est elle-même une fonction des variables x, y, z, ... On la désigne par la notation $f'_x(x, y, z, \ldots)$, on dit que c'est la *dérivée partielle de f par rapport à x*. Il peut y avoir de même des dérivées partielles par rapport à y, z, ...; on les désigne par $f'_y(x, y, z, \ldots)$, $f'_z(x, y, z, \ldots)$.

78. Remarquons qu'une fonction, de deux variables par exemple, peut être continue par rapport à chacune d'elles et même avoir des dérivées partielles en tout point sans pour cela être continue par rapport à l'ensemble des variables.

Prenons, par exemple, la fonction $f(x, y)$ qui est égale à $\frac{xy}{x^2+y^2}$ pour tous les points du plan sauf pour le point $x=0$, $y=0$, pour lequel elle est égale à zéro.

On constate que la fonction est nulle quand le point (x, y) est soit sur Ox, soit sur Oy. Elle est donc, à l'origine, continue quand x ou y varie seul et a en ce point des dérivées partielles nulles.

Prenons maintenant un point autre que l'origine. On peut toujours considérer un tel point comme intérieur à un champ ne contenant pas l'origine et dans lequel on a $f = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Donc f est encore continue par rapport à chacune des variables et a des dérivées partielles.

Cependant la fonction n'est pas continue à l'origine par rapport à l'ensemble des deux variables. En effet, si un point varie de façon que $y = \alpha x$, α étant constant et $\neq 0$, on a, pour $x \neq 0$,

$$f = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \neq 0,$$

tandis que, pour $x = 0$, $f = 0$.

79. Soit $u = f(x, y, z)$ une fonction de plusieurs variables (trois, par exemple), définie dans un certain champ. Soient deux points du champ, l'un (x, y, z), l'autre $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Δx, Δy, Δz seront dits les accroissements des variables à partir des premières valeurs x, y, z. Posons

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z).$$

On a l'identité suivante :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta u = {} & f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z) \\ & + f(x+\Delta x, y+\Delta y, z) - f(x+\Delta x, y, z) \\ & + f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x+\Delta x, y+\Delta y, z). \end{aligned}\right.$$

Si, dans un champ donné, la fonction $f(x, y, z)$ a des dérivées partielles par rapport à chacune des variables et si ces dérivées partielles sont inférieures en valeur absolue à un nombre A, la fonction est continue par rapport à l'ensemble des variables.

Supposons ces conditions remplies. Le second membre de (1) est

la somme de trois différences dont chacune est la différence entre les états de grandeur d'une fonction d'une seule variable, à savoir x pour la première différence, y pour la seconde, z pour la troisième.

En appliquant la formule des accroissements finis à chacune d'elles, on a, θ, θ', θ'' désignant trois nombres compris entre o et 1,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \Delta u = f'_x(x+\theta\Delta x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x+\Delta x, y+\theta'\Delta y, z)\,\Delta y \\ + f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\theta''\Delta z)\,\Delta z. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte, d'après l'hypothèse faite,

$$|\Delta u| \leq A(|\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|).$$

Donc Δu tend vers o avec Δx, Δy, Δz, donc f est continue par rapport à l'ensemble des variables.

80. *Dérivation des fonctions composées.* — Supposons que x, y, z, qui sont les arguments de la fonction $u = f(x, y, z)$, soient non plus variables indépendantes, mais fonctions d'autres variables t, θ, ...; supposons que les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z soient continues par rapport à l'ensemble des variables qui y entrent, que x, y, z soient continues par rapport à chacune des variables t, θ, ... et aient des dérivées par rapport à chacune d'elles.

Laissons fixes les variables indépendantes sauf t. Donnons à celle-ci une première valeur t, à laquelle correspondent pour x, y, z les valeurs x, y, z et pour u la valeur u, puis une seconde valeur $t+\Delta t$ à laquelle correspondent pour x, y, z les valeurs $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ et pour u la valeur $u+\Delta u$. La formule (2) est applicable : Divisons les deux membres par Δt, il vient

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x+\theta\Delta x, y, z)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x+\Delta x, y+\theta'\Delta y, z)\frac{\Delta y}{\Delta t} \\ + f'_z(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\theta''\Delta z)\frac{\Delta z}{\Delta t}. \end{aligned} \right.$$

Faisons tendre Δt vers zéro. A cause de la continuité de x, y, z, Δx, Δy, Δz tendent vers zéro. Comme u est continue par rapport à l'ensemble (x, y, z), Δu tend aussi vers zéro. Les dérivées f'_x, f'_y, f'_z du second membre de (3) étant continues par rapport à l'ensemble des variables, tendent respectivement vers $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$. Les rapports $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ tendent vers x'_t, y'_t, z'_t. De sorte que le second membre a une limite qui est

$$f'_x x'_t + f'_y y'_t + f'_z z'_t.$$

Le premier membre de (3) a donc aussi une limite; c'est la dérivée u'_t de u par rapport à t et l'on a

$$u'_t = f'_x(x, y, z)\,x'_t + f'_y(x, y, z)\,y'_t + f'_z(x, y, z)\,z'_t.$$

C'est la règle de dérivation des fonctions composées. Elle comprend comme cas particuliers les règles de dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient et le théorème des fonctions de fonctions. Toutefois, il convient de remarquer qu'elle a été établie avec une hypothèse restrictive en plus, à savoir que les dérivées partielles de f sont continues par rapport à l'ensemble des variables.

81. *Formule des accroissements finis pour les fonctions de plusieurs variables.* — Revenons à l'expression de Δu (n° 79) et posons

$$\varphi(t) = f(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y, z + t\,\Delta z).$$

On reconnaît que l'on a

$$\Delta u = \varphi(1) - \varphi(0).$$

En appliquant la formule des accroissements finis à la fonction d'une variable $\varphi(t)$, on a, θ étant un nombre compris entre 0 et 1,

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta).$$

En dérivant $\varphi(t)$ par la règle des fonctions composées, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(t) = {} & f'_x(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y, z + t\,\Delta z)\,\Delta x \\ & + f'_y(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y, z + t\,\Delta z)\,\Delta y \\ & + f'_z(x + t\,\Delta x, y + t\,\Delta y, z + t\,\Delta z)\,\Delta z,\end{aligned}$$

d'où la formule des accroissements finis

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = {} & f'_x(x + \theta\,\Delta x, y + \theta\,\Delta y, z + \theta\,\Delta z)\,\Delta x \\ & + f'_y(x + \theta\,\Delta x, y + \theta\,\Delta y, z + \theta\,\Delta z)\,\Delta y \\ & + f'_z(x + \theta\,\Delta x, y + \theta\,\Delta y, z + \theta\,\Delta z)\,\Delta z.\end{aligned}$$

II. — Différentielles premières.

82. Soit $u = f(x, y, z)$ une fonction d'une ou plusieurs variables, ayant des dérivées f'_x, f'_y, f'_z. Donnons à x, y, z des accroissements Δx, Δy, Δz. Nous poserons

(1) $$du = df = f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z,$$

et nous dirons que du ou df *est la différentielle de la fonction* u.

S'il n'y a qu'une seule variable, on a une *différentielle ordinaire.* S'il y a plusieurs variables, on a une *différentielle totale.*

Remarquons que l'on peut considérer comme fonction de x, y, z chacune de ces variables elles-mêmes; x, par exemple, a pour dérivées partielles : par rapport à x, un, par rapport à y, zéro, par rapport à z, zéro. La formule (1) donne alors $dx = \Delta x$.

Ceci nous amène à dire qu'*en ce qui concerne les variables indépendantes, les différentielles sont égales aux accroissements.* Nous pouvons modifier la notation précédente et écrire

$$(2)\qquad du = df = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz,$$

dx, dy, dz étant considérés comme des accroissements arbitraires donnés à x, y, z. A ce titre, il faut considérer du, s'il s'agit de n variables, comme fonction de $2n$ variables, savoir : les n variables ellesmêmes et les n accroissements arbitraires donnés à ces variables.

83. Dans le cas d'une seule variable x, on a la formule suivante :

$$du = f'(x)\,dx = u'\,dx.$$

Ceci conduit à écrire $u' = \frac{du}{dx}$, d'où une nouvelle notation pour la dérivée d'une fonction d'une variable. Nous représenterons la dérivée d'une fonction u de x, soit par u'_x comme précédemment, soit par $\frac{du}{dx}$.

Par analogie, dans le cas de plusieurs variables, on écrit, par exemple, $f'_x(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$.

84. *La formule* (2), *qui définit la différentielle totale de la fonction* $u = f(x, y, z)$, *est encore valable si* x, y, z, *au lieu d'être variables indépendantes, sont fonctions d'autres variables* t, θ, ...

En effet, u est alors fonction de t, θ, ... par l'intermédiaire de x, y, z. Soit $u = F(t, \theta, \ldots)$. Soient dt, $d\theta$, ... les accroissements ou différentielles des variables indépendantes. On a

$$dx = x'_t\,dt + x'_\theta\,d\theta + \ldots,$$

$$dy = y'_t\,dt + y'_\theta\,d\theta + \ldots,$$

$$dz = z'_t\,dt + z'_\theta\,d\theta + \ldots.$$

D'autre part, la différentielle du est donnée par la formule

$$du = F'_t\,dt + F'_\theta\,d\theta + \ldots.$$

On a, par la règle des fonctions composées,

$$F'_t = f'_x\,x'_t + f'_y\,y'_t + f'_z\,z'_t,$$
$$F'_\theta = f'_x\,x'_\theta + f'_y\,y'_\theta + f'_z\,z'_\theta,$$

d'où

$$du = (f'_x\,x'_t + f'_y\,y'_t + f'_z\,z'_t)\,dt + (f'_x\,x'_\theta + f'_y\,y'_\theta + f'_z\,z'_\theta)\,d\theta + \ldots$$

ou, en réunissant les termes en f'_x, en f'_y et en f'_z,

$$du = f'_x(x'_t\,dt + x'_\theta\,d\theta + \ldots) + f'_y(y'_t\,dt + y'_\theta\,d\theta + \ldots) + f'_z(z'_t\,dt + z'_\theta\,d\theta + \ldots),$$

c'est-à-dire

$$du = f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz.$$

La formule (2) est donc valable dans tous les cas.

Par exemple, si l'on considère les expressions $u + v + w$, uv, $\frac{u}{v}$, u, v, w étant des fonctions de *variables quelconques*, on a

$$d(u + v + w) = du + dv + dw,$$
$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

85. Étant donnée une fonction $u = f(x, y, z)$, si l'on a une relation de la forme

$$(1) \qquad du = A\,dx + B\,dy + C\,dz,$$

on peut affirmer que l'on a

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

En effet, on a en même temps que (1) la formule

$$(2) \qquad du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Les seconds membres de ces formules (1) et (2) doivent être égaux quels que soient dx, dy, dz. En particulier, pour $dy = dz = 0$, cela exige que l'on ait $A = \frac{\partial u}{\partial x}$; de même on obtient $B = \frac{\partial u}{\partial y}$, $C = \frac{\partial u}{\partial z}$.

III. — Intégrales définies.

86. Étant donnée une fonction continue $f(x)$, supposons qu'il existe une fonction F dont f soit la dérivée. Donnons-nous des nombres

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = x$$

tous compris dans l'intervalle de variation de x. On a

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) F'(\xi_i) = (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i),$$

ξ_i étant compris entre x_{i-1} et x_i. Faisons $i = 1, 2, \ldots, n$, écrivons les égalités correspondantes et ajoutons-les membre à membre. Il vient

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{i=1,2,\ldots,n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

Ceci conduit à étudier *a priori* des sommes telles que celle du second membre.

87. *Soit f une fonction continue dans l'intervalle (a, b) $[a < b]$. On divise l'intervalle (a, b) en intervalles partiels par des valeurs intermédiaires*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i), on prend arbitrairement une valeur ξ_i et l'on forme

$$(1) \qquad \Sigma (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Je dis que cette somme tend vers une limite déterminée et finie lorsque l'on fait varier le mode de partage de l'intervalle (a, b) de telle manière que la plus grande longueur d'un intervalle partiel d'un partage donné tende vers zéro.

Soient M et m les bornes de f dans l'intervalle (a, b), M_i et m_i ses bornes dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i).

On a, quel que soit i,

$$m \leqq m_i \leqq M_i \leqq M.$$

Posons $x_i - x_{i-1} = l_i$. Ce nombre positif l_i est la longueur de l'intervalle (x_{i-1}, x_i). De $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$ résulte

$$\Sigma l_i m_i \leqq \Sigma l_i f(\xi_i) \leqq \Sigma l_i M_i.$$

Étudions, pour les différents partages possibles, les sommes

$$s = \Sigma\, l_i\, m_i, \qquad S = \Sigma\, l_i\, M_i$$

que nous appellerons *somme inférieure* et *somme supérieure* relatives au partage. Remarquons que l'on a, comme $M_i \leqq M$,

$$S = \Sigma M_i l_i \leqq \Sigma M\, l_i = M \Sigma\, l_i = M(b-a).$$

Donc

$$S \leqq M(b-a),$$

de même

$$s \geqq m(b-a).$$

Considérons deux partages dont le second est *conséeutif* au premier, en entendant par là que, *dans le second, on a conservé les valeurs intermédiaires qui existaient dans le premier*. Soient S la somme supérieure du premier, S' celle du second. Pour passer de S à S', on doit remplacer chaque terme de S, soit $l_i M_i$, par une certaine somme de termes, M_i et l_i jouant par rapport à cette somme de termes le rôle que jouaient, dans ce qui précède, M et $(b-a)$ par rapport à la somme S. Donc la somme des termes qui remplacent $M_i l_i$ est au plus égale à $M_i l_i$; ceci ayant lieu pour chaque terme $M_i l_i$, on a

$$S' \leqq S.$$

De la même manière, s et s' étant les sommes inférieures relatives au premier et au second partage, on a

$$s' \geqq s.$$

Considérons d'une part l'ensemble (S) des sommes supérieures, d'autre part l'ensemble (s) des sommes inférieures relatives à tous les partages possibles.

1° Tout nombre du premier ensemble est supérieur ou égal à tout nombre du second. En effet, soient P et P' deux partages quelconques, S la somme supérieure du premier, s' la somme inférieure du second. Prenons un troisième partage P'' obtenu en conservant les valeurs intermédiaires des deux premiers, de telle sorte que P'' est conséeutif à P et à P'. Si S'' et s'' sont les sommes supérieure et inférieure de ce troisième partage, on a

$$S \geqq S'', \qquad s'' \geqq s', \qquad S'' \geqq s''.$$

Donc

$$S \geqq s'.$$

2° On peut trouver, dans l'ensemble (S) et dans l'ensemble (s), deux nombres différant d'aussi peu que l'on veut.

En effet, soit $\varepsilon > 0$; en vertu de la continuité uniforme (n° 52, p. 47), nous pouvons trouver un nombre α positif, tel que, pour deux valeurs x, x' de l'intervalle (a, b), la condition $|x - x'| < \alpha$ entraîne $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Cela posé, prenons un partage tel que la plus grande longueur d'un intervalle partiel soit inférieure à α; quel que soit i, les bornes M_i et m_i de f dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i), de longueur moindre que α, diffèrent de moins de ε. On a, dans un partage réalisant ces conditions,

$$S - s = \Sigma\, l_i M_i - \Sigma\, l_i m_i = \Sigma\, l_i (M_i - m_i) < \Sigma\, l_i \varepsilon = \varepsilon(b - a),$$

c'est-à-dire

$$S - s < \varepsilon(b - a),$$

et, comme $\varepsilon(b - a)$ peut être pris aussi petit que l'on veut, la propriété se trouve établie.

Les ensembles (S) et (s) sont donc tels (n° 17) que la borne inférieure des S est égale à la borne supérieure des s. Soit I ce nombre.

Prenons une suite de partages $P_1, P_2, \ldots, P_h, \ldots$ tels que, si λ_h est la plus grande longueur d'un intervalle partiel dans le partage P_h, λ_h tende vers zéro. Soient S_h et s_h les sommes supérieure et inférieure relatives au partage P_h, ε un nombre positif, α le nombre positif qui lui correspond d'après la loi précédente. On a, pour h assez grand, $\lambda_h < \alpha$ et par suite, d'après ce qui précède,

$$S_h - s_h < \varepsilon(b - a).$$

Donc $S_h - s_h$ tend vers zéro. Comme l'on a

$$S_h \geq I \geq s_h,$$

S_h et s_h tendent tous deux vers I.

Donc la somme $\Sigma\, l_i f(\xi_i)$, constamment comprise entre S_h et s_h, tend vers I, ce qui démontre le théorème.

88. Le nombre I s'appelle *l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ de a à b* et l'on écrit

$$I = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Par définition, nous poserons

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0,$$

et, si $a > b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Moyennant ces définitions, l'expression $\int_a^b f(x)\,dx$ a un sens quels que soient les deux nombres a et b appartenant à un intervalle dans lequel $f(x)$ est continue.

89. Remarquons que, si $a < b$, d'après les propriétés des sommes S et s (n° 87), on a

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a).$$

Dans le cas de $a > b$, $\int_b^a f(x)\,dx$ est compris entre $m(a-b)$ et $M(a-b)$. Le nombre opposé $\int_a^b f(x)\,dx$ est donc compris entre $m(b-a)$ et $M(b-a)$. Donc, dans les deux cas, le rapport

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

est compris entre m et M. Par suite, il existe un nombre ξ de l'intervalle (a, b) tel que ce rapport est égal à $f(\xi)$. En d'autres termes, on peut poser

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi),$$

ξ étant compris entre a et b. Ceci a encore évidemment lieu si $a = b$.

Il résulte en particulier de là que, si f est $\geqq 0$ et si $a < b$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0.$$

90. Si a, b, c sont trois nombres tels que $a < b < c$, on a

$$(1) \qquad \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

En effet, pour définir $\int_a^c f(x)\,dx$, astreignons-nous à prendre des modes de partage dans lesquels b soit toujours un point de division. La somme $\Sigma l_i f(\xi_i)$ relative à l'intervalle (a, c) se compose de deux parties : la première comprenant les termes relatifs à l'intervalle (a, b); la seconde, les termes relatifs à l'intervalle (b, c). Ces deux sommes tendent respectivement vers les deux intégrales du second membre de (1), tandis que la somme totale $\Sigma l_i f(\xi_i)$ tend vers le premier membre. Donc on a la relation (1), qui peut encore s'écrire

$$(2) \qquad \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît que le premier membre est invariable, au signe près, lorsqu'on permute a, b, c d'une manière quelconque. On en conclut que l'on a, outre la relation (2), cinq relations analogues, obtenues en remplaçant a, b, c par une permutation quelconque de ces trois nombres. Cela revient à dire que (2) *a lieu quel que soit l'ordre de grandeur de* a, b, c. Par suite, *la relation* (1) *a lieu aussi* dans les mêmes conditions.

91. Cela posé, soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle; soient x_0 et x deux valeurs de cet intervalle. Considérons l'intégrale $\int_{x_0}^x f(x)\,dx$. Supposons que, x_0 restant fixe, on fasse varier x. L'intégrale devient une fonction de x. Posons

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x)\,dx.$$

On a

$$F(x+h) = \int_{x_0}^{x+h} f(x)\,dx = \int_{x_0}^x f(x)\,dx + \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

d'où

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

ce qui peut s'écrire (nº 89)

$$F(x+h) - F(x) = h f(\xi),$$

ξ étant compris entre x et $x+h$. Si h tend vers zéro, $f(\xi)$ tend vers $f(x)$, le second membre tend vers zéro; donc $F(x)$ est une

fonction continue. En outre, on a, quand h tend vers zéro,

$$\lim \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Donc $F(x)$ *a une dérivée et cette dérivée est* $f(x)$.

On reconnaît ainsi que *toute fonction continue est la dérivée d'une certaine fonction*.

Toute fonction dont f est la dérivée s'appelle une *fonction primitive* de f. Une fonction dont la dérivée est toujours nulle étant une constante, deux fonctions qui ont même dérivée diffèrent d'une constante. Par suite, si $F(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$, toutes les autres fonctions primitives de $f(x)$ sont de la forme $F(x) + C$, C étant une constante.

Étant donnée la fonction $f(x)$, supposons que $F(x)$ désigne une fonction primitive de $f(x)$, x_0 étant une valeur quelconque, considérons l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$. On a, d'après ce qui précède,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Donnons à x la valeur x_0. Il vient $0 = F(x_0) + C$, d'où $C = -F(x_0)$, de sorte qu'on a

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0).$$

Quand on se préoccupe seulement de rechercher les fonctions primitives d'une fonction donnée $f(x)$, on l'indique par la notation $\int f(x)\,dx$, en sous-entendant que la limite supérieure est x, la limite inférieure étant quelconque. On dit qu'on a une *intégrale indéfinie* de $f(x)$; une telle intégrale n'est définie qu'à une constante additive près.

On appelle *élément différentiel* de l'intégrale l'expression $f(x)\,dx$.

IV. — Recherche des fonctions primitives.

92. A toute formule de dérivation d'une fonction correspond une formule d'intégration. Mais il est essentiel de remarquer que les formules d'intégration ne sont applicables que dans des intervalles où la fonction qu'on intègre est continue.

Si l'on a $m \neq -1$, on peut écrire

$$\int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}.$$

Si m est entier, positif ou négatif, x^m est défini pour toute valeur de x; mais, si m est entier et négatif, l'intégrale définie $\int_a^b x^m \, dx$ n'a un sens que si a et b sont de même signe.

Si m n'est pas entier, on doit supposer $x > 0$.

Si $m = -1$, on a, dans un intervalle où $x > 0$,

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{dx}{x} = \mathrm{L}x,$$

et, dans un intervalle où $x < 0$,

$$\int x^{-1} \, dx = \int \frac{d(-x)}{-x} = \mathrm{L}(-x).$$

Comme autre exemple, considérons $\int \frac{dx}{1+x^2}$.

De ce que la dérivée de arc tang$x$ est $\frac{1}{1+x^2}$, on déduit

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x.$$

Il faut entendre par *arc tang x* une détermination particulière de cette fonction. On aura, avec des intégrales définies,

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} b - \operatorname{arc\,tang} a,$$

étant entendu que *arc tang b* et *arc tang a* sont deux arcs compris dans le même intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

93. Pour effectuer la recherche des fonctions primitives, on utilise différents procédés généraux.

Formule de décomposition. — Si l'on a

$$f = a\varphi + b\psi + \ldots + c\theta,$$

$\varphi, \psi, \ldots, \theta$ étant des fonctions continues, $a, b, \ldots, c$ des constantes, on a

$$\int f \, dx = a \int \varphi \, dx + b \int \psi \, dx + \ldots + c \int \theta \, dx.$$

En effet, les deux membres de cette formule ont respectivement pour dérivées les deux membres de la première. Donc ils sont égaux (à une constante près).

En ce qui concerne les intégrales définies, on a

$$\int_{x_0}^{x} f\,dx = a\int_{x_0}^{x} \varphi\,dx + b\int_{x_0}^{x} \psi\,dx + \ldots + c\int_{x_0}^{x} \theta\,dx,$$

car les deux membres ne diffèrent que par une constante et, comme pour $x = x_0$, ils s'annulent tous deux, ils sont égaux.

94. *Changement de variable.* — $F(x)$ étant une fonction primitive de $f(x)$, supposons que l'on ait $x = \varphi(t)$, t étant une nouvelle variable, φ une fonction continue par rapport à t, ayant une dérivée elle-même continue. Imaginons que, dans F, on remplace x par $\varphi(t)$. Soit $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ la fonction ainsi obtenue. On a

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$$

ou, en remplaçant F' par f,

$$\Phi'(t) = f[\varphi(t)]\,\varphi'(t).$$

$\Phi(t)$ est donc l'intégrale indéfinie de $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$:

$$\Phi(t) = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ainsi $\Phi(t)$ est l'intégrale obtenue en remplaçant, dans l'intégrale $\int f(x)\,dx$, $f(x)$ par $f[\varphi(t)]$ et dx par $\varphi'(t)\,dt$. Nous dirons que cette opération consiste à *transformer l'élément différentiel $f(x)\,dx$ par le changement de variable $x = \varphi(t)$*, et que *les deux éléments différentiels $f(x)\,dx$, $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$ sont équivalents.*

Considérons les intégrales définies. Soient t_0 et t_1 deux valeurs de t, soient x_0, x_1 les valeurs correspondantes de $x = \varphi(t)$. On a

$$F(x_1) = \Phi(t_1), \qquad F(x_0) = \Phi(t_0),$$

d'où

$$F(x_1) - F(x_0) = \Phi(t_1) - \Phi(t_0),$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Ces résultats sont démontrés sous la seule condition que *x soit*

fonction continue de t et ait une dérivée elle-même continue. En particulier, on ne suppose pas que la fonction x de t soit toujours croissante ou décroissante. Si l'on se trouve dans l'un de ces cas particuliers, t peut être considéré comme fonction déterminée et continue de x, c'est-à-dire qu'entre t et x existe une *relation réversible.*

On utilise le changement de variable de deux manières :

1° Dans le sens indiqué dans la théorie, c'est-à-dire en remplaçant la variable x par une fonction déterminée d'une nouvelle variable.

2° On l'utilise, et c'est le cas le plus fréquent, en sens inverse, c'est-à-dire qu'étant donnée une intégrale $\int f(x)\,dx$, on cherche à mettre l'élément différentiel $f(x)\,dx$ sous la forme $\psi(u)\,du$, u étant une fonction déterminée et continue de x telle que les deux éléments $f(x)\,dx$, $\psi(u)\,du$ soient équivalents.

Par exemple, soit à calculer $\int e^{x^2} x\,dx$; si l'on pose $x^2 = u$, l'élément différentiel s'écrit $\frac{e^u}{2}\,du$, de sorte que la recherche de la première intégrale se ramène à la recherche de $\int \frac{e^u}{2}\,du$.

Comme autre exemple, soit à calculer $\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)}$, f étant une fonction donnée. Remarquons d'abord qu'on ne doit considérer que des intervalles de variation dans lesquels $f(x)$ a un signe déterminé. En posant $u = f(x)$, l'élément différentiel devient $\frac{du}{u}$, et l'on est ramené à l'intégrale $\int \frac{du}{u} = \mathrm{L}\,|u|$. L'intégrale cherchée est donc $\mathrm{L}\,|f(x)|$.

95. *Intégration par parties.* — u et v étant deux fonctions continues de x, on a la formule

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

d'où, en prenant les fonctions primitives des deux membres,

$$uv = \int uv'\,dx + \int vu'\,dx,$$

ou, en remplaçant $v'\,dx$ par dv, $u'\,dx$ par du,

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

d'où

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

On utilise cette formule de la façon suivante : étant donnée une intégrale, si l'on peut mettre l'élément différentiel sous la forme $u\,dv$, u et v étant tels que l'intégrale $\int v\,du$ soit connue, la formule fournit la fonction primitive cherchée.

Prenons par exemple $\int x\,\mathrm{L}x\,dx$. Posons $u = \mathrm{L}x$ et $dv = x\,dx$, ce qui revient à prendre $v = \frac{x^2}{2}$. On a

$$\int u\,dv = \frac{x^2}{2}\mathrm{L}x - \frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\mathrm{L}x - \frac{x^2}{4}.$$

D'une façon générale, on a, pourvu que m soit différent de -1,

$$\int x^m \mathrm{L}x\,dx = \int \mathrm{L}x\,d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right) = \frac{x^{m+1}}{m+1}\mathrm{L}x - \frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\frac{dx}{x},$$

$$\int x^m \mathrm{L}x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\mathrm{L}x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}.$$

Pour $m = -1$, on a

$$\int \mathrm{L}x\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}(\mathrm{L}x)^2.$$

En ce qui concerne les intégrales définies, la formule d'intégration par parties est la suivante :

$$\int_{x_0}^{x_1} u\frac{dv}{dx}\,dx = [uv]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} v\frac{du}{dx}\,dx,$$

$[uv]_{x_0}^{x_1}$ désignant $u(x_1)v(x_1) - u(x_0)v(x_0)$.

96. *Intégration des fractions rationnelles.* — Soit la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, f et φ étant des polynomes à coefficients réels. Nous nous proposons de calculer $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}\,dx$.

D'après la théorie des équations algébriques, $\varphi(x)$ peut être mis sous la forme

$$\varphi(x) = \mathrm{A}(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\gamma\ldots,$$

A, a, b, ..., λ, μ, ... étant des nombres réels. On démontre, en par-

tant de là, que $\frac{f}{\varphi}$ peut se mettre sous la forme

$$P(x) + \sum \left[\frac{A_1}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_\alpha}{x-a} \right]$$
$$+ \sum \left\{ \frac{M_1 x + N_1}{[(x-\lambda)^2 + \mu^2]^\gamma} + \frac{M_2 x + N_2}{[(x-\lambda)^2 + \mu^2]^{\gamma-1}} + \ldots + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{(x-\lambda)^2 + \mu^2} \right\},$$

$P(x)$ étant un polynome, le premier $\sum$ s'appliquant à toutes les racines réelles a, b, ... du polynome $\varphi(x)$, le second à tous les couples de racines imaginaires conjuguées telles que $\lambda + \mu i$, $\lambda - \mu i$.

Pour intégrer la fraction rationnelle donnée, il faut intégrer chacun des éléments du second membre.

L'intégrale $\int P(x)\,dx$ est un polynome que l'on sait former. L'intégrale de $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, ou $A(x-a)^{-\alpha}$, est, dans le cas de $\alpha > 1$,

$$\frac{A(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1};$$

dans le cas de $\alpha = 1$, l'intégrale de $\frac{A}{x-a}$ est $A.L|x-a|$.

Restent à calculer les intégrales de la forme $\int \frac{Mx+N}{[(x-\lambda)^2+\mu^2]^\gamma}\,dx$. Faisons le changement de variable $x = \lambda + \mu t$, d'où $dx = \mu\,dt$. L'élément différentiel est remplacé par un élément de la forme

$$\frac{at+b}{(1+t^2)^\gamma}\,dt.$$

On est conduit à étudier séparément

$$\int \frac{t\,dt}{(1+t^2)^\gamma} \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{(1+t^2)^\gamma}.$$

Dans la première intégrale, prenons comme variable $u = t^2 + 1$, d'où $du = 2t\,dt$. On est ramené à calculer $\int \frac{du}{u^\gamma}$, que l'on vient d'étudier. Il reste finalement les intégrales de la forme

$$J_\gamma = \int \frac{dt}{(1+t^2)^\gamma},$$

où γ est un entier positif. En premier lieu, si $\gamma = 1$, on a

$$J_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tang}\, t.$$

Si $\gamma > 1$, nous transformons J_γ de la façon suivante :

$$J_\gamma = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^\gamma}\,dt = \int \frac{dt}{(1+t^2)^{\gamma-1}} - \int \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^\gamma}.$$

Le premier terme du second membre est l'intégrale $J_{\gamma-1}$. Transformons le second en écrivant, au numérateur, $t.t\,dt$; considérons $\frac{t\,dt}{(1+t^2)^\gamma}$ comme une différentielle du, en prenant $u = \frac{\alpha}{(1+t^2)^{\gamma-1}}$, α étant un certain coefficient numérique. En appliquant à la dernière intégrale, qui s'écrit $\int t\,du$, la formule d'intégration par parties, on a

$$\int t\,du = tu - \int u\,dt.$$

$\int u\,dt$ est, à un facteur numérique près, l'intégrale $J_{\gamma-1}$.

En résumé, on a une relation de la forme

$$J_\gamma = kJ_{\gamma-1} + R(t),$$

k étant numérique, R étant une fonction rationnelle de t. C'est une formule de récurrence entre J_γ et $J_{\gamma-1}$. Comme on connaît J_1, elle permet de calculer de proche en proche J_2, J_3, ...

Le problème de l'intégration de $\int \frac{f(x)}{\varphi(x)}dx$ est résolu et nous sommes conduits au résultat suivant : l'intégrale d'une fraction rationnelle est la somme de fractions rationnelles en x, de fonctions de la forme $L|x-a|$ et de fonctions de la forme arc tang $\frac{x-\lambda}{\mu}$. Ces résultats ne s'appliquent, bien entendu, que dans des intervalles ne renfermant pas de racines du dénominateur.

Traitons quelques exemples :

1° $$\int \frac{dx}{x^2-1}.$$

Décomposons $\frac{1}{x^2-1}$ en ses éléments simples, par exemple par la méthode des coefficients indéterminés :

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1};$$

on trouve

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -\frac{1}{2},$$

d'où

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)},$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1},$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}|x-1| - \frac{1}{2}\,\mathrm{L}|x+1| = \mathrm{L}\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}.$$

2° $$\int \frac{x^6\,dx}{x^4+1}.$$

La fraction rationnelle $\frac{x^6}{x^4+1}$ a une partie entière qui est x^2. Quant à x^4+1, décomposons-le en deux polynomes du second degré

$$x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 - x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1),$$

d'où

$$\frac{x^6}{x^4+1} = x^2 + \frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{A'x+B'}{x^2-x\sqrt{2}+1},$$

A, B, A′, B′ étant des coefficients à déterminer. Multiplions les deux membres par x^4+1 et identifions. On a d'abord

$$0 = A + A',$$
$$0 = B + B',$$

en prenant les termes extrêmes.

Il reste, dans le premier membre zéro et dans le second,

$$x^2 + (Ax+B)(x^2 - x\sqrt{2}+1 - x^2 - x\sqrt{2} - 1),$$

c'est-à-dire que l'on a

$$x^2 - 2x\sqrt{2}(Ax+B) = 0,$$

d'où

$$B = 0, \qquad A = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

On a, pour l'intégrale cherchée,

$$\int \frac{x^6\,dx}{x^4+1} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x\,dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Pour calculer $\int \frac{x\,dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}$, écrivons

$$x^2+x\sqrt{2}+1 = \left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

et posons

$$\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=t,$$

d'où résulte

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(t-1) \qquad \text{et} \qquad dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\,dt.$$

L'élément différentiel devient

$$\frac{\frac{1}{2}(t-1)\,dt}{\frac{1}{2}(t^2+1)}.$$

On est ramené à calculer

$$\int\frac{t\,dt}{t^2+1}-\int\frac{dt}{t^2+1},$$

ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}(t^2+1)-\operatorname{arc\,tang} t$$

ou, en revenant à la variable x,

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\left[1+\left(x\sqrt{2}+1\right)^2\right]-\operatorname{arc\,tang}\left(x\sqrt{2}+1\right).$$

On ferait pour l'autre intégrale, $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$, un calcul analogue, en remplaçant $\sqrt{2}$ par $-\sqrt{2}$. On obtient ainsi finalement

$$\int\frac{x^6\,dx}{x^4+1}=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\left(x\sqrt{2}+1\right)^2}{1+\left(1-x\sqrt{2}\right)^2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tang}\left(x\sqrt{2}+1\right)$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tang}\left(1-x\sqrt{2}\right).$$

97. L'intégration d'une fonction rationnelle de différentes puissances de x, soient x^{α}, $x^{\alpha'}$, $x^{\alpha''}$, …, α, α', α'', … étant *rationnels*, se ramène à la question précédente : réduisons les nombres α, α', α'' au même dénominateur q. Toutes les puissances considérées sont puissances entières de $x^{\frac{1}{q}}$. En posant $t=x^{\frac{1}{q}}$, d'où $x=t^q$, l'élément différentiel se transforme en un élément rationnel en t.

Si l'on a une expression rationnelle par rapport à x et par rapport à une expression de la forme $\sqrt[m]{ax+b}$ ou $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, m étant un entier positif, on prend comme nouvelle variable t le radical. On a

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$$

d'où l'on tire x en fonction rationnelle de t. L'élément différentiel donné se transforme en un élément rationnel en t.

98. Considérons le cas où l'on a à intégrer une fonction rationnelle de x et d'un radical carré portant sur un polynome du second degré, $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, $(A \neq 0)$. Il y a deux cas à examiner.

1° $A > 0$. — On pose $\sqrt{Ax^2+Bx+C} = \sqrt{A}\,x + t$. En élevant au carré, on voit que x s'exprime en fonction rationnelle de la nouvelle variable t; il en est donc de même pour $\frac{dx}{dt}\cdot$ Le radical s'exprimant lui aussi en fonction rationnelle de t, l'élément différentiel donné se transforme en un autre élément rationnel en t.

2° $A < 0$. — Remarquons qu'on doit alors se borner au cas où le trinome Ax^2+Bx+C a ses racines réelles, car, dans le cas contraire, il est constamment négatif. Soient a et b ces racines $(a < b)$; le radical est, à un facteur constant près, de la forme $\sqrt{(x-a)(b-x)}$. On doit supposer x compris entre a et b. Posons

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (x-a)\,t,$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} \qquad \text{ou} \qquad t^2 = \frac{b-x}{x-a}\cdot$$

x est ainsi déterminé en fonction rationnelle de t; donc le radical l'est aussi. L'élément différentiel donné se transforme par le changement de variable en un élément différentiel rationnel par rapport à t.

Signalons les cas particuliers suivants. On sait que l'on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

la détermination de $\arcsin x$ devant être précisée. On peut ramener à cette forme l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ en posant $\frac{x}{a} = x'$. Par ce changement de variable, on est ramené à calculer $\int \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}}\cdot$ L'intégrale cherchée est $\arcsin x'$, c'est-à-dire $\arcsin\frac{x}{a}\cdot$

Prenons encore $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}}\cdot$ Posons

$$\sqrt{x^2+h} = -x+t,$$

d'où

$$x = \frac{t}{2} - \frac{h}{2t}, \qquad dx = \frac{h}{2t^2}dt + \frac{dt}{2} = \frac{h+t^2}{2t^2}dt.$$

Par le changement de variable, l'élément différentiel devient

$$\frac{\frac{h+t^2}{2t^2}\,dt}{\frac{h}{2t}+\frac{t}{2}} = \frac{dt}{t}.$$

L'intégrale est $\mathrm{L}\,|t|$. Revenons à la variable x. On a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+h}} = \mathrm{L}\left|x+\sqrt{x^2+h}\right|.$$

Les intégrales de la forme $\int f\left[x, \sqrt{\mathrm{P}(x)}\right] dx$, où f est une fonction rationnelle et $\mathrm{P}(x)$ un polynome en x de degré supérieur à 2, s'appellent *intégrales elliptiques* [1] si le degré de P est égal à 3 ou à 4, *intégrales hyperelliptiques* si le degré surpasse 4.

99. *Différentielle binome.* — On appelle ainsi une différentielle de la forme $x^m(ax^n+b)^p\,dx$, m, n et p étant des nombres rationnels. Pour étudier une telle différentielle, posons

$$ax^n = bt,$$

d'où

$$x = \left(\frac{b}{a}t\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{dx}{dt} = 2\alpha\, t^{\frac{1}{n}-1},$$

α étant un certain coefficient numérique; x^m devient une certaine puissance de t, de sorte que la différentielle donnée prend la forme $t^q(1-t)^p\,dt$, q et p étant des nombres rationnels. L'intégration peut s'effectuer dans les trois cas suivants : l'un des nombres p, q, $p+q$ est entier. En effet, supposons d'abord p entier. Soit $q=\frac{r}{s}\cdot$ On pose $t^{\frac{1}{s}} = u$ et l'on est ramené à l'intégration d'un polynome.

Si q est entier, la question se traite de la même façon.

Si $p+q$ est entier, on écrit l'élément différentiel $t^{p+q}\left(\frac{1+t}{t}\right)^p dt$. Soit $p=\frac{r}{s}$, r et s étant entiers. En posant $\left(\frac{1+t}{t}\right)^{\frac{1}{s}} = u$, on est ramené à intégrer une fraction rationnelle.

---

(1) *Voir*, pour les intégrales elliptiques, chap. VII.

100. *Fonctions transcendantes.* — On a

$$\int e^x\,dx = e^x, \qquad \int e^{mx}\,dx = \frac{1}{m}e^{mx}.$$

Considérons maintenant l'intégrale $\int f(e^{mx})\,dx$, f étant une fonction rationnelle. Prenons comme nouvelle variable $t = e^{mx}$. L'élément différentiel prend la forme $\frac{f(t)\,dt}{mt}\cdot$ On est ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle en t.

Fonctions trigonométriques. — Rappelons les formules

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x,$$

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\mathrm{L}\,|\cos x|,$$

$$\int \cot\ x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \mathrm{L}\,|\sin x|.$$

Si l'on a à intégrer une fonction rationnelle de $\sin x$ et de $\cos x$, $f(\sin x, \cos x)$, on ramène la question à une intégration de fraction rationnelle en exprimant $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\operatorname{tang}\frac{x}{2}\cdot$ Calculons par exemple $\int \frac{dx}{\sin x}\cdot$ En posant $\operatorname{tang}\frac{x}{2} = t$, on a

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad dt = (1+t^2)\frac{dx}{2}\cdot$$

Nous sommes conduits aux calculs suivants :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \mathrm{L}\left|\operatorname{tang}\frac{x}{2}\right|\cdot$$

Pour trouver $\int \frac{dx}{\cos x}$, on pose $x = y + \frac{\pi}{2}$; l'intégrale devient

$$-\int \frac{dy}{\sin y} = -\mathrm{L}\left|\operatorname{tang}\frac{y}{2}\right| = \mathrm{L}\left|\cot\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|\cdot$$

Soit maintenant une intégrale de la forme $\int \sin^m x \cos^p x\,dx$ (m et p entiers positifs). On peut lui appliquer la méthode générale; mais il est préférable de transformer $\sin^m x$ et $\cos^p x$ en combi-

naisons linéaires de $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, ..., puis de transformer un terme tel que $\sin kx \sin hx$ en somme ou en différence de sin et de cos. On est ainsi ramené à des expressions telles que $\int \sin qx\,dx$ et $\int \cos qx\,dx$, qui sont connues.

Considérons encore les deux intégrales

$$\mathrm{A} = \int e^{ax}\cos bx\,dx, \qquad \mathrm{B} = \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

Intégrons chacune d'elles par parties en considérant $e^{ax}\,dx$ comme différentielle de $\frac{1}{a}e^{ax}$:

$$\mathrm{A} = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\mathrm{B} = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

ou

$$\mathrm{A}a - \mathrm{B}b = e^{ax}\cos bx,$$

$$\mathrm{A}b + \mathrm{B}a = e^{ax}\sin bx,$$

d'où, en résolvant ces deux équations linéaires en A et B,

$$(a^2 + b^2)\,\mathrm{A} = e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx),$$

$$(a^2 + b^2)\,\mathrm{B} = e^{ax}(-b\cos bx + a\sin bx).$$

101. Il est essentiel de remarquer que c'est par exception que l'intégrale d'une fonction élémentaire, même simple, peut s'exprimer par une combinaison de fonctions élémentaires. D'ailleurs, une fonction définie par une intégrale peut souvent être étudiée avec autant de facilité qu'une combinaison de fonctions élémentaires; en particulier, le sens de la variation de cette fonction est indiqué par le signe de la fonction que l'on intègre.

V. — Extensions de l'intégrale définie.

102. La notion d'intégrale définie peut recevoir certaines extensions. En premier lieu, soit l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. Il peut arriver que, le nombre b tendant vers $+\infty$ d'une manière quelconque, cette

intégrale tende vers une limite déterminée et finie. On désigne alors cette limite par $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Par exemple, en supposant $n > 1$, $0 < x_0 < x$, on a

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{1-n}\left(\frac{1}{x^{n-1}} - \frac{1}{x_0^{n-1}}\right).$$

Si x tend vers $+\infty$, le second membre tend vers $\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{x_0^{n-1}}$. On exprime ce fait en écrivant $\int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{(n-1)\,x_0^{n-1}}$.

De même, on désigne par $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ la limite, si elle existe, vers laquelle tend $\int_a^b f(x)\,dx$ quand a tend vers $-\infty$.

Enfin, si $f(x)$ est définie et continue pour toutes les valeurs de x, et si les conditions précédentes sont remplies pour $+\infty$ et $-\infty$, on pose par définition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si l'on considère maintenant l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x}$, on voit qu'elle tend vers $+\infty$ avec x, car l'intégrale indéfinie est $\mathrm{L}\,|x|$. On dit que $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x}$ n'a pas de sens.

D'une façon générale, si l'on connaît la fonction primitive de la fonction sous le signe $\int$, la question de savoir si l'intégrale avec limite supérieure ou inférieure infinie a un sens ou non revient à étudier si la fonction primitive a ou non une limite finie quand la variable tend vers $\pm\infty$. Quand on ne connaît pas cette fonction primitive, nous allons montrer qu'on peut, dans certains cas, étudier la question en comparant l'intégrale avec des intégrales connues.

103. Soit φ une fonction *positive* telle que $\int_a^{+\infty} \varphi\,dx$ ait un sens; soit f une fonction telle que, pour $x > a$, on a $|f| < \varphi$; je dis que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ a une limite déterminée et finie quand b tend vers $-\infty$ d'une manière quelconque. Distinguons deux cas :

1° f est positif. On a, quel que soit b supérieur à a,

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b \varphi\,dx,$$

car (nº 89, p. 77) $\varphi - f \geq 0$ entraîne $\int_a^b (\varphi - f)\,dx \geq 0$.

De sorte que l'on a la double inégalité

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b \varphi\,dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi\,dx.$$

Quand b tend vers $+\infty$ par des valeurs croissantes $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, la première intégrale croît et reste inférieure à un nombre fini. Donc elle tend vers une limite finie, qui est la borne supérieure des nombres $\int_a^b f\,dx$, quand b prend toutes les valeurs possibles supérieures à a, donc est indépendante de la suite choisie.

2° f n'est pas nécessairement positif. Écrivons $f = (f + |f|) - |f|$ et rappelons que $|f|$ est fonction continue si f l'est. On a

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^b (f + |f|)\,dx - \int_a^b |f|\,dx$$

avec les deux inégalités

$$|f| < \varphi, \qquad 0 \leq f + |f| < 2\varphi.$$

Chacune des intégrales du second membre rentre dans le cas précédent, donc tend vers une limite quand b tend vers $+\infty$. Par suite, le premier membre tend aussi vers une limite.

Comme application de ce résultat, étant donnée une fonction f, si l'on peut la mettre sous la forme $\frac{\psi}{x^n}$ avec les conditions $n > 1$, $|\psi| < A$, A étant un certain nombre positif, on peut affirmer que $\int_a^{+\infty} f\,dx$ a un sens, car on a $|f| < \frac{A}{x^n}$, et $\int_a^{+\infty} \frac{A}{x^n}\,dx$ a un sens.

Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ a un sens.

Si l'on peut mettre la fonction donnée f sous la forme $\frac{\psi}{x}$, $|\psi|$ restant supérieur, à partir d'une certaine valeur de x, à un nombre α positif, $\int_a^b f\,dx$ croît indéfiniment en module avec b. En effet, ψ garde,

à partir d'un certain moment, un signe constant, par exemple le signe $+$, d'où $f > \frac{\alpha}{x}$ et, par suite,

$$\int_a^b f\,dx > \alpha \int_a^b \frac{dx}{x};$$

et, comme la seconde intégrale croît indéfiniment avec b, il en est de même de la première.

104. Prenons comme exemple une intégrale de fraction rationnelle, $\int \frac{\mathrm{P}\,dx}{\mathrm{Q}}$. Si p est le degré de P, q celui de Q, la fonction $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est, comme l'on sait, comparable à x^{p-q}, en entendant par là que le rapport de $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ à x^{p-q} tend vers un nombre fini et différent de o quand x croît indéfiniment. Si $q \geqq p+2$, $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ est comparable à $\frac{1}{x^2}$ ou $\frac{1}{x^n}$ $(n \geqq 2)$. L'intégrale $\int \frac{\mathrm{P}\,dx}{\mathrm{Q}}$, prise avec la limite supérieure infinie, a un sens. Dans le cas contraire, la condition de divergence s'applique. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\,dx$ *ait un sens est donc que le degré du dénominateur dépasse de deux unités au moins celui du numérateur.*

Prenons comme second exemple l'intégrale $\int \frac{\mathrm{P}\,dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}$. Soient p le degré de P, r celui de R. Quand x croît indéfiniment, $\frac{\mathrm{P}}{\sqrt{\mathrm{R}}}$ est de l'ordre de $x^{p-\frac{r}{2}}$. Il faut, pour que l'intégrale ait un sens, que l'on ait $\frac{r}{2} - p > 1$, ou $r \geqq 2p+3$.

Toutes ces conclusions s'appliquent encore si la limite inférieure de l'intégrale est $-\infty$.

105. Étudions maintenant une autre extension de l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ relative au cas où f tend vers une valeur infinie, quand la variable tend vers une certaine valeur finie. Nous supposons par exemple que, $f(x)$ étant continue dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b)$, quel que soit ε positif, $f(x)$ tende vers l'infini quand ε tend vers o.

Il peut arriver, dans ces conditions, que la valeur de l'intégrale

$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ ait une limite déterminée et finie. Si cela a lieu, on convient de désigner cette limite par $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

On a, par exemple, en supposant $0 < \mu < 1$,

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}} = \frac{1}{1-\mu}[(b-a)^{1-\mu} - \varepsilon^{1-\mu}].$$

Quand ε tend vers zéro, cette expression a une limite déterminée et finie. D'après la convention faite, on pose

$$\int_{a}^{b} \frac{dx}{(x-a)^{\mu}} = \frac{(b-a)^{1-\mu}}{1-\mu}.$$

Si l'on a $\mu > 1$, l'intégrale n'a pas de limite finie quand ε tend vers zéro, car $\varepsilon^{1-\mu}$ croît indéfiniment.

106. Étant données, d'une part, une fonction φ, positive et telle que l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi\,dx$ ait une limite déterminée et finie quand ε tend vers zéro, d'autre part, une fonction f, inférieure en valeur absolue à φ dans l'intervalle considéré, l'intégrale $\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx$ a aussi une limite quand ε tend vers zéro.

En effet, supposons d'abord $f \geqq 0$, nous avons

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx < \int_{a+\varepsilon}^{b} \varphi\,dx < \int_{a}^{b} \varphi\,dx.$$

La première intégrale ne peut que croître quand ε décroît; comme elle reste inférieure à un nombre fini, elle tend vers une limite déterminée quand ε prend une suite de valeurs tendant vers zéro, limite qui est la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\int_{a+\varepsilon}^{b} f\,dx$, donc ne dépend pas de la suite de valeurs choisies pour ε.

Si f n'est pas nécessairement positif, on écrit

$$\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \int_{a+\varepsilon}^{b} [f(x) + |f(x)|]\,dx - \int_{a+\varepsilon}^{b} |f(x)|\,dx.$$

Chacune des intégrales du second membre a une limite quand ε tend vers zéro. Donc le premier membre a aussi une limite.

Comme conséquence, on voit que, si l'on peut mettre une fonction $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{(x-a)^{\mu}},$$

avec les conditions $\mu < 1$, $|\psi(x)| < A$, A étant un certain nombre positif, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ a un sens.

Appliquons ceci aux intégrales de la forme $\int \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$. Soit a une racine simple du polynome $R(x)$ qui ne soit pas racine du polynome $P(x)$. Montrons que $\int_a^b \frac{P(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ a un sens.

Dans un certain intervalle contenant a, on peut poser

$$\frac{P}{\sqrt{R}} = \frac{\psi}{\sqrt{x-a}},$$

ψ étant borné en module dans cet intervalle. Le nombre μ, considéré plus haut, est ici égal à $\frac{1}{2}$; donc l'intégrale prise entre les limites a et b a un sens.

Par exemple, l'intégrale $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ a un sens; d'ailleurs, la fonction primitive étant $\arc\sin x$, l'intégrale a pour valeur $\frac{\pi}{2}$.

Soit une intégrale de fraction rationnelle, $\int \frac{P}{Q}\,dx$; soit a une racine simple de Q, non racine de P; $\frac{P}{Q}$ est, au voisinage de a, de l'ordre de $\frac{1}{x-a}$. On peut mettre $\frac{P}{Q}$ sous la forme $\frac{\psi}{x-a}$, ψ restant supérieur en module à un nombre positif α. On en conclut que l'intégrale $\int_x^b \frac{P}{Q}\,dx$ croît indéfiniment quand x tend vers a.

VI. — Fonctions représentées par des intégrales définies.

107. Supposons que l'on ait une fonction $f(x, \alpha, \beta, \ldots)$, continue par rapport à l'ensemble des $n+1$ variables $x, \alpha, \beta, \ldots$ Posons

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \ldots) = \int_a^b f(x, \alpha, \beta, \ldots)\,dx,$$

a et b pouvant être fonctions de $\alpha, \beta, \ldots$

Nous dirons que $\alpha, \beta, \ldots$ sont des *paramètres* pour l'intégrale.

Faisons les hypothèses suivantes. Dans un certain domaine borné D de l'espace à $n+1$ dimensions relatif aux variables $x, \alpha, \beta, \ldots$:

1° f est continue par rapport à l'ensemble des variables $x, \alpha, \beta, \ldots$.

2° a, b sont fonctions continues de $\alpha, \beta, \ldots$.

Dans ces conditions, je dis que F est fonction continue de $\alpha, \beta, \ldots$.

Attribuons d'abord aux paramètres un système de valeurs $\alpha, \beta, \ldots$; puis donnons-leur des accroissements $\Delta\alpha, \Delta\beta, \ldots$. Soient $\Delta a, \Delta b$ les accroissements correspondants de a et b, ΔF celui de F. On a

$$F(\alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta, \ldots) = \int_{a+\Delta a}^{b+\Delta b} f(x, \alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta, \ldots)\,dx$$

ou encore

$$F(\alpha+\Delta\alpha, \ldots) = \int_a^b f(x, \alpha+\Delta\alpha, \ldots)\,dx + \int_b^{b+\Delta b} f(x, \alpha+\Delta\alpha, \ldots)\,dx - \int_a^{a+\Delta a} f(x, \alpha+\Delta\alpha, \ldots)\,dx.$$

Retranchons des deux membres de cette égalité ceux de (1). On a

$$(2)\quad \begin{cases} \Delta F = \displaystyle\int_a^b [f(x, \alpha+\Delta\alpha, \ldots) - f(x, \alpha, \beta, \ldots)]\,dx \\ \quad + \displaystyle\int_b^{b+\Delta b} f(x, \alpha+\Delta\alpha, \ldots)\,dx - \int_a^{a+\Delta a} f(x, \alpha+\Delta\alpha, \ldots)\,dx. \end{cases}$$

Étant donné ε positif, on peut trouver un nombre positif η tel que les conditions $|\Delta\alpha| < \eta$, $|\Delta\beta| < \eta$, ... entraînent pour tous les points du domaine borné D

$$|f(x, \alpha+\Delta\alpha, \beta+\Delta\beta, \ldots) - f(x, \alpha, \beta, \ldots)| < \varepsilon.$$

La valeur absolue de la première intégrale du second membre de (2) est, dans ces conditions, inférieure à $\varepsilon\,|b-a|$; par suite, elle peut être rendue aussi petite que l'on veut.

Quant à la seconde intégrale, elle est inférieure en valeur absolue à $|\Delta b|.M$, M étant la borne supérieure du module de f dans le domaine D; donc elle tend vers zéro avec Δb. De même, la troisième tend vers zéro avec Δa.

Donc, ΔF tend vers zéro avec $\Delta\alpha, \Delta\beta, \ldots$; F *est fonction continue par rapport à l'ensemble des paramètres* $\alpha, \beta, \ldots$.

108. Je dis maintenant que, si $f(x, \alpha, \beta, \ldots)$, a, b ont, par rapport à α, des dérivées, et si f'_α est continue par rapport à l'ensemble des variables x, α, F a une dérivée par rapport à α.

Reprenons la formule (2) en faisant varier un seul des paramètres, α par exemple. La formule s'écrit

$$(3)\quad \begin{cases} \Delta F = \displaystyle\int_a^b [f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha)]\, dx \\ \qquad + \displaystyle\int_b^{b+\Delta b} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx - \int_a^{a+\Delta a} f(x, \alpha+\Delta\alpha)\, dx. \end{cases}$$

Dans la première intégrale, on a

$$f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha) = \Delta\alpha\, f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha), \qquad (0 < \theta < 1).$$

Par suite de la continuité de la dérivée partielle f'_α, à tout nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que la condition $|\Delta\alpha| < \eta$ entraîne, pour tous les points du domaine D,

$$|f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha) - f'_\alpha(x, \alpha)| < \varepsilon,$$

de sorte que l'on peut poser

$$f'_\alpha(x, \alpha+\theta\Delta\alpha) = f'_\alpha(x, \alpha) + \varphi(x, \alpha) \qquad (|\varphi| < \varepsilon).$$

Le rapport de la première intégrale du second membre de (3) à $\Delta\alpha$ est

$$\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx + \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx.$$

Or, le second terme de cette somme tend vers zéro en même temps que $\Delta\alpha$, car il est inférieur en module à $\varepsilon(b-a)$.

En résumé, le rapport à $\Delta\alpha$ de la première intégrale du second membre de (3) tend, quand $\Delta\alpha$ tend vers 0, vers

$$\int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\, dx.$$

Prenons maintenant la seconde intégrale. Nous l'écrivons (n° 89)

$$\Delta b . f(b+\theta\Delta b, \alpha+\Delta\alpha) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Son rapport à $\Delta\alpha$, quand $\Delta\alpha$ tend vers zéro, tend vers $b'_\alpha f(b, \alpha)$. De même, le rapport de la troisième à $\Delta\alpha$ tend vers $a'_\alpha f(a, \alpha)$.

Il résulte de là que F a une dérivée par rapport à α, savoir :

$$F_\alpha = \int_a^b f'_\alpha(x, \alpha)\,dx + b'_\alpha f(b, \alpha) - a'_\alpha f(a, \alpha).$$

C'est la formule de dérivation sous le signe $\int$.

Si les limites a, b sont indépendantes du paramètre, les deux derniers termes disparaissent et l'on a la règle suivante : *Pour dériver l'intégrale par rapport au paramètre, on remplace, sous le signe $\int$, la fonction à intégrer par sa dérivée par rapport au paramètre.*

VII. — Fonctions implicites.

109. Considérons une équation

$$(1) \qquad F(x, \ldots, y, u) = 0,$$

dont le premier membre F est une fonction continue par rapport à l'ensemble des $(n+1)$ variables $x, \ldots, y, u$ et a des dérivées partielles également continues par rapport à l'ensemble des variables. On sait, par des exemples simples, que, dans certains cas, on peut résoudre l'équation (1) par rapport à u, c'est-à-dire trouver pour u une fonction des variables $x, \ldots, y$ qui vérifie l'équation (1). Nous nous proposons d'établir, sous certaines conditions à fixer ultérieurement, un théorème général d'existence d'une telle fonction.

Supposons qu'il y ait un point $(x_0, \ldots, y_0, u_0)$ tel que l'on ait

$$(2) \qquad F(x_0, \ldots, y_0, u_0) = 0$$

avec

$$(3) \qquad F'_u(x_0, \ldots, y_0, u_0) \neq 0.$$

Choisissons un nombre positif B tel que $B < |F'_{u_0}|$. A cause de la continuité de F'_u par rapport aux variables $x, \ldots, y, u$, on peut trouver un champ C,

$$|x - x_0| \leq \alpha, \qquad \ldots, \qquad |y - y_0| \leq \alpha, \qquad |u - u_0| \leq \alpha,$$

tel que dans ce champ C, si F'_{u_0} est positif, auquel cas $B < F'_{u_0}$, on ait $F'_u > B$; si F'_{u_0} est négatif, auquel cas $-B > F'_{u_0}$, on ait $F'_u < -B$.

Ainsi, dans C, on a, dans tous les cas,

$$|F'_u| > B.$$

De plus, F'_u a, dans ce champ, le signe de F'_{u_0}.

Les dérivées $F'_x, \ldots, F'_y$ sont bornées dans C; soit A un nombre positif supérieur à la valeur absolue de chacune d'elles.

Cela posé, prenons un point $(x, \ldots, y, u)$ de C; soit $x = x_0 + \Delta x, \ldots,$ $y = y_0 + \Delta y$, $u = u_0 + \Delta u$.

Évaluons $F(x, \ldots, y, u)$, qui peut s'écrire

$$F(x_0 + \Delta x, \ldots, y_0 + \Delta y, u_0 + \Delta u) - F(x_0, \ldots, y_0, u_0).$$

En appliquant à cette expression la formule des accroissements finis pour plusieurs variables, on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} F(x, \ldots, y, u) = \;& F'_x(x_0 + \theta\Delta x, \ldots, y_0 + \theta\Delta y, u_0 + \theta\Delta u)\Delta x \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ F'_y(x_0 + \theta\Delta x, \ldots, y_0 + \theta\Delta y, u_0 + \theta\Delta u)\Delta y \\ &+ F'_u(x_0 + \theta\Delta x, \ldots, y_0 + \theta\Delta y, u_0 + \theta\Delta u)\Delta u, \end{aligned}\right.$$

avec $0 < \theta < 1$.

Le point $(x_0 + \theta\Delta x, \ldots, y_0 + \theta\Delta y, u_0 + \theta\Delta u)$ appartenant au champ C, les n premiers termes sont respectivement inférieurs en module à $A|\Delta x|, \ldots, A|\Delta y|$, et le dernier terme est supérieur en module à $B|\Delta u|$. Je dis qu'il est possible de choisir $\Delta x, \ldots, \Delta y, \Delta u$ de façon que ce dernier terme donne son signe au second membre. En effet, prenons un nombre positif h tel qu'on ait à la fois

$$h \leqq \alpha, \qquad nAh < B\alpha.$$

Donnons aux n accroissements $\Delta x, \ldots, \Delta y$ des valeurs moindres en module que h et à Δu l'une des deux valeurs $\pm\alpha$. Dans le second membre de la formule (3) (qui est applicable puisque $\Delta x, \ldots, \Delta y$, Δu sont moindres en module que α), la somme des n premiers termes est plus petite en module que nAh, tandis que le $(n+1)^{\text{ième}}$ est supérieur en module à $B\alpha$ et, par suite, à la somme des n premiers. Donc ce $(n+1)^{\text{ième}}$ terme donne son signe au second membre. Or F'_u, dans le champ considéré, a un signe constant. Donc, quand on donne successivement à Δu les valeurs $+\alpha$ et $-\alpha$, $\Delta x, \ldots, \Delta y$ étant arbitraires et moindres en module que h, on obtient, pour $F(x, \ldots, y, u)$, deux valeurs de signes contraires.

D'après cela, si, dans la fonction $F(x, \ldots, y, u)$, on fait varier u de $u_0 - \alpha$ à $u_0 + \alpha$, les autres variables étant fixées, la dérivée F'_u

garde un signe constant, la fonction varie donc toujours dans le même sens; or, elle prend des valeurs de signes contraires pour les valeurs extrêmes de u. Donc elle s'annule une fois, et une seule, dans l'intervalle.

Il y a donc pour u une valeur bien déterminée, comprise entre $u_0 - \alpha$ et $u_0 + \alpha$, telle que l'on a

$$F(x, \ldots, y, u) = 0.$$

En particulier, si l'on fait $x = x_0, \ldots, y = y_0$, la valeur u correspondante, qui est unique, est nécessairement égale à u_0, en vertu de la condition (2).

Nous voyons ainsi qu'à un système de valeurs de $x, \ldots, y$, vérifiant les conditions

$$|x - x_0| \leqq h, \qquad \ldots, \qquad |y - y_0| \leqq h,$$

correspond pour u une valeur unique satisfaisant à la condition

$$|u - u_0| \leqq \alpha$$

et vérifiant l'équation (1). Cette variable u, qui dépend des premières variables $x, \ldots, y$, est dite *une fonction implicite de* $x, \ldots, y$, *définie par l'équation* (1). Elle se réduit à u_0 quand $x, \ldots, y$ se réduisent à $x_0, \ldots, y_0$.

Montrons que c'est une fonction continue et pourvue de dérivées par rapport à chacune des variables $x, \ldots, y$.

Soit C′ le champ des n variables :

$$|x - x_0| \leqq h, \qquad \ldots, \qquad |y - y_0| \leqq h.$$

Soient, dans ce champ, deux points $(x, \ldots, y)$, $(x + \Delta x, \ldots, y + \Delta y)$; soient u et $u + \Delta u$ les valeurs correspondantes de la fonction u qui vient d'être définie : on a

$$F(x, \ldots, y, u) = 0, \qquad F(x + \Delta x, \ldots, y + \Delta y, u + \Delta u) = 0.$$

Appliquons à la différence des premiers membres la formule des accroissements finis. Il vient

$$\begin{aligned} 0 = \ & F'_x(x + \theta\Delta x, \ldots, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u)\,\Delta x + \ldots \\ & + F'_y(x + \theta\Delta x, \ldots, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u)\,\Delta y \\ & + F'_u(x + \theta\Delta x, \ldots, y + \theta\Delta y, u + \theta\Delta u)\,\Delta u; \end{aligned}$$

d'où

$$\Delta u = -\frac{F'_x(x + \theta\Delta x \ \ldots)}{F'_u(\ \ldots\ )}\,\Delta x - \ldots - \frac{F'_y(x + \theta\Delta x \ \ldots)}{F'_u(\ \ldots\ )}\,\Delta y.$$

Cette formule montre que, si $\Delta x, \ldots, \Delta y$ tendent vers zéro, il en est de même de Δu. Donc u est fonction continue de l'ensemble des variables $x, \ldots, y$. En outre, si les accroissements $\Delta x, \ldots, \Delta y$ sont tous nuls sauf un, Δx par exemple, le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, à cause de la continuité des dérivées F'_x et F'_u, a pour limite, quand Δx tend vers zéro,

$$-\frac{F'_x(x, \ldots, y, u)}{F'_u(x, \ldots, y, u)}.$$

Donc u a une dérivée par rapport à x, donnée par la formule

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u}.$$

Pour les autres variables on a des formules analogues.

Remarquons qu'une fois démontrée l'existence de ces dérivées partielles, on peut les obtenir en dérivant l'équation (1).

Les variables indépendantes étant $x, \ldots, y$, et u étant fonction de $x, \ldots, y$, la dérivée de F par rapport à x par exemple est

$$F'_x + F'_u u'_x,$$

et comme F, lorsqu'on y considère u comme fonction de $x, \ldots, y$, est nulle quelles que soient ces variables $x, \ldots, y$, sa dérivée par rapport à x est aussi nulle; d'où $u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u}$.

On peut aussi différentier le premier membre de l'équation (1), les variables indépendantes étant toujours $x, \ldots, y$. En écrivant que cette différentielle est nulle, on a

$$F'_x\, dx + \ldots + F'_y\, dy + F'_u\, du = 0,$$

d'où

$$du = -\frac{F'_x}{F'_u}dx - \ldots - \frac{F'_y}{F'_u}dy.$$

Il résulte de là (nº 85)

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u}, \qquad \ldots.$$

Dans le cas où F'_{u_0} est nul, des exemples fournis par l'algèbre montrent qu'il peut y avoir plusieurs fonctions des variables $x, \ldots, y$, se réduisant à u_0 pour $x_0, \ldots, y_0$.

110. Prenons maintenant deux équations mises sous la forme

(1) $$F(x, \ldots, y, u, v) = 0,$$

(2) $$\Phi(x, \ldots, y, u, v) = 0$$

et proposons-nous de tirer de ces équations deux des variables, par exemple u, v, en fonction des autres.

D'après ce qui précède, si l'on a un point $(x_0, \ldots, y_0, u_0, v_0)$ tel que

$$F(x_0, \ldots y_0, u_0, v_0) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x_0, \ldots y_0, u_0, v_0) \neq 0,$$

on peut résoudre la première équation par rapport à u et déterminer une certaine fonction $u = \varphi(x, \ldots, y, v)$ vérifiant identiquement l'équation (1).

Étudions l'expression obtenue en remplaçant, dans Φ, u par φ. C'est une fonction de $x, \ldots, y, v$. Posons

$$\Phi(x, \ldots, y, \varphi, v) = F_1(x, \ldots, y, v).$$

Cherchons à résoudre l'équation $F_1 = 0$ par rapport à v. Pour cela, il y a lieu de considérer $\frac{\partial F_1}{\partial v}$. Si l'on a pour le point considéré

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} \neq 0,$$

la résolution peut s'effectuer; or, on a

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}.$$

La fonction φ est telle que l'expression $F(x, \ldots, y, \varphi, v)$ est identiquement nulle quand $x, \ldots, y, v$ sont variables indépendantes; on a donc, en dérivant F par rapport à v,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}},$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\frac{\partial F}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial u}} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \Phi}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Sous cette forme, le numérateur est le développement du déter-

minant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial u} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

La résolution est donc possible si ce déterminant est différent de zéro. Nous allons étendre ce résultat.

111. *Déterminant fonctionnel.* — Soient n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On appelle *déterminant fonctionnel des f par rapport aux x le déterminant*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

On le désigne par la notation $\frac{D(f_1 f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1 x_2, \ldots, x_n)}$; on l'appelle encore *jacobien*.

112. Supposons qu'on ait n équations dont les premiers membres soient fonctions de $n+p$ variables

$$(1) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{cases}$$

On suppose que ces fonctions sont continues par rapport à l'ensemble des variables, au moins dans un certain domaine D, et ont des dérivées partielles toutes continues.

Supposons qu'en un point $(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ intérieur au domaine D, le déterminant fonctionnel des F par rapport aux y ait une valeur différente de zéro. Soit donc

$$\left[\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)}\right]_{\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_n} \neq 0.$$

Dans ces conditions, je dis qu'on peut trouver pour $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des fonctions continues des autres variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui seront

définies dans un certain champ contenant le point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, qui se réduiront à $\eta_1, \ldots, \eta_n$ quand $x_1, \ldots, x_p$ se réduiront à $\xi_1, \ldots, \xi_p$ et qui auront par rapport aux x des dérivées partielles continues.

Ce théorème a été démontré dans le cas de $n = 1$ (n° 109). Pour faire voir qu'il est général, nous l'admettrons pour $1, 2, \ldots, n-1$ équations et nous allons le démontrer pour n.

Le déterminant fonctionnel des F par rapport aux y étant par hypothèse différent de zéro pour le point $(\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, l'un au moins des mineurs d'ordre $n-1$ de ce déterminant est différent de zéro pour le même point. En changeant au besoin les notations, on peut faire en sorte que l'on ait

$$\left[\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}\right]_{\xi_1, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_n} \neq 0.$$

Considérons alors les $(n-1)$ premières équations (1). D'après le théorème admis pour le cas de $(n-1)$ équations, on peut résoudre ces équations par rapport aux $(n-1)$ variables $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. On détermine ainsi, pour $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, des fonctions des $(p+1)$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_n$, définies au voisinage du point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_n)$, c'est-à-dire dans un certain champ auquel ce point est intérieur; elles sont continues, ont des dérivées et se réduisent à $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$, quand $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_n$ se réduisent à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_n$. Désignons par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ ces fonctions.

Remplaçons dans F_n, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, et soit

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_n) = F_n(x_1, x_2, \ldots, x_p, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, y_n).$$

Cherchons à résoudre l'équation $\Phi = 0$ par rapport à y_n. Pour cela, nous devons rechercher si $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_n}$ est différent de zéro. On a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} = \frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n} + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}. \tag{2}$$

Pour avoir les dérivées $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_n}$ qui figurent dans cette relation, dérivons chacune des $(n-1)$ premières équations (1) par rapport à y_n, les variables indépendantes étant $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_n$. On a

$$\tag{3} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}}\dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n} + \dfrac{\partial F_1}{\partial y_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1}\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} + \ldots + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}}\dfrac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n} + \dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} = 0. \end{array} \right.$$

Adjoignons aux $(n-1)$ équations (3) la relation (2), mise sous la forme

$$\frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n}+\ldots+\frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n}+\frac{\partial F_n}{\partial y_n}-\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}=0.$$

Pour éliminer les $\frac{\partial \varphi}{\partial y_n}$ entre les n équations obtenues, considérons ces équations comme formant un système de n équations linéaires et homogènes par rapport aux quantités non toutes nulles

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n},\quad \ldots,\quad \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial y_n},\quad 1.$$

Le déterminant des coefficients de ces quantités doit être nul, donc

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}-\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} \end{vmatrix}=0.$$

D'après un calcul classique sur les déterminants, on en déduit

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}-\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})}=0,$$

et, comme les deux déterminants fonctionnels sont différents de zéro pour le point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, cette relation définit $\frac{\partial \Phi}{\partial y_n}$ et montre que sa valeur est finie et différente de zéro au point considéré.

En résumé, l'équation

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, y_n)=0$$

est résoluble par rapport à y_n, au voisinage du point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \eta_n$, c'est-à-dire qu'il existe pour y_n une fonction $\psi_n(x_1, \ldots, x_p)$ satisfaisant à cette équation, définie au voisinage du point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, continue, pourvue de dérivées par rapport à $x_1, \ldots, x_p$ et se réduisant à η_n quand $x_1, x_2, \ldots, x_p$ prennent les valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

Remplaçons y_n par cette fonction dans $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$. Posons

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_p, \psi_n)=\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_p), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_p, \psi_n)=\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_p). \end{aligned}$$

$y_1, \ldots, y_{n-1}$ deviennent ainsi des fonctions de $x_1, \ldots, x_p$ et, quand $x_1, \ldots, x_p$ prennent les valeurs $\xi_1, \ldots \xi_p$, ψ_n prend la valeur η_n, y_1 prend la valeur η_1, y_2 la valeur η_2, etc.

Donc les fonctions $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-1}, \psi_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ prennent les valeurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ quand $x_1, x_2, \ldots, x_p$ prennent les valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$. De plus, ce sont des fonctions continues et ayant des dérivées. Enfin, elles vérifient les n équations (1). En effet, d'abord les $(n-1)$ premières équations étant vérifiées quand on y remplace $y_1, \ldots, y_{n-1}$ par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, le sont encore quand y_n est une certaine fonction au lieu d'être variable indépendante. Quant à la dernière, elle est équivalente à $\Phi = 0$, qui est vérifiée par $y_n = \psi_n$.

L'existence des dérivées de ces fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ayant été démontrée, pour les calculer, on dérive les équations (1) successivement par rapport à chacune des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$. On a, par exemple,

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_1} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1} = 0.$$

Nous formons ainsi n équations linéaires par rapport à $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_1}$. En les résolvant, ce qui est possible, on aura l'expression de ces dérivées partielles. De même pour les autres variables, $x_2, \ldots, x_p$.

On peut aussi, au lieu de dériver, différentier les équations (1), ce qui donne

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_p}dx_p + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}dy_n = 0.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_p}dx_p + \frac{\partial F_n}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}dy_n = 0.$$

Puis, on résout ces n équations par rapport à $dy_1, dy_2, \ldots, dy_n$. Connaissant dy_1, par exemple, en fonction de $dx_1, \ldots, dx_p$, on sait (n° 85) en déduire $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y_1}{\partial x_p}$.

113. *Inversion.* — Considérons p fonctions de n variables ($p \leqq n$),

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_p = f_p(x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

On se propose de résoudre ces équations par rapport à p des variables x, c'est-à-dire d'exprimer ces p variables en fonction des y et des autres variables x. C'est ce qu'on appelle *faire l'inversion du système de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ par rapport à p des variables.*

Tout revient à résoudre le système d'équations

$$\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) = f_1 - y_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) = f_p - y_p = 0, \end{array}$$

par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Remarquons que l'on a $\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, d'où

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}.$$

Si ce dernier déterminant est différent de zéro en un certain point, la résolution pourra s'effectuer au voisinage de ce point.

Ainsi, étant donné le système de fonctions (1), si le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(f_1, f_2, \ldots f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}$ est différent de zéro pour un certain point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$, on peut, au voisinage de ce point, faire l'inversion du système donné, c'est-à-dire trouver pour x_1, $x_2, \ldots, x_p$ des fonctions continues des autres variables $x_{p+1}, \ldots, x_n$ et de $y_1, \ldots, y_p$, vérifiant les équations (1), se réduisant à $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ ξ_p lorsque $x_{p+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p$ prennent respectivement les valeurs suivantes :

$$\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n, \quad f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \ldots, \quad f_p(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

VIII. — Fonctions dépendantes et indépendantes.

114. Considérons, pour fixer les idées, la fonction de quatre variables $u = f(x, y, z, t)$, et soit $v = \varphi(u)$ une autre fonction; v peut être considéré comme une fonction de x, y, z, t. Calculons les déri-

vées de v par rapport à x, y, z, t. On a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi' \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \varphi' \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Cela posé, considérons le tableau des dérivées de u et v par rapport aux variables x, y, z, t :

$$\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{matrix}$$

On reconnaît que tout déterminant d'ordre 2 issu de ce tableau est nul comme ayant deux lignes composées d'éléments proportionnels.

Plus généralement, soient p fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, avec la condition $p \leqq n-1$, et soit une fonction $z = \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$. Formons le tableau des dérivées par rapport aux x des fonctions $y_1, \ldots, y_p, z$

$$\begin{matrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_p}{\partial x_1}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_p} \cdot \frac{\partial y_p}{\partial x_1}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n}, & \ldots, & \frac{\partial y_p}{\partial x_n}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial y_p} \cdot \frac{\partial y_p}{\partial x_n}. \end{matrix}$$

Tout déterminant d'ordre $(p+1)$ issu de ce tableau est nul, car les éléments de la dernière colonne sont constitués par une même combinaison linéaire de ceux des p premières.

115. Étant données des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on dit que ces fonctions sont *indépendantes* si aucune d'elles n'est égale à une fonction des autres ou de certaines des autres.

I. *Si $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq p)$, et si, dans le tableau des dérivées des y par rapport aux x, les déterminants d'ordre p ne sont pas tous nuls, $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont fonctions indépendantes.*

En effet, si cela n'était pas, l'une des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$ serait fonction des autres. D'après ce qui précède (n° 114), les déterminants d'ordre p, issus du tableau des dérivées, seraient tous nuls.

II. *Si $y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqq p)$, et*

si, dans le tableau des dérivées, les déterminants d'ordre p sont nuls, l'un au moins des déterminants d'ordre $(p-1)$ *étant différent de zéro, l'une des fonctions y se réduit à une fonction des autres.*

En effet, en changeant au besoin les notations, nous pouvons supposer que, dans le tableau des dérivées, le déterminant des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ est différent de zéro. Il en résulte, d'après le cas I, que les $(p-1)$ fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ sont indépendantes.

Prenons un point $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}, \xi_p, \ldots, \xi_n$ pour lequel le déterminant en question est différent de zéro. Dans un certain champ avoisinant ce point, nous pouvons effectuer l'inversion des fonctions $y_1 = f_1, y_2 = f_2, \ldots, y_{p-1} = f_{p-1}$ par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ (n° 113). On obtient ainsi, en désignant par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-p+1}$ les $(n-p+1)$ variables $x_p, \ldots, x_n$, des équations de la forme

$$x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}, u_1, \ldots, u_{n-p+1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{p-1} = \varphi_{p-1}(y_1, y_2, \ldots y_{p-1}, u_1, \ldots, u_{n-p+1}).$$

La fonction $y_p = f_p$, où l'on remplace $x_1, \ldots, x_{p-1}$, par $\varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$, devient une certaine fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}, u_1, \ldots, u_{n-p+1}$, soit

$$(1) \qquad y_p = f_p(x_1, \ldots, x_n) = \psi(y_1, \ldots y_{p-1}, u_1, \ldots, u_{n-p+1}).$$

Je dis que y_p *est indépendant des variables u*. Pour le voir, dérivons (1) par rapport à u_1 :

$$\frac{\partial\psi}{\partial u_1} = \frac{\partial f_p}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial f_p}{\partial x_{p-1}}\frac{\partial\varphi_{p-1}}{\partial u_1} + \frac{\partial f_p}{\partial u_1}.$$

Nous avons, d'autre part, les y et les u étant variables indépendantes, en dérivant par rapport à u_1, les deux membres de la relation

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, u_1, \ldots, u_{n-p+1}),$$
$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_{p-1}}\frac{\partial\varphi_{p-1}}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1}$$

et $(p-2)$ équations analogues, en remplaçant f_1 par $f_2, \ldots, f_{p-1}$.

Aux $(p-1)$ équations (2) joignons la relation qui donne $\frac{\partial\psi}{\partial u_1}$,

en l'écrivant

$$o = \frac{\partial f_p}{\partial x_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \ldots + \frac{\partial f_p}{\partial x_{p-1}}\frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial u_1} + \left(\frac{\partial f_p}{\partial u_1} - \frac{\partial \psi}{\partial u_1}\right).$$

Entre ces p équations, nous allons éliminer $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial u_1}$. Il suffit pour cela de les considérer comme formant un système de p équations linéaires et homogènes par rapport à $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{p-1}}{\partial u_1}$ et 1. Le déterminant de ces équations doit être nul. Par un calcul analogue à celui que nous avons fait dans la théorie des fonctions implicites, on obtient la formule suivante :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, u_1)} : \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_{p-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1})}.$$

Le dénominateur est différent de zéro; le numérateur, qui est un déterminant d'ordre p issu du tableau des dérivées des f par rapport aux x, est nul par hypothèse. Donc on a

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_1} = o$$

On voit de la même manière que les dérivées partielles de ψ par rapport aux autres variables u sont nulles. Donc ψ ne dépend pas de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-p+1}$; y_p se réduit à une fonction de $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$, ce qui démontre la proposition II.

III. Considérons maintenant le cas général d'un système de p fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_p$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Formons le tableau des dérivées partielles des y par rapport aux x. Dans ce tableau, cherchons un déterminant qui soit différent de zéro et tel que tous les déterminants d'ordre supérieur, issus du tableau, soient nuls. Soit h l'ordre de ce déterminant. Parmi les fonctions y, celles dont les dérivées entrent dans ce déterminant forment un système de fonctions indépendantes (I). Si $h < p$, chacune des autres fonctions y est une fonction des h premières (II).

116. On peut énoncer certains des résultats qui précèdent sous la forme suivante : *Pour qu'entre n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existe une relation, il faut et il suffit que le déterminant fonctionnel des y par rapport aux x soit identiquement nul.*

D'abord la condition est suffisante, car, si elle est remplie, nous

venons de voir que certaines des fonctions y se réduisent à des fonctions des autres.

Elle est nécessaire; en effet, soit

$$F(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

une relation entre les y, vérifiée par hypothèse, quels que soient les x. En dérivant par rapport aux x, on a les n relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial F}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \dots \dots + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = 0. \end{array} \right.$$

Les dérivées $\frac{\partial F}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial y_n}$ ne peuvent être toutes constamment nulles, car, si elles l'étaient, F se réduirait à une constante, et $F = 0$ ne serait pas une relation entre les y. L'ensemble des n équations (1) exige alors que le déterminant formé par les dérivées $\frac{\partial y}{\partial x}$ soit nul. Donc la condition est nécessaire.

117. Indiquons une propriété importante du déterminant fonctionnel.

Soient $y_1, y_2, \dots, y_n$ n fonctions des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ qui sont elles-mêmes fonctions de $t_1, t_2, \dots, t_n$. Je dis que l'on a

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(t_1, t_2, \dots, t_n)}.$$

En effet, on a d'une façon générale

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_j}.$$

Considérons les deux déterminants fonctionnels

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial t_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

On voit, d'après la forme de l'élément $\frac{\partial y_i}{\partial t_j}$ du déterminant fonctionnel des y par rapport aux t, que ce déterminant fonctionnel s'ob-

tient en faisant le produit des deux déterminants ci-dessus (lignes par colonnes), ce qui démontre la propriété énoncée.

IX. — Dérivées d'ordre supérieur.

118. Étant donnée une fonction $y = f(x)$ ayant une dérivée $f'(x)$, cette dérivée peut avoir à son tour une dérivée. On dit que c'est la *dérivée seconde* de y et on la désigne par $y'' = f''(x)$. D'une façon générale, si l'on a défini la dérivée d'ordre n, $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$, la dérivée de cette dérivée est dite *dérivée d'ordre* $(n+1)$ *de* y.

Si l'on a une fonction de plusieurs variables, $f(x, y, z, \ldots)$, chacune des dérivées partielles du premier ordre de cette fonction constitue une fonction de $x, y, z, \ldots$ et peut avoir des dérivées partielles par rapport à chacune de ces variables. Les dérivées de $f'(x)$ se notent comme il suit : $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{xz}, \ldots$; celles de $f'(y)$: $f''_{yx}, f''_{y^2}, f''_{yz}, \ldots$.

119. *Étant donnée une fonction $f(x, y)$ de deux variables, si cette fonction a des dérivées premières f'_x et f'_y, si f'_x a une dérivée par rapport à y, soit f''_{xy}, si f'_y a une dérivée par rapport à x, soit f''_{yx}, et si ces deux dérivées f''_{xy}, f''_{yx} sont continues, elles sont égales.*

Pour le démontrer, posons

$$(1)\qquad A = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y),$$

$$(2)\qquad \varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y).$$

On reconnaît que l'on a

$$(3)\qquad A = \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

D'après sa définition et les hypothèses faites, la fonction $\varphi(x)$ a une dérivée par rapport à x, qui est

$$(4)\qquad \varphi'(x) = f'_x(x, y+k) - f'_x(x, y).$$

En appliquant la formule des accroissements finis à (3) et tenant compte de (4), on obtient

$$A = h\varphi'(x+\theta h) = h[f'_x(x+\theta h, y+k) - f'_x(x+\theta h, y)] \qquad (0 < \theta < 1).$$

Appliquons à la quantité entre crochets la formule des accroisse-

ments finis, il vient

$$A = hk f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' k) \qquad (0 < \theta' < 1).$$

En permutant le rôle des variables x, y, on obtient de même

$$A = kh f''_{yx}(x + \theta_1 h, y + \theta'_1 k).$$

En supposant h et k différents de zéro, on en déduit

$$f''_{xy}(x + \theta h, y + \theta' k) = f''_{yx}(x + \theta_1 h, y + \theta'_1 k).$$

Donnons à h et k des valeurs tendant vers zéro. En vertu de la continuité de chacune des fonctions f''_{xy}, f''_{yx}, les deux membres de l'égalité tendent respectivement vers $f''_{xy}(x, y)$ et $f''_{yx}(x, y)$. Donc ces deux expressions sont égales.

Ce fait étant établi, il en résulte la propriété générale suivante : *La dérivée d'ordre n d'une fonction de plusieurs variables, obtenue en effectuant α dérivations par rapport à x, β par rapport à y, γ par rapport à z, est toujours la même, quel que soit l'ordre dans lequel on effectue les dérivations, pourvu que toutes les dérivées considérées soient continues.*

En effet, considérons le groupement G des lettres $x, y, z, \ldots$, indiquant l'ordre des dérivations successives, et prenons deux dérivées d'ordre n ne différant que par l'ordre des dérivations. Les deux groupements G et G′ correspondant à ces deux dérivées sont identiques quant à la nature des lettres qui les composent; ils ne diffèrent que par l'ordre. On peut trouver une succession de groupements contenant les mêmes lettres que G et G′, le premier étant G, le dernier G′, et deux groupements consécutifs ne différant que par l'ordre de deux lettres consécutives. Le théorème est ramené à son cas particulier suivant : *Démontrer que l'on peut intervertir l'ordre de deux dérivations consécutives.*

Il suffit pour cela d'appliquer le résultat précédent à la fonction obtenue par les dérivations qui précèdent celles dont l'ordre est interverti, puis d'effectuer les dérivations qui les suivent et qui sont les mêmes dans les deux cas. Finalement, la dérivée obtenue est la même.

Il est donc indifférent, lorsqu'on note une dérivée, de rappeler l'ordre des dérivations. Nous représenterons une dérivée prise α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z par

$$f^{\alpha+\beta+\gamma}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z).$$

120. Si l'on a une fonction

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

$x, y, z, \ldots$ étant non plus variables indépendantes, mais fonctions de variables $t, \theta, \ldots$, la formule des fonctions composées définit les dérivées du premier ordre de u par rapport à $t, \theta, \ldots$. On a, par exemple,

$$u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t + \ldots.$$

Une seconde application du même principe donne les dérivées secondes de u par rapport à $t, \theta, \ldots$. Par exemple, pour avoir u''_{t^2}, on dérive une seconde fois par rapport à t :

$$u''_{t^2} = x'_t (u''_{x^2} x'_t + u''_{xy} y'_t + u''_{xz} z'_t + \ldots) + u'_x x''_{t^2} + \ldots.$$

Pour avoir $u''_{t\theta}$, nous aurions dérivé par rapport à θ la formule donnant u'_t.

On reconnaît que les dérivées secondes de u par rapport à t, θ s'expriment en fonction des dérivées premières et secondes de u par rapport à $x, y, z, \ldots$ et de x, y, z par rapport à t, θ. D'une façon générale, les dérivées d'ordre n de u par rapport à t, θ s'expriment en fonction des dérivées de u par rapport à x, y, z, jusqu'à l'ordre n, et des dérivées de x, y, z par rapport à t, θ, jusqu'à l'ordre n.

Cette méthode permet également d'avoir les dérivées des différents ordres des fonctions implicites. Soient, en effet, les équations

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &F_n(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n) = 0. \end{aligned}$$

On a vu que, sous certaines conditions, les y peuvent être considérés comme des fonctions des x, définies par ces n équations, et que les dérivées premières des y par rapport aux x sont fonctions des dérivées $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$. En dérivant de nouveau les formules obtenues, on obtient les dérivées du second ordre des y par rapport aux x en fonction des $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ et des $\frac{\partial^2 F_i}{\partial x_j \, \partial x_k}$. D'une façon générale, les dérivées d'ordre n des y s'expriment en fonction des dérivées jusqu'à l'ordre n des F.

121. *Formule de Taylor.* — Si $f(x)$ est un polynome d'ordre n, on a la formule

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x).$$

Cette formule n'est en effet, dans le cas de $f(x) = x^m$ $(m \leq n)$, qu'une façon d'écrire la formule du développement du binome $(x+h)^m$. Étant vraie pour un monome x^m, elle l'est encore pour une combinaison linéaire de monomes, c'est-à-dire pour un polynome.

f désignant maintenant une fonction quelconque, pourvue de dérivées jusqu'à l'ordre $(n+1)$ inclusivement, posons

$$(1) \qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{A},$$

A étant une quantité définie par cette équation.

Faisons un changement de notations. Remplaçons $x+h$ par b, x par a, et par suite h par $b-a$. La relation précédente s'écrit

$$f(b) - f(a) - \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{A} = 0.$$

Considérons la fonction auxiliaire suivante :

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{p=1}^{p=n} \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{A}.$$

On constate que l'on a

$$\varphi(a) = 0, \qquad \varphi(b) = 0.$$

Calculons $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) = -f'(x) - \sum_{p=1}^{p=n} \left[-\frac{(b-x)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p)}(x) + \frac{(b-x)^p}{p!} f^{(p+1)}(x) \right] + \frac{(b-x)^n}{n!} \mathrm{A}.$$

Il reste, toutes réductions faites,

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} [\mathrm{A} - f^{(n+1)}(x)].$$

D'après le théorème de Rolle, $\varphi'(x)$ s'annule pour une valeur c comprise entre a et b, d'où, comme $(b-c) \neq 0$,

$$\mathrm{A} = f^{(n+1)}(c).$$

En revenant à la première notation, c peut s'écrire $a + \theta h$

$(0 < \theta < 1)$, et l'on a la formule de Taylor sous sa forme ordinaire :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h).$$

Cas de plusieurs variables. — Soit $f(x, y, z)$ une fonction de trois variables, par exemple. Posons

$$\varphi(t) = f(x+ht, y+kt, z+lt),$$

d'où résulte

$$\varphi(1) = f(x+h, y+k, z+l), \qquad \varphi(0) = f(x, y, z).$$

Si l'on suppose que $f(x, y, z)$ a des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, le théorème des fonctions composées montre que $\varphi(t)$ a, par rapport à t, des dérivées jusqu'à l'ordre n. Calculons ces dérivées. On a d'abord

$$(1) \quad \varphi' = hf'_x(x+ht, y+kt, z+lt) + kf'_y(x+ht, \ldots) + lf'_z(x+ht, \ldots).$$

Pour avoir φ'', dérivons cette première formule par rapport à t, ce qui revient à remplacer chacune des fonctions f'_x, f'_y, f'_z par une fonction qui lui correspondra comme correspond à f le second membre de (1) :

$$\varphi'' = h(hf''_{x^2} + kf''_{xy} + lf''_{xz}) + k(hf''_{yx} + kf''_{y^2} + lf''_{yz})$$
$$+ l(hf''_{zx} + kf''_{zy} + lf''_{z^2}),$$
$$\varphi'' = h^2 f''_{x^2} + k^2 f''_{y^2} + l^2 f''_{z^2} + 2hk f''_{xy} + 2hl f''_{xz} + 2kl f''_{yz}.$$

Ceci nous conduit à la règle pratique suivante :

Remplaçons conventionnellement f'_x par f_x, f''_{x^2} par $(f_x)^2$, f''_{xy} par $f_x f_y$. Nous pouvons alors écrire, d'une façon symbolique,

$$\varphi'' = (hf_x + kf_y + lf_z)^{(2)},$$

entendant par là que, pour obtenir φ'', on élève au carré la quantité entre parenthèses, puis on remplace, dans le développement obtenu, les symboles f_x, ..., $(f_x)^2$, ..., $f_x f_y$, ..., par f'_x, ..., f''_{x^2}, ..., f''_{xy}, ...

Je dis que, moyennant les mêmes conventions, on peut écrire d'une façon générale

$$\varphi^{(n)} = (hf_x + kf_y + lf_z)^{(n)},$$

entendant par là que l'on remplace le développement du second

membre, soit

$$\sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}(hf_x)^\alpha(kf_y)^\beta(lf_z)^\gamma,$$

par

$$\sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} h^\alpha k^\beta l^\gamma f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x+ht,\ y+kt,\ z+lt),$$

le signe $\sum$ s'appliquant à toutes les combinaisons des entiers positifs ou nuls α, β, γ, telles que $\alpha+\beta+\gamma=n$.

La règle est vraie, comme on l'a vu, pour les dérivées première et seconde; admettons-la pour la dérivée d'ordre n et démontrons-la pour la dérivée d'ordre $n+1$.

Pour passer de $\varphi^{(n)}$ à $\varphi^{(n+1)}$, il faut remplacer chacune des dérivées qui entrent dans le second membre par la fonction qui correspond à cette dérivée comme l'expression de φ' correspond à f, donc

$$\varphi^{(n+1)} = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} h^\alpha k^\beta l^\gamma \Big[h f^{(n+1)}_{x^{\alpha+1} y^\beta z^\gamma}(x+ht,\ \ldots) + k f^{(n+1)}_{x^\alpha y^{\beta+1} z^\gamma}(\ldots) + l f^{(n+1)}_{x^\alpha y^\beta z^{\gamma+1}}(\ldots)\Big].$$

Cela montre que $\varphi^{(n+1)}$ peut s'obtenir symboliquement par le produit

$$(hf_x+kf_y+lf_z)^{(n)}(hf_x+kf_y+lf_z)$$

ou encore

$$(hf_x+kf_y+lf_z)^{(n+1)}.$$

Connaissant les dérivées successives de φ, en appliquant la formule de Taylor à cette fonction d'une variable, on a, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),$$

c'est-à-dire

$$f(x+h,\ \ldots) = f(x,y,z) + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!}(hf_x+kf_y+lf_z)^{(p)}_{x,y,z} + \frac{1}{(n+1)!}(hf_x+kf_y+lf_z)^{(n+1)}_{x+\theta h,\,y+\theta k,\,z+\theta l}.$$

C'est la formule de Taylor pour une fonction de plusieurs variables.

X. — Différentielles d'ordre supérieur.

122. Étant donnée une fonction $f(x, y, z)$ d'une ou plusieurs variables, la différentielle première df a été définie comme il suit (n° 82, p. 71) : dx, dy, dz étant des accroissements arbitraires donnés aux variables, on a

$$df = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz. \tag{1}$$

df est ainsi fonction des variables x, y, z, dx, dy, dz.

Imaginons :

1° Que l'on attribue à dx, dy, dz des valeurs fixes. Si dans ces conditions x, y, z sont variables, df n'est plus fonction que de x, y, z.

2° Dans la fonction de x, y, z, ainsi obtenue, on donne à x, y, z des accroissements respectivement égaux aux valeurs fixes qui viennent d'être choisies dans la première convention. Dans ces conditions, la fonction df a une différentielle déterminée. Par définition *ce sera la différentielle seconde de f* et nous la désignerons par la notation $d^2 f$.

D'une façon abrégée, on exprime la double convention qui sert à définir $d^2 f$ en disant que *$d^2 f$ est la différentielle de df lorsque l'on considère dx, dy, dz comme des constantes.*

D'après cela, $d^2 f$ s'obtient en remplaçant dans le second membre de (1) chaque dérivée f'_x, f'_y, f'_z par sa différentielle. Or on a, par exemple,

$$df'_x = f''_{x^2} dx + f''_{xy} dy + f''_{xz} dz,$$

et des formules analogues pour df'_y, df'_z. On a donc

$$d^2 f = f''_{x^2} dx^2 + f''_{y^2} dy^2 + f''_{z^2} dz^2 + 2 f''_{xy} dx\, dp + 2 f''_{xz} dx\, dz + 2 f''_{yz} dy\, dz. \tag{2}$$

123. Supposons qu'on ait défini les différentielles d'ordre 1, 2, 3, ..., n, de f, soit df, $d^2 f$, $d^3 f$, ..., $d^n f$, et admettons que $d^n f$ soit fonction déterminée de x, y, z, dx, dy, dz. Pour définir $d^{n+1} f$, nous supposons :

1° Que dans l'expression de $d^n f$ on donne à dx, dy, dz des valeurs fixes ;

2° Que dans la fonction de x, y, z ainsi obtenue on donne à x, y, z des accroissements respectivement égaux aux valeurs fixées pour dx, dy, dz dans la première convention. Dans ces conditions, la fonction

$d^n f$ a une différentielle déterminée qu'on appelle différentielle $(n+1)^{\text{ième}}$ de f et qu'on désigne par $d^{n+1} f$.

Je dis que l'on a d'une façon générale

$$(3) \qquad d^n f = \sum \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} f^{n}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)\, dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma,$$

le signe $\sum$ étant étendu à toutes les combinaisons des entiers positifs ou nuls α, β, γ, telles que $\alpha+\beta+\gamma = n$, de sorte que l'on peut écrire symboliquement

$$(4) \qquad d^n f = (f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz)^{(n)},$$

l'interprétation de cette formule se faisant comme précédemment : on développe le second membre comme la puissance $n^{\text{ième}}$ ordinaire d'un polynome, puis on remplace le terme général

$$\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}(f_x\, dx)^\alpha (f_y\, dy)^\beta (f_z\, dz)^\gamma$$

par

$$\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} f^{(n)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}(x, y, z)\, dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma.$$

On constate que la formule est vraie pour les différentielles première et seconde. Supposons-la vraie pour la différentielle $n^{\text{ième}}$ et démontrons-la pour la différentielle $(n+1)^{\text{ième}}$.

Pour passer de $d^n f$ à $d^{n+1} f$, on doit remplacer dans le second membre de (3) chacune des dérivées par sa différentielle prise pour les accroissements dx, dy, dz. Pratiquement, en utilisant la représentation symbolique, cela revient à multiplier symboliquement cette dérivée par $f_x dx + f_y dy + f_z dz$, à effectuer le calcul comme s'il s'agissait d'exposants ordinaires, puis à remplacer l'exposant par un indice de dérivation suivant la convention adoptée. Donc le résultat peut s'obtenir de la façon suivante : on forme le produit symbolique

$$(f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz)^{(n)}(f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz),$$

ce qui revient à former la puissance symbolique $(n+1)^{\text{ième}}$ de

$$(f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz).$$

Les formules (3) et (4) sont donc vraies quel que soit n.

124. Appliquons les résultats obtenus à chacune des variables indépendantes x, y, z considérée comme fonction de x, y, z. Cha-

cune d'elles a toutes ses dérivées nulles à partir de l'ordre 2. Il en résulte qu'à partir de l'ordre 2 leurs différentielles sont nulles :

$$d^n x = 0, \qquad d^n y = 0, \qquad d^n z = 0 \qquad (n \geqq 2).$$

125. Soit $u = f(x)$ une fonction d'une seule variable. La formule générale (3) se réduit à

$$d^n u = f^{(n)}(x)\, dx^n,$$

de sorte qu'on peut écrire, quel que soit n,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n u}{dx^n}.$$

On déduit de là une nouvelle notation pour les dérivées d'ordre supérieur des fonctions d'une variable. Par analogie, en ce qui concerne les fonctions de plusieurs variables, on note les dérivées de la façon suivante :

$$f^{(n)}_{x^\alpha, y^\beta z^\gamma}(x, y, z) = \frac{\partial^n f(x, y, z)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma},$$

de sorte qu'on peut écrire d'une façon générale

$$d^n f = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, \frac{\partial^n f(x, y, z)}{\partial x^\alpha\, \partial y^\beta\, \partial z^\gamma}\, dx^\alpha\, dy^\beta\, dz^\gamma,$$

ou, en notation symbolique,

$$d^n f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz\right)^{(n)}.$$

126. Considérons maintenant une fonction $u = f(x, y, z)$, x, y, z n'étant plus nécessairement variables indépendantes, mais pouvant être des fonctions de nouvelles variables t, θ. On sait que l'on a d'une façon générale la formule

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz. \tag{1}$$

Prenons les différentielles des deux membres, autrement dit *différentions* les deux membres de cette formule, les variables indépendantes étant t, θ :

$$d^2 u = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial f}{\partial x}\, d^2 x + \ldots.$$

Calculons $d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$:

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}\, dz,$$

d'où

$$d^2 u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial z} dx\, dz + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \ldots.$$

Le second membre de cette formule comprend d'abord l'ensemble des termes obtenus lorsque x, y, z sont variables indépendantes, puis l'expression

$$\frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y + \frac{\partial f}{\partial z} d^2 z.$$

On peut écrire avec la notation symbolique déjà employée

$$(2) \qquad d^2 u = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz\right)^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y + \frac{\partial f}{\partial z} d^2 z.$$

La différentielle seconde n'a donc pas la même expression suivant que x, y, z sont variables indépendantes ou non.

Considérons cette formule (2). Si l'on y exprime x, y, z en fonction de t, θ, puis dx, dy, dz, $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$ en fonction de t, θ, dt, $d\theta$, on aura finalement l'expression de $d^2 u$ en fonction de t, θ, dt, $d\theta$. Or, on peut écrire immédiatement une autre expression de $d^2 u$. On a, en effet,

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \, \partial \theta} dt\, d\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} d\theta^2.$$

On obtient ainsi pour $d^2 u$ deux expressions qui doivent être identiques quelles que soient les valeurs arbitraires données à t, θ, dt, $d\theta$. En identifiant les coefficients de dt^2, $dt\, d\theta$, $d\theta^2$, on retrouvera les relations qui existent entre les dérivées par rapport à x, y, z et les dérivées par rapport à t, θ.

Il convient de remarquer que la formule (2) est valable quelles que soient les variables indépendantes, quel que soit même leur nombre, car ces variables indépendantes n'entrent pas explicitement dans la formule. Cela montre l'utilité de l'emploi des différentielles. Cet emploi permet d'obtenir des formules en quelque sorte plus condensées que les formules obtenues par les règles de dérivation.

Enfin, si l'on considère la formule (2) et si l'on suppose que x, y, z soient variables indépendantes, cela revient à supposer les différentielles secondes $d^2 x$, $d^2 y$, $d^2 z$ nulles. On retrouve la formule qui définit la différentielle seconde de u quand x, y, z sont variables indépendantes.

Ayant l'expression de $d^2 u$, en différentiant la formule (2), on peut obtenir l'expression de $d^3 u$ quand x, y, z sont des fonctions quel-

conques. D'une façon générale, on peut former $d^n u$ et constater que $d^n u$ s'exprime en fonction des dérivées partielles de f par rapport à x, y, z jusqu'à l'ordre n inclusivement et des différentielles de x, y, z jusqu'à l'ordre n inclusivement. De plus, quand x, y, z sont variables indépendantes, $d^n u$ se réduit à

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)^{(n)}.$$

En effet, ce résultat est vrai pour $n=1$, $n=2$; en l'admettant pour une valeur déterminée n et en différentiant la dernière formule obtenue, on l'obtient pour $(n+1)$.

127. *Formule de Leibnitz.* — Comme cas particulier de formules de différentiation, cherchons l'expression de la différentielle $n^{\text{ième}}$ d'un produit de deux fonctions u, v d'un nombre quelconque de variables. Je dis que l'on a

$$(1)\quad d^n(uv) = v\,d^n u + C_n^1\,dv\,d^{n-1}u + \ldots + C_n^p\,d^p v\,d^{n-p}u + \ldots + u\,d^n v,$$

ce que l'on écrit symboliquement

$$d^n(uv) = (du + dv)^{(n)},$$

en entendant par là que, pour obtenir $d^n(uv)$, on forme la puissance $n^{\text{ième}}$ du binome $(du+dv)$ et que l'on remplace, dans le développement, $du^{(n)}$ par $v\,d^n u$, $dv^{(n)}$ par $u\,d^n v$ et le terme général $C_n^p(dv)^p(du)^{n-p}$ par $C_n^p\,d^p v\,d^{n-p}u$. En effet, la loi est vraie pour $n=1$ et $n=2$. Admettons-la pour une valeur déterminée de n et différentions la formule (1). Les termes

$$C_n^p\,d^p v\,d^{n-p}u + C_n^{p+1}\,d^{p+1}v\,d^{n-p-1}u$$

donnent

$$C_n^p(d^{p+1}v\,d^{n-p}u + d^p v\,d^{n-p+1}u) + C_n^{p+1}(d^{p+2}v\,d^{n-p-1}u + d^{p+1}v\,d^{n-p}u).$$

Le terme $d^{p+1}v\,d^{n-p}u$ a donc pour coefficient dans $d^{n+1}(uv)$,

$$C_n^p + C_n^{p+1},$$

c'est-à dire

$$C_{n+1}^{p+1}.$$

Donc la formule (1) est vraie quel que soit n.

XI. — Changement de variables.

128. Fréquemment, dans des questions d'analyse, ayant à considérer des fonctions de certaines variables, on a avantage à remplacer ces variables par de nouvelles, liées aux premières par certaines relations. Il peut aussi y avoir lieu de considérer de nouvelles fonctions, liées aux premières fonctions et variables par des relations données. On est ainsi conduit à chercher les relations qui existent entre les dérivées des anciennes fonctions par rapport aux anciennes variables et les dérivées des nouvelles fonctions par rapport aux nouvelles variables.

Dans des questions de cette nature, on doit toujours partir des relations entre les variables (indépendantes ou non) que l'on considère, dériver ou différentier ces relations et tirer des équations obtenues les expressions dont on a besoin.

Donnons-en quelques exemples.

129. Supposons que l'on ait une fonction y d'une variable x. On prend une nouvelle variable indépendante t, liée à x par une relation donnée, et l'on veut établir les relations entre les dérivées de y par rapport à x : y'_x, y''_{x^2}, ... et les dérivées de y par rapport à t : y'_t, y''_{t^2}, ...

En appliquant le théorème des fonctions de fonctions, on a

$$y'_t = y'_x x'_t.$$

Dérivons cette relation, t étant la variable indépendante :

$$y''_{t^2} = y''_{x^2} x'_t x'_t + y'_x x''_{t^2} = y''_{x^2} x'^2_t + y'_x x''_{t^2}.$$

Par une nouvelle dérivation, on a

$$y'''_{t^3} = y'''_{x^3} x'^3_t + 3 y''_{x^2} x'_t x''_{t^2} + y'_x x'''_{t^3}.$$

On voit qu'en continuant l'application du procédé, l'on exprime y'_t, y''_{t^2}, ... en fonction de y'_x, y''_{x^2}, ... et de x'_t, x''_{t^2}, ...

Souvent la fonction y que l'on considère est à déterminer et doit satisfaire, avec ses dérivées, à certaines équations, tandis que x est une fonction connue de t. Il s'agit alors d'exprimer les anciennes dérivées en fonction des nouvelles. Dans l'exemple qui précède, on y parvient en résolvant les équations obtenues : la première donne y'_x, la deuxième y''_{x^2}, la troisième y'''_{x^3}, et ainsi de suite.

On peut employer une autre méthode :

La première relation, résolue par rapport à y'_x, donne

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Ce résultat peut s'interpréter de la manière suivante : étant donnée une fonction quelconque y de x, sa dérivée par rapport à x est égale à la dérivée de cette même fonction par rapport à la nouvelle variable t, divisée par x'_t.

Appliquons cette règle à la fonction y'_x. Sa dérivée par rapport à l'ancienne variable, c'est-à-dire y''_{x^2}, est égale au quotient par x'_t de la dérivée de cette même fonction par rapport à la nouvelle variable :

$$y''_{x^2} = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{t^2} x'_t - y'_t x''_{t^2}}{x'^3_t};$$

on vérifie que c'est bien l'expression fournie par la première méthode. En poursuivant l'application de cette seconde méthode, on trouve

$$y'''_{x^3} = \left[\frac{y''_{t^2} x'_t - y'_t x''_{t^2}}{x'^3_t}\right]'_t \frac{1}{x'_t}.$$

On peut aussi, au lieu d'employer la notation de Lagrange pour les dérivées (notation au moyen d'accents) comme nous venons de le faire, remplacer les dérivées par des quotients de différentielles. Mais il faut remarquer que, sauf en ce qui concerne les différentielles premières, l'emploi des différentielles peut donner lieu à ambiguïté. En effet, d^2y, par exemple, désigne deux fonctions différentes suivant que la variable indépendante est x ou t. On peut avoir, il est vrai, des formules toujours valables en calculant d^2y dans le cas où les variables indépendantes sont quelconques, mais ces formules sont plus compliquées que les précédentes, puisqu'elles contiennent des termes qui disparaissent quand x ou t est pris pour variable indépendante.

130. Comme application des méthodes exposées, y étant fonction de x, considérons l'expression

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2}.$$

Prenons une nouvelle variable indépendante t liée à x par une rela-

tion donnée. Nous aurons

$$\frac{(1+y'^2)^3}{y''^2} = \frac{\left[1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2\right]^3}{\left[\frac{y''_{t^2}x'_t - y'_t x''_{t^2}}{(x'_t)^3}\right]^2} = \frac{(x'^2_t + y'^2_t)^3}{(y''_{t^2}x'_t - y'_t x''_{t^2})^2}.$$

Si l'on exprime tout en fonction des différentielles, l'expression prend la forme

$$\frac{(dx^2+dy^2)^3}{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}.$$

131. Comme autre exemple, soit z une fonction des variables x, y. On change de variables indépendantes en prenant

$$(1)\qquad \begin{cases} x = f(t, u), \\ y = \varphi(t, u); \end{cases}$$

on suppose les fonctions f et φ telles que ces formules (1) peuvent être résolues par rapport à t et à u, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{D(x, y)}{D(t, u)} \neq 0,$$

de sorte que t et u peuvent s'exprimer en fonction de x, y.

Prenons les dérivées de z par rapport à t et à u,

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}. \end{cases}$$

Ces relations (2) définissent les nouvelles dérivées en fonction des anciennes. Mais elles donnent aussi les anciennes en fonction des nouvelles, car, le déterminant du système étant $\frac{D(x, y)}{D(t, u)}$, on peut résoudre par rapport à $\frac{\partial z}{\partial x}$ et à $\frac{\partial z}{\partial y}$.

En dérivant les équations (2) par rapport à t ou à u, on aura, de même, les relations entre les dérivées secondes.

Si l'on conserve l'une des variables primitives, x par exemple, c'est-à-dire si l'on fait un changement de variables de la forme

$$x = t, \qquad y = \varphi(t, u),$$

les formules (2) se simplifient, car l'on a

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = 0.$$

Mais il convient de remarquer que, bien que t et x soient identiques, *la dérivée de z par rapport à t est différente de la dérivée de z par rapport à x.*

Aussi il est utile, pour trouver les relations entre les dérivées, de changer même le nom de la variable qui est conservée.

132. Comme application, cherchons à transformer l'expression

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

en supposant que l'on effectue le changement de variables défini par les relations

$$u=x+ay,\qquad v=x-ay.$$

Considérons f comme fonction de x, y par l'intermédiaire de u, v, et écrivons les expressions des dérivées par rapport à x, y. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=a\frac{\partial f}{\partial u}-a\frac{\partial f}{\partial v},$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right),$$

d'où

$$a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=4a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}.$$

133. Comme nouvel exemple, considérons une fonction y de x et prenons deux variables t, u liées à x, y par les relations

$$x=f(t,u),\qquad y=\varphi(t,u).$$

La relation qui existe entre x et y se transforme en une relation entre t et u, donc u peut être considéré comme fonction de t.

On change donc à la fois la variable indépendante et la fonction. Cherchons les relations qui existent entre les dérivées de y par rapport à x et celles de u par rapport à t.

Dérivons les relations qui existent entre x, y, t, u, la variable indépendante étant t. On a

$$x'_t=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}u'_t,\qquad y'_t=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}u'_t.$$

Dérivons de nouveau ces relations; nous obtiendrons x''_{t^2}, y''_{t^2}, ... et l'on est ramené à la question traitée au n° 129 (p. 124). On peut donc exprimer les dérivées de y par rapport à x au moyen des dérivées de x, y par rapport à t et, par suite, au moyen des dérivées de u par rapport à t et des dérivées partielles de f et φ. On a, par exemple,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} u'_t}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u} u'_t}.$$

On peut aussi traiter cette question en employant les différentielles.

134. Prenons le cas particulier suivant :

y étant fonction de x, on demande ce que devient l'expression

$$R^2 = \frac{(1 + y'^2)^3}{y''^2}$$

lorsque l'on effectue sur x et y le changement de variables défini par les relations

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta,$$

et que l'on prend θ pour variable indépendante.

Dérivons les formules de transformation, la variable indépendante étant θ. On a

$$x'_\theta = \rho' \cos\theta - \rho \sin\theta, \qquad y'_\theta = \rho' \sin\theta + \rho \cos\theta,$$
$$x''_{\theta^2} = \rho'' \cos\theta - 2\rho' \sin\theta - \rho \cos\theta, \qquad y''_{\theta^2} = \rho'' \sin\theta + 2\rho' \cos\theta - \rho \sin\theta.$$

Évaluons y'_x et y''_{x^2},

$$y'_x = \frac{y'_\theta}{x'_\theta} = \frac{\rho' \sin\theta + \rho \cos\theta}{\rho' \cos\theta - \rho \sin\theta},$$
$$y''_{x^2} = \frac{y''_{\theta^2} \cdot x'_\theta - y'_\theta \cdot x''_{\theta^2}}{x'^3_\theta} = \frac{-\rho\rho'' + 2\rho'^2 + \rho^2}{(\rho' \cos\theta - \rho \sin\theta)^3},$$

d'où

$$R^2 = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^3}{(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')^2}.$$

Traitons la même question en employant les différentielles. On a

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \qquad y''_{x^2} = \frac{d\dfrac{dy}{dx}}{dx} = \frac{d^2y\,dx - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

L'expression de R^2 se transforme de la manière suivante :

$$R^2 = \frac{(dx^2 + dy^2)^3}{(dx\, d^2y - dy\, d^2x)^2}.$$

Transformons maintenant cette expression par le changement de variables

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta.$$

Différentions les formules de transformation en laissant indéterminées les variables indépendantes :

$$dx = d\rho \cos\theta - \rho \sin\theta\, d\theta, \qquad dy = d\rho \sin\theta + \rho \cos\theta\, d\theta,$$
$$d^2x = d^2\rho \cos\theta - 2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta - \rho \cos\theta\, d\theta^2 - \rho \sin\theta\, d^2\theta,$$
$$d^2y = d^2\rho \sin\theta + 2 \cos\theta\, d\rho\, d\theta - \rho \sin\theta\, d\theta^2 + \rho \cos\theta\, d^2\theta.$$

Formons les deux combinaisons qui entrent dans R^2.

$$dx^2 + dy^2 = d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2,$$
$$dx\, d^2y - dy\, d^2x = 2\, d\rho^2\, d\theta + \rho\, d\rho\, d^2\theta - \rho\, d^2\rho\, d\theta + \rho^2\, d\theta^3,$$

d'où

$$R^2 = \frac{(d\rho^2 + \rho^2\, d\theta^2)^3}{(2\, d\rho^2\, d\theta + \rho\, d\rho\, d^2\theta - \rho\, d^2\rho\, d\theta + \rho^2\, d\theta^3)^2},$$

ce résultat étant valable quelle que soit la variable indépendante. En particulier, si c'est θ, le terme $d^2\theta$ disparaît, on peut diviser haut et bas par $d\theta^6$ et l'on retrouve la formule déjà obtenue.

XII. — Notion d'équation différentielle.

135. On appelle *équation différentielle une relation entre une variable indépendante x, une fonction y de cette variable et les dérivées de y par rapport à x jusqu'à un certain ordre*. L'ordre maximum de ces dérivées est dit *l'ordre* de l'équation différentielle.

Par exemple, l'équation

$$y' = f(x),$$

où y est une fonction de x, constitue une équation différentielle d'ordre 1.

D'une manière générale, supposons qu'entre deux variables x, y on ait une relation de la forme

$$F(x, y) = 0. \tag{1}$$

En dérivant cette équation un certain nombre de fois, on forme des relations de la nature indiquée. Une combinaison quelconque de ces relations constitue encore une équation différentielle. On dit que la fonction y de x définie par l'équation (1) satisfait à toutes ces équations différentielles.

136. Supposons maintenant que l'on donne entre x, y une relation contenant différents paramètres

$$F(x, y, a_1, \ldots, a_n) = 0. \tag{1}$$

On peut former des équations différentielles auxquelles satisfont toutes les fonctions y définies par l'équation (1), par le procédé suivant : on dérive l'équation (1) n fois. En joignant à (1) les n relations ainsi obtenues, on a $(n+1)$ relations entre lesquelles on peut éliminer les paramètres a_1, a_2, …, a_n. Le résultat de l'élimination est une équation de la forme

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{2}$$

C'est une équation différentielle d'ordre n à laquelle satisfont toutes les fonctions y définies par (1). En langage géométrique, l'équation (1) représente une famille de courbes; on dit que toutes ces courbes satisfont à l'équation différentielle (2).

Par exemple, de l'équation

$$y = ax + b$$

on déduit

$$y' = a, \qquad y'' = 0.$$

La dernière est une équation différentielle à laquelle satisfont toutes les fonctions $y = ax + b$, quels que soient a et b.

Comme second exemple, considérons les fonctions y de x satisfaisant à une relation de la forme

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0. \tag{3}$$

Dérivons trois fois cette équation, y étant considéré comme fonction de x. On obtient

$$x + yy' + a \quad + by' = 0,$$
$$1 + y'^2 + yy'' + by'' = 0,$$
$$3y'y'' + yy''' + by''' = 0.$$

Éliminons b entre les deux dernières relations. Il vient

$$(1 + y'^2 + yy'')y''' - (3y'y'' + yy''')y'' = 0$$

ou

$$(1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0.$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfont les fonctions y de x définies par (3). On dit que cette équation est vérifiée par les cercles du plan.

137. *Intégration des équations différentielles.* — Étant donnée une équation différentielle, le problème de l'intégration de cette équation consiste à rechercher toutes les fonctions satisfaisant à cette équation.

Un cas particulièrement simple est celui où l'équation est de la forme

$$y' = f(x) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x).$$

La solution du problème est donnée par la théorie des fonctions primitives. Toute fonction y dont la dérivée est $f(x)$ est donnée, à une constante près, par la formule

$$y = \int f(x)\, dx.$$

L'opération qu'on effectue ainsi s'appelle une *quadrature*.

Prenons encore le cas de l'équation

$$y^{(n)} = 0.$$

Comme $y^{(n)}$ est la dérivée de $y^{(n-1)}$, on voit que $y^{(n-1)}$ est une constante. Soit

$$y^{(n-1)} = a.$$

On en conclut

$$y^{(n-2)} = ax + b,$$

et, comme d'une façon générale la fonction primitive d'un polynome est un polynome dont le degré surpasse le degré du premier d'une unité, en remontant de proche en proche, on constate que y est un polynome d'ordre $(n-1)$, renfermant, par suite, n paramètres arbitraires.

Soit maintenant l'équation

$$y^{(n)} = f(x). \tag{1}$$

On a

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx.$$

$y^{(n-1)}$ étant connu, on aura $y^{(n-2)}$ par une nouvelle quadrature

$$y^{(n-2)} = \int dx \int f(x)\,dx.$$

On doit, pour avoir y, effectuer n quadratures successives. Chacune d'elles introduit une constante arbitraire. y est donc défini à un polynome d'ordre $(n-1)$ près; en d'autres termes, deux fonctions y, solutions de l'équation donnée (1), diffèrent entre elles par un polynome d'ordre $(n-1)$.

138. En ce qui concerne les équations du premier ordre, si on les suppose résolues par rapport à la dérivée, elles sont de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Il y a souvent avantage à les mettre sous une forme symétrique en x, y.

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

On peut intégrer immédiatement une équation de cette forme, dans le cas où P ne dépend que de x et Q que de y. Soit en effet l'équation

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0.$$

Le premier membre est la différentielle totale de

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy.$$

Cette différentielle étant nulle, il faut que la fonction soit constante. On a ainsi une relation entre x et y constituant la solution générale de l'équation proposée.

Supposons, par exemple, qu'on donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^5},$$

nous écrirons cette équation sous la forme

$$\frac{dx}{x^5} = \frac{dy}{y^2}.$$

Le premier membre est la différentielle de $-\frac{1}{4x^4}$, le second de $-\frac{1}{y}$.
La solution générale de l'équation proposée est donnée par

$$-\frac{1}{4x^4} = -\frac{1}{y} + \text{const.},$$

équation qui définit y en fonction de x.

139. A la théorie des équations différentielles se rattache le fait suivant : *si deux fonctions ont même dérivée logarithmique, leur rapport est constant*, cela dans tout intervalle où les fonctions sont différentes de zéro.

Soient en effet f et φ deux fonctions telles que l'on ait

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

On en déduit

$$f'\varphi - \varphi' f = 0.$$

Or $\frac{f}{\varphi}$ a pour dérivée $\frac{f'\varphi - \varphi' f}{\varphi^2}$, c'est-à-dire zéro. Donc $\frac{f}{\varphi}$ est constant.

140. *Notion d'équation aux dérivées partielles.* — On appelle *équation aux dérivées partielles* une relation entre plusieurs variables indépendantes, une fonction de ces variables et les dérivées partielles de cette fonction jusqu'à un certain ordre. Cet ordre est dit l'*ordre de l'équation aux dérivées partielles.*

On conçoit qu'étant donnée une fonction z des variables x_1, x_2, ..., x_n dépendant de paramètres arbitraires, on peut, par le procédé déjà indiqué (nº 136), former des équations contenant seulement $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z et ses dérivées partielles, et ne contenant plus de constantes arbitraires. On peut aller plus loin et *éliminer des fonctions arbitraires.*

Soit, par exemple, une fonction z des variables x, y définie par une relation de la forme

$$F(u, v) = 0, \tag{1}$$

u, v étant des fonctions données de x, y, z.

Dérivons l'équation (1) par rapport à x et à y, z étant considéré

comme fonction de x, y. On a

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial F}{\partial v}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0. \end{cases}$$

Ces deux relations sont linéaires et homogènes en $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$. Nous supposons que $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ ne sont pas tous deux nuls, sans quoi $F(u, v)$ se réduirait à une constante et (1) ne serait pas une relation véritable entre u et v. Il faut donc que l'on ait

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}=0.$$

C'est là une équation entre les dérivées partielles $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. *Elle est indépendante de* F, et est vérifiée quel que soit F, dès que u, v sont donnés, c'est-à-dire qu'elle est vérifiée pour toute une famille de fonctions dépendant d'une fonction arbitraire.

Par exemple, si l'on prend

$$u = x - az, \qquad v = y - bz,$$

toutes les fonctions z de x, y, définies par une relation de la forme

$$F(x - az, y - bz) = 0,$$

satisfont à l'équation différentielle

$$\begin{vmatrix} 1 - a\dfrac{\partial z}{\partial x} & -b\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -a\dfrac{\partial z}{\partial y} & 1 - b\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(3)\qquad 1 - a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

En langage géométrique,

$$F(x - az, y - bz) = 0$$

est l'équation générale des cylindres parallèles à la direction de para-

mètres a, b, 1. On dit que l'équation (3) est l'équation aux dérivées partielles de ces cylindres.

141. Le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles consiste à chercher toutes les fonctions satisfaisant à cette équation. Nous allons en donner quelques exemples.

1° Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Quand x est constant, la fonction cherchée doit se réduire à une constante, autrement dit, elle se réduit à une fonction de x. D'où la solution

$$F(x, y) = f(x),$$

f étant une fonction arbitraire.

2° Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que l'on ait

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ étant la dérivée partielle par rapport à y de $\frac{\partial F}{\partial y}$, on a, d'après ce qui précède,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = f(x).$$

La fonction F a donc par rapport à y une dérivée qui est constante quand x est constant. Donc la fonction F est de la forme

$$F(x, y) = y f(x) + \varphi(x),$$

φ étant une nouvelle fonction arbitraire.

D'une manière générale, on reconnaît que $\frac{\partial^n F}{\partial y^n} = 0$ peut s'intégrer et conduit à

$$F(x, y) = A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \ldots + A_n,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant des fonctions arbitraires de x.

3° Trouver une fonction $F(x, y)$ telle que l'on ait

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 0.$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}$ étant la dérivée partielle par rapport à y de $\frac{\partial F}{\partial x}$, cette fonction $\frac{\partial F}{\partial x}$

doit être constante quand x est constant. Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \varphi(x),$$

φ étant une fonction arbitraire.

La fonction F est donc de la forme

$$F = \int \varphi(x)\,dx + f_1(y),$$

ou encore

$$F = f(x) + f_1(y),$$

f et f_1 étant deux fonctions arbitraires.

4° Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Effectuons le changement de variables défini par les formules

$$u = x + ay, \qquad v = x - ay.$$

Par ce changement, $F(x, y)$ se transforme en une fonction $\Phi(u, v)$ et l'expression

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{en} \quad -4a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} \quad (\text{n}^\text{o}\ 132).$$

L'équation donnée se transforme donc en

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

La solution générale de cette équation étant, d'après le cas 3°,

$$\Phi(u, v) = f(u) + f_1(v),$$

en revenant à la fonction F et aux variables x, y, on voit que F est de la forme

$$F(x, y) = f(x + ay) + f_1(x - ay).$$

142. *Fonctions homogènes.* — On peut rattacher aux équations aux dérivées partielles les propriétés des fonctions homogènes.

On dit qu'une fonction $F(x, y, \ldots, z)$ est homogène et de degré m par rapport aux variables $x, y, \ldots, z$, si l'on a, quel que soit λ,

$$(1) \qquad F(\lambda x, \lambda y, \ldots, \lambda z) = \lambda^m F(x, y, \ldots, z).$$

Si l'on dérive cette identité par rapport à λ, on a

$$x\mathrm{F}'_x(\lambda x, \lambda y, \ldots, \lambda z) + y\mathrm{F}'_y(\lambda x, \ldots) + \ldots + z\mathrm{F}'_z(\lambda x, \ldots) = m\lambda^{m-1}\mathrm{F}(x, y, \ldots, z).$$

En particulier, pour $\lambda = 1$, on a l'identité d'Euler

$$(2)\qquad x\mathrm{F}'_x(x, \ldots) + y\mathrm{F}'_y(x, \ldots) + \ldots + z\mathrm{F}'_z(x, \ldots) = m\mathrm{F}(x, y, \ldots, z).$$

Cette identité constitue une équation aux dérivées partielles. Cherchons à l'intégrer. Posons

$$(3)\qquad \Phi(\lambda) = \mathrm{F}(\lambda x, \lambda y, \ldots, \lambda z).$$

On a

$$(4)\qquad \Phi'(\lambda) = x\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(\lambda x, \ldots) + \ldots + z\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(\lambda x, \ldots).$$

Si l'on remplace dans l'équation donnée (2), $x, y, \ldots, z$ par λx, $\lambda y, \ldots, \lambda z$, elle devient

$$\lambda\left[x\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}(\lambda x, \ldots) + y\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}(\lambda x, \ldots) + \ldots + z\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(\lambda x, \ldots)\right] = m\mathrm{F}(\lambda x, \ldots, \lambda z),$$

c'est-à-dire, d'après (3) et (4) :

$$\lambda\Phi'(\lambda) = m\Phi(\lambda).$$

On est ainsi ramené à une équation différentielle, laquelle s'écrit

$$\frac{\Phi'(\lambda)}{\Phi(\lambda)} = \frac{m}{\lambda}.$$

Le premier membre est la dérivée logarithmique de Φ, le second, la dérivée logarithmique de λ^m. Il en résulte que l'on a

$$(5)\qquad \Phi(\lambda) = c\lambda^m,$$

c étant une constante. Remplaçons maintenant Φ par sa valeur, d'après (3), et faisons $\lambda = 1$, il vient

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, z) = c.$$

En remplaçant c par sa valeur dans la relation (5), on trouve la relation (1). Donc la solution générale de l'équation aux dérivées partielles (2) est une fonction homogène de degré m.

Remarquons que si dans l'équation (1) on remplace λ par $\frac{1}{x}$, on a

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, z) = x^m\mathrm{F}\left(1, \frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right).$$

$F\left(1, \frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right)$ constitue une fonction des rapports $\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}$. On constate ainsi que toute fonction homogène de degré m des variables x, y, ..., z peut se mettre sous la forme

$$x^m f\left(\frac{y}{x}, \ldots, \frac{z}{x}\right).$$

Réciproquement une telle expression, où f est arbitraire, représente une fonction de x, y, ..., z homogène de degré m.

XIII. — Intégration des différentielles totales.

143. *Cas de deux variables.* — Étant donnée une fonction de deux variables $f(x, y)$, sa différentielle df est

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Donnons-nous, *a priori*, une expression de la forme

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{1}$$

et cherchons s'il est possible de trouver une fonction $f(x, y)$ dont cette expression soit la différentielle totale. Si cela est, nous dirons que cette expression est une *différentielle exacte*. Il faut et il suffit pour cela qu'il existe une fonction f telle que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y), \tag{2}$$

de sorte que le problème se ramène au suivant :

Chercher une solution du système d'équations aux dérivées partielles (2).

Une condition nécessaire pour que le problème soit possible s'obtient en exprimant l'égalité entre les deux expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ obtenues par dérivation de l'une et de l'autre équations (2), la première par rapport à y, la seconde par rapport à x. Cette condition est

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{3}$$

Je dis que *cette condition est suffisante.* En effet, supposons-la

remplie dans un certain champ C. La fonction inconnue f doit avoir pour dérivée par rapport à x, y étant fixé, l'expression $P(x, y)$; de là on déduit

$$f = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \varphi(y), \tag{4}$$

x_0 étant une valeur arbitraire, φ une fonction arbitraire assujettie seulement à être continue et à avoir des dérivées dans le champ C.

Cherchons maintenant à satisfaire à la seconde des relations (2). Dérivons (4) par rapport à y, considéré dans l'intégrale comme paramètre

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dx + \varphi'(y),$$

ou, en utilisant la relation (3),

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,dx + \varphi'(y).$$

L'intégration indiquée peut s'effectuer et donne

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y) - Q(x_0, y) + \varphi'(y).$$

En remplaçant, dans la seconde des relations (2), $\frac{\partial f}{\partial y}$ par cette expression, il reste

$$\varphi'(y) = Q(x_0, y),$$

d'où

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \text{const.},$$

y_0 étant une valeur arbitraire. On trouve donc

$$f = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \text{const};$$

et cette fonction satisfait aux équations (2), donc a pour différentielle totale l'expression (1). Elle est déterminée à une constante additive près, car deux fonctions différentes satisfaisant au système (2) ont une différence dont la dérivée par rapport à chaque variable est nulle.

144. *Cas de n variables.* — Étant données n variables x_1, x_2, ..., x_n, considérons l'expression

$$(1)\quad P_1(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 + P_2(x_1, \ldots, x_n)\,dx_2 + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

Cherchons s'il existe une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ dont la différentielle totale soit identique à (1). Si cela est, nous dirons que (1) est une *différentielle totale exacte*. La recherche de f constitue le problème de l'intégration de l'équation aux différentielles totales

$$df = P_1\,dx_1 + \ldots + P_n\,dx_n.$$

Pour que f satisfasse aux conditions du problème, il faut et il suffit que l'on ait les n relations

$$(2)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = P_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = P_n,$$

de sorte que l'on est conduit à chercher les solutions, si elles existent, d'un système de n équations aux dérivées partielles. En dérivant l'équation (2) de rang i par rapport à x_j et l'équation de rang j par rapport à x_i, on a deux expressions de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$ qui doivent être identiques, d'où le système de conditions (3), au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$:

$$(3)\qquad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} \qquad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Je dis que *ces conditions, qui sont évidemment nécessaires pour que le problème soit possible, sont suffisantes.* Nous l'avons démontré dans le cas de deux variables, admettons-le pour 3, 4, ..., $(n-1)$ variables, et démontrons-le pour n.

Supposons les conditions (3) remplies dans un champ C, et considérons la première des équations (2). Toutes les fonctions f dont la dérivée partielle par rapport à x_1 est P_1 sont comprises dans la formule

$$(4)\qquad f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\xi_1}^{x_1} P_1(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 + \varphi(x_2, \ldots, x_n),$$

ξ_1 étant une valeur arbitraire du champ C attribuée à x_1. Il faut que f vérifie les $(n-1)$ équations (2) restantes, c'est-à-dire

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Dérivons les deux membres de (4) par rapport à x_i :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{\xi_1}^{x_1} \frac{\partial P_1}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_2, \ldots, x_n),$$

ce qui s'écrit, d'après les relations (3),

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \int_{\xi_1}^{x_1} \frac{\partial P_i}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_2, \ldots, x_n).$$

L'intégration indiquée peut s'effectuer et l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i(x_1, \ldots, x_n) - P_i(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_2, \ldots, x_n).$$

Les relations (5) deviennent ainsi

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_2, \ldots, x_n) = P_i(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)$$

pour $i = 2, 3, \ldots, n$.

Nous sommes ainsi conduits à un système de $(n-1)$ équations aux dérivées partielles, complètement analogue au système (2), de sorte que la question est ramenée au cas de $(n-1)$ variables. D'ailleurs, pour ce système, les conditions analogues à (3) sont vérifiées, car elles sont comprises parmi les relations (3). D'après le fait admis, il existe une fonction $\varphi(x_2, \ldots, x_n)$ dont les dérivées partielles par rapport à $x_2, \ldots, x_n$ sont les fonctions obtenues en remplaçant dans $P_2, \ldots, P_n$, x_1 par ξ_1. Il existe donc une fonction f vérifiant les équations (2) : les conditions (3) sont suffisantes.

En appliquant à φ le même procédé de réduction, on reconnaît que l'on a des relations de la forme

$$\varphi = \int_{\xi_2}^{x_2} P_2(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \quad + \psi(x_3, \ldots, x_n),$$

$$\psi = \int_{\xi_3}^{x_3} P_3(\xi_1, \xi_2, x_3, \ldots, x_n)\, dx_3 + \theta(x_4, \ldots, x_n),$$

et finalement

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_n) &= \int_{\xi_1}^{x_1} P_1(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 + \int_{\xi_2}^{x_2} P_2(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 + \ldots \\ &\quad + \int_{\xi_n}^{x_n} P_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, x_n)\, dx_n + \text{const.} \end{aligned}$$

La fonction f est déterminée à une constante additive près, car

deux fonctions satisfaisant à (2) sont telles que leur différence a toutes ses dérivées partielles nulles, donc est constante.

Les conditions (3), qui expriment que (1) est une différentielle totale exacte, s'appellent *conditions d'intégrabilité*.

145. Cherchons, par exemple, à intégrer l'expression

$$\frac{x^2+y}{x^2y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy.$$

On prendra un champ C ne contenant pas l'origine. Si la fonction cherchée f existe, elle est de la forme

$$f = \int_{x_0}^{x} \frac{x^2+y}{x^2y}\,dx + \varphi(y),$$

$$f = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{y} + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^2} + \varphi(y) = \frac{1}{y}(x-x_0) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) + \varphi(y).$$

Cherchons maintenant à vérifier la condition

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x-x_0}{y^2} + \varphi'(y),$$

d'où la condition

$$-\frac{x-x_0}{y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2},$$

$$\varphi'(y) = -\frac{x_0}{y^2},$$

d'où l'on déduit

$$\varphi(y) = x_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right),$$

$$f = \frac{1}{y}(x-x_0) - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) + x_0\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y_0}\right),$$

$$f = \frac{x^2-y}{xy} + \text{const.}$$

On voit que, dans la pratique, on peut se dispenser de vérifier si les conditions d'intégrabilité sont remplies et intégrer immédiatement, par rapport à x, le coefficient de dx. Puis, en dérivant la fonction obtenue, on forme les relations auxquelles doit satisfaire la fonction arbitraire φ d'une ou plusieurs variables considérée dans la théorie.

Si ces relations ne contiennent plus x, l'application de la méthode peut se poursuivre, et, si ce fait se reproduit après chaque opération, y compris la dernière, c'est que le problème est possible.



CHAPITRE III.

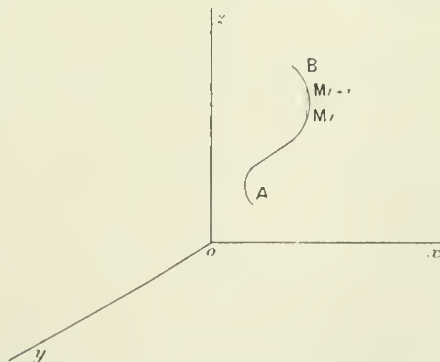
APPLICATIONS ET EXTENSIONS DE LA NOTION D'INTÉGRALE.

I. — Longueur d'un arc de courbe.

146. Considérons dans l'espace un arc de courbe AB n'ayant aucun point double, c'est-à-dire le lieu des positions successives d'un point variable se déplaçant d'une manière continue et ne passant pas deux fois par la même position. Si cet arc est rapporté à trois axes de coordonnées, les coordonnées x, y, z d'un point variable qui le décrit sont fonctions continues d'un paramètre t, dans un certain intervalle borné, et ne prennent pas deux fois le même système de valeurs.

Définition géométrique de la longueur d'un arc. — Prenons sur l'arc AB (*fig.* 1) des points : M_0 coïncidant avec A, M_1, M_2, ...,

Fig. 1.



M_{n-1}, M_n coïncidant avec B, ces points M_0, M_1, ..., M_n étant placés dans l'ordre où les rencontre un point mobile qui décrit l'arc de A

à B. Construisons la ligne polygonale $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{n-1} M_n$. S'il arrive que le périmètre de cette ligne polygonale tende vers une limite déterminée et finie lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, la plus grande longueur de ces côtés tendant vers zéro, cette limite est, par définition, la longueur de l'arc de courbe AB.

Supposons l'arc rapporté à trois axes rectangulaires. Soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

ses équations, t variant de a à b $(a < b)$ lorsque le point (x, y, z) décrit l'arc de A à B. Supposons que les fonctions f, φ, ψ aient dans cet intervalle des dérivées qui soient fonctions continues de t et qui ne soient jamais simultanément nulles. Au point de vue géométrique, cela exprime que l'arc a, en tout point, une tangente déterminée qui se déplace d'une façon continue. Insérons entre a et b des valeurs intermédiaires

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées du point M_i correspondant à la valeur t_i du paramètre. Considérons la ligne polygonale $M_0 M_1 M_2 \ldots M_{n-1} M_n$ et désignons par c_i la longueur du côté $M_i M_{i+1}$

$$c_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}.$$

On a, en appliquant la formule des accroissements finis,

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i &= f(t_{i+1}) - f(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\, f'(\theta_i), \\ y_{i+1} - y_i &= \varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\, \varphi'(\theta'_i), \\ z_{i+1} - z_i &= \psi(t_{i+1}) - \psi(t_i) = (t_{i+1} - t_i)\, \psi'(\theta''_i), \end{aligned}$$

θ_i, θ'_i, θ''_i étant trois nombres compris entre t_i et t_{i+1}.

Il résulte de là

$$c_i = (t_{i+1} - t_i) \sqrt{f'^2(\theta_i) + \varphi'^2(\theta'_i) + \psi'^2(\theta''_i)}.$$

Le radical est compris entre deux nombres *positifs* m, M qu'on peut fixer; on reconnaît que, pour que le plus grand des côtés c_i d'un polygone tende vers zéro, il faut et il suffit que le plus grand des intervalles $(t_{i+1} - t_i)$ tende vers zéro.

La longueur de la ligne polygonale $M_0 M_1 \ldots M_n$ est

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} c_i.$$

Comparons le radical qui figure dans c_i avec le radical suivant

$$\sqrt{f'^2(t_i)+\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)}.$$

On a [1]

$$(1)\quad \begin{cases} \left|\sqrt{f'^2(\theta_i)+\varphi'^2(\theta'_i)+\psi'^2(\theta''_i)}-\sqrt{f'^2(t_i)+\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)}\right| \\ \leqq |f'(\theta_i)-f'(t_i)|+|\varphi'(\theta'_i)-\varphi'(t_i)|+|\psi'(\theta''_i)-\psi'(t_i)|. \end{cases}$$

Les fonctions f', φ', ψ' étant, par hypothèse, continues, à un nombre positif donné ε nous pouvons faire correspondre un nombre α tel que, si toutes les différences $(t_{i+1}-t_i)$ sont plus petites que α, les valeurs extrêmes de chacune des dérivées dans chacun des intervalles diffèrent de moins de ε. Dans ces conditions, le second membre de (1) sera plus petit que 3ε. On pourra alors écrire

$$c_i=(t_{i+1}-t_i)\left[\sqrt{f'^2(t_i)+\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)}+\eta_i\right]$$

avec

$$|\eta_i|<3\varepsilon,$$

d'où

$$\sum c_i=\sum(t_{i+1}-t_i)\sqrt{f'^2(t_i)+\varphi'^2(t_i)+\psi'^2(t_i)}+\sum\eta_i(t_{i+1}-t_i)$$

avec

$$\left|\sum\eta_i(t_{i+1}-t_i)\right|<3\varepsilon\sum(t_{i+1}-t_i)=3\varepsilon(b-a).$$

---

[1] Ceci résulte du calcul suivant : Soient $2n$ quantités positives

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n),\quad (b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

On a

$$\sqrt{\sum a_h^2}-\sqrt{\sum b_h^2}=\frac{\sum a_h^2-\sum b_h^2}{\sqrt{\sum a_h^2}+\sqrt{\sum b_h^2}}=\sum(a_h-b_h)\frac{a_h+b_h}{\sqrt{\sum a_h^2}+\sqrt{\sum b_h^2}}.$$

Le rapport $\dfrac{a_h+b_h}{\sqrt{\sum a_h^2}+\sqrt{\sum b_h^2}}$ est inférieur à 1. Le second membre est une somme de différences multipliées respectivement par des nombres inférieurs à 1. Donc, il est plus petit en module que la somme des modules des différences, donc

$$\left|\sqrt{\sum a_h^2}-\sqrt{\sum b_h^2}\right|<\sum|a_h-b_h|.$$

Ce terme peut donc être rendu plus petit que toute quantité donnée, c'est-à-dire qu'il tend vers zéro quand la loi des partages successifs varie de manière que la plus grande des différences $(t_{i+1} - t_i)$ tende vers zéro. D'ailleurs, dans les mêmes conditions, le premier terme de l'expression $\sum c_i$ tend vers l'intégrale

$$\int_a^b \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

Donc la longueur de la ligne polygonale a, dans les conditions indiquées, une limite qui est cette intégrale. *Cette valeur doit être considérée comme la longueur de l'arc de courbe* AB. On écrit

$$\text{arc AB} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

On a immédiatement la conséquence suivante :

Si, sur un arc AC, B est un point intermédiaire entre A et C, on a

$$\text{arc AC} = \text{arc AB} + \text{arc BC}.$$

Si l'on considère un arc de courbe obtenu en joignant bout à bout différents arcs dont chacun remplit les conditions précédentes, la longueur de l'arc sera, par définition, la somme des longueurs des arcs partiels.

147. Reprenons le cas étudié en premier lieu. Soit M un point variable de l'arc AB correspondant à la valeur t du paramètre. Posons

$$s = \text{arc AM} = \int_a^t \sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

s est une fonction de t qui a pour dérivée $\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}$ ou $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$. On peut encore écrire

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

ou, en introduisant les différentielles de s, x, y, z,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Dans les conditions où nous nous sommes placés, l'arc s varie dans le même sens que t, c'est-à-dire croît avec le paramètre. On peut

faire la convention de compter l'arc en sens inverse; on aura alors

$$s' = -\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

En adoptant la première convention, soit M' un point voisin de M sur l'arc AB, correspondant à la valeur $t + \Delta t$ du paramètre et ayant pour coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$. On a

$$\operatorname{arc} MM' = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = \Delta t \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta) + z'^2(\theta)},$$

θ étant un nombre compris entre t et $t + \Delta t$.

Évaluons, d'autre part, la corde MM'

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

d'où

$$\frac{\operatorname{arc} MM'}{MM'} = \frac{\sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta) + z'^2(\theta)}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}.$$

Quand Δt tend vers zéro, le second membre tend vers 1, car les deux termes du rapport tendent vers $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$. On a donc

$$\lim \frac{\operatorname{arc} MM'}{\operatorname{corde} MM'} = 1,$$

ce qu'on exprime en disant que l'arc et la corde sont des infiniment petits équivalents. Il résulte de là qu'on peut écrire

$$s'_t = \lim_{\Delta t = 0} \frac{\operatorname{corde} MM'}{\Delta t}.$$

Cette remarque peut être utile pour avoir l'expression de s dans un système d'axes cartésiens obliques. Désignons, en effet, comme on le fait d'ordinaire, par λ, μ, ν les angles yOz, zOx, xOy des axes de coordonnées. La distance de deux points de coordonnées x, y, z, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, a pour carré

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + 2\Delta y\, \Delta z \cos\lambda + 2\Delta z\, \Delta x \cos\mu + 2\Delta x\, \Delta y \cos\nu.$$

En divisant cette expression par Δt^2 et faisant tendre Δt vers zéro, on obtient

$$s'^2_t = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z'\cos\lambda + 2z'x'\cos\mu + 2x'y'\cos\nu.$$

Cherchons encore l'expression du carré de l'élément de l'arc en coordonnées semi-polaires et en coordonnées polaires.

On passe du système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z au système de coordonnées semi-polaires r, ψ, z, en posant

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi, \qquad z = z,$$

on constate que $dx^2 + dy^2$ se transforme en $dr^2 + r^2\,d\psi^2$.

La formule

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

se transforme donc en

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\psi^2 + dz^2.$$

On passe du système de coordonnées semi-polaires r, ψ, z au système de coordonnées polaires ρ, θ, ψ, en posant

$$r = \rho\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\theta.$$

L'expression précédente de ds^2 se transforme en

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2\,d\theta^2 + \rho^2\sin^2\theta\,d\psi^2.$$

II. — Aires planes.

148. On a défini (n° 49, p. 44) la notion de domaine. On sait en particulier ce que c'est qu'un domaine plan borné.

Lorsque la frontière d'un domaine plan borné est constituée par un *nombre fini de portions de droites,* nous dirons que c'est *un domaine polygonal.* C'est le cas, par exemple, pour un polygone (au sens ordinaire de la Géométrie), pour l'ensemble de plusieurs polygones, pour la région annulaire comprise entre deux polygones dont l'un est intérieur à l'autre.

Nous dirons que deux domaines n'ont aucune partie commune ou qu'ils sont extérieurs, s'ils ont au plus comme points communs des points de leur frontière.

Rappelons qu'un polygone convexe est tout entier d'un même côté par rapport à la droite obtenue en prolongeant un quelconque de ses côtés. Il en résulte que le segment obtenu en joignant deux points intérieurs à un polygone convexe ne contient que des points intérieurs au polygone.

Tout domaine polygonal peut être considéré comme la réunion d'un nombre fini de polygones convexes n'ayant deux à deux aucune partie commune.

En effet, soit D un domaine polygonal. Prenons un carré C contenant intérieurement le domaine D. Prolongeons indéfiniment les segments de droite dont l'ensemble constitue la frontière de D.

Si l'on remarque qu'une droite prolongée indéfiniment partage un polygone convexe en deux polygones convexes, on voit que l'ensemble de ces droites partage C en un nombre fini de polygones convexes ; soit (p) l'ensemble de ces polygones. Chacun des polygones p ne contient intérieurement aucun point de la frontière de D. Il en résulte que, dans un polygone p, il est impossible qu'il y ait intérieurement deux points dont l'un serait extérieur à D, l'autre intérieur à D, car le segment joignant ces deux points devrait contenir un point de la frontière. Il y a, par suite, deux catégories de polygones p : les uns sont contenus dans D, les autres n'ont aucune partie commune avec D. L'ensemble des polygones de la première catégorie constitue le domaine D ; cela établit la proposition énoncée.

Nous admettons, comme résultant de la géométrie élémentaire, qu'à tout domaine polygonal est attaché un nombre appelé *aire* du domaine, possédant les deux propriétés suivantes :

1° Deux domaines polygonaux égaux ont même aire ;

2° Le domaine polygonal formé par la réunion de deux domaines polygonaux n'ayant aucune partie commune, a pour aire la somme des aires de ces deux domaines partiels.

149 ([1]). Soit maintenant D un domaine plan borné quelconque. On appelle *aire de* D *un nombre plus grand que l'aire de tout domaine polygonal contenu dans* D *et plus petit que l'aire de tout domaine polygonal contenant* D, ceci dans l'hypothèse où il existe un et un seul nombre possédant ces propriétés.

Tout domaine polygonal contenu dans D est contenu dans tout domaine polygonal contenant D. Si l'on considère, d'une part, les aires de tous les domaines polygonaux contenus dans D, d'autre part, les aires de tous les domaines polygonaux contenant D, on a deux ensembles de nombres, tout nombre du premier étant inférieur à tout nombre du second. Les nombres du premier ont une borne supérieure A, les nombres du second ont une borne inférieure A′, et l'on a

$$A \leqq A'.$$

([1]) Dans ce numéro, nous désignons par une même lettre un domaine et son aire.

Pour qu'il existe une aire pour le domaine D, il faut et il suffit que l'on ait

$$A = A'.$$

Pour cela, il faut et il suffit que, quel que soit le nombre positif ε, on puisse trouver un domaine polygonal P contenu dans D, et un domaine polygonal P' contenant D, tels que

$$P' - P < \varepsilon.$$

Supposons que cela ait lieu. Désignons par K le domaine polygonal qui, ajouté à P, constitue P'; on a

$$K < \varepsilon.$$

La frontière de D est contenue dans le domaine K, de sorte que, *s'il y a une aire pour* D, *la frontière de* D *peut être renfermée dans un domaine polygonal d'aire plus petite que* ε.

La réciproque est vraie. Supposons qu'étant donné $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un domaine polygonal K renfermant la frontière de D et d'aire inférieure à ε. Prenons un carré C contenant D, prolongeons indéfiniment les côtés dont l'ensemble constitue la frontière de K. Nous divisons ainsi C en un nombre fini de polygones convexes qui sont de différentes sortes ; comme chacun d'eux ne contient intérieurement aucun point de la frontière de K, les uns sont contenus dans K, et K est formé par leur réunion, soit (α) cette première catégorie; les autres n'ont aucune partie commune avec K, par suite, ils ne contiennent aucun point de la frontière de D; deux cas sont possibles : ou bien ils sont contenus tout entiers dans D [catégorie (β)], ou bien ils sont tout entiers extérieurs à D [catégorie (γ)]. Soient P le domaine polygonal formé par la réunion des polygones (β), P' le domaine polygonal formé par la réunion des polygones (α) et (β), P est contenu dans D, et P' contient D. La différence $P' - P$ est égale à K, donc

$$P' - P < \varepsilon.$$

En résumé, *pour qu'il y ait une aire, il faut et il suffit que, quel que soit le nombre positif* ε, *la frontière de* D *puisse être renfermée dans un domaine polygonal d'aire plus petite que* ε.

L'aire ainsi définie satisfait aux conditions suivantes :

1° Deux domaines égaux ont même aire, car les deux aires sont les bornes supérieures de deux ensembles de nombres identiques, à

savoir les aires des domaines polygonaux respectivement contenus dans les domaines donnés.

2° Soient D_1 et D_2 deux domaines n'ayant aucune partie commune, D le domaine formé par leur réunion. Soit $\varepsilon > 0$.

On peut trouver des domaines polygonaux : P_1 contenu dans D_1, P'_1 contenant D_1, P_2 contenu dans D_2, P'_2 contenant D_2, tels que

$$P'_1 - P_1 < \varepsilon, \qquad P'_2 - P_2 < \varepsilon,$$
$$P_1 < D_1 < P_1 + \varepsilon, \qquad P_2 < D_2 < P_2 + \varepsilon.$$

P_1 et P_2 n'ont aucune partie commune, et leur réunion constitue un domaine polygonal P contenu dans D. Soit Π le domaine polygonal formé par la réunion de P'_1 et P'_2. Π contient le domaine D et l'on a

$$\Pi = P'_1 + P'_2 < P + 2\varepsilon.$$

Ainsi D est compris entre deux domaines polygonaux dont les aires diffèrent de moins de 2ε. Comme ε est arbitraire, cela signifie qu'il existe pour D une aire; cette aire est supérieure à tous les nombres $P_1 + P_2$, inférieure à tous les nombres $P_1 + P_2 + 2\varepsilon$; donc elle est la somme des aires de D_1 et D_2.

Inversement, si un domaine D est formé par la réunion de deux domaines D_1 et D_2 n'ayant aucune partie commune, et si D et D_1 ont des aires, D_2 a aussi une aire que l'on obtient en retranchant de l'aire de D l'aire de D_1. En effet, d'abord il y a une aire pour le domaine D_2, car sa frontière, étant formée par des parties des frontières de D et D_1, possède la propriété de pouvoir être enfermée dans un domaine polygonal d'aire plus petite que tout nombre donné à l'avance. D'après ce qui précède, on a alors, entre les aires de ces trois domaines, la relation

$$D = D_1 + D_2,$$

d'où

$$D_2 = D - D_1.$$

Il suit de là que, si un domaine D du plan peut s'obtenir en réunissant différents domaines $D_1, D_2, \ldots, D_h$ et en retranchant d'autres domaines $D'_1, D'_2, \ldots, D'_k$, on a

$$\text{aire } D = \text{aire } D_1 + \ldots + \text{aire } D_h - \text{aire } D'_1 - \ldots - \text{aire } D'_k.$$

150. Rapportons le domaine D à deux axes rectangulaires Ox, Oy et effectuons un carrelage plan au moyen de parallèles aux axes

distantes de ρ. A chaque carrelage on obtient des carrés de différentes sortes :

1° *Des carrés entièrement contenus dans* D;

2° *Des carrés n'ayant aucune partie commune avec* D ou, comme nous dirons, *extérieurs à* D;

3° Les autres carrés seront dits *empiétant sur* D; chacun d'eux contient des points de la frontière F de D, car il contient intérieurement des points intérieurs et des points extérieurs à D.

Je dis que *l'aire totale des carrés de la troisième catégorie tend vers zéro avec* ρ. Pour cela, je vais montrer que *l'aire totale des carrés rencontrant la frontière de* D *tend vers zéro avec* ρ.

Remarquons d'abord que, si l'on a dans le plan un segment de droite AB, les carrés d'un carrelage de côté ρ qui rencontrent AB sont compris dans un rectangle obtenu comme il suit : on prolonge AB de part et d'autre de $\rho\sqrt{2}$; on considère le rectangle qui a pour base médiane le segment ainsi obtenu et qui est compris entre deux segments égaux et parallèles, à la distance $\rho\sqrt{2}$ du premier. Un carré rencontrant AB a tous ses points distants de AB au plus de $\rho\sqrt{2}$. Donc il est compris à l'intérieur de ce rectangle. Or, l'aire du rectangle tend vers zéro avec ρ. Il suit de là que, dans un carrelage plan, la somme des aires des carrés qui rencontrent AB tend vers zéro avec ρ.

Si nous considérons un nombre *fini* de portions de droites telles que AB, la somme des aires des carrés d'un carrelage de côté ρ rencontrant l'un ou l'autre de ces segments tend encore vers zéro avec ρ.

Cela étant, revenons au domaine D qui, par hypothèse, a une aire. ε étant un nombre positif donné, on peut renfermer la frontière F de D dans un domaine polygonal K d'aire plus petite que ε. Soit L la frontière de K. Les carrés d'un carrelage qui rencontrent la frontière F de D sont, ou bien parmi les carrés qui rencontrent la frontière L de K, ou bien parmi les carrés entièrement contenus dans K.

Or, ces derniers ont une aire totale plus petite que ε. Ceux qui rencontrent L ont une aire totale qui tend vers zéro avec ρ. Donc, dès que ρ est assez petit, les carrés rencontrant F ont une aire totale plus petite que 2ε. Comme ε est arbitraire, cela exprime que cette aire tend vers zéro avec ρ. Donc les carrés de la troisième catégorie (empiétant sur D) ont une aire totale qui tend vers zéro avec ρ. Nous en tirons la conclusion suivante :

Étant donné un domaine D *rapporté à deux axes rectangu-*

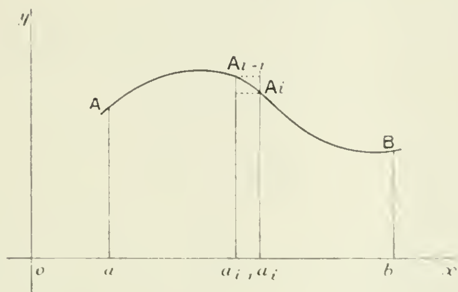
laires, si l'on effectue par des parallèles aux axes un carrelage plan de côté ρ, la somme des aires des carrés entièrement contenus dans D a pour limite, quand ρ tend vers zéro, l'aire de D.

151. *Évaluation des aires planes.* — Prenons d'abord le cas particulier suivant : on considère en coordonnées rectangulaires un arc de courbe AB représenté par l'équation

$$y = f(x),$$

x variant dans un intervalle (a, b), $f(x)$ étant une fonction continue et *positive*. Soit D le domaine limité par l'arc de courbe AB, les ordonnées extrêmes Aa, Bb et l'axe Ox (*fig.* 2).

Fig. 2.



Partageons l'intervalle (a, b) en intervalles partiels par des valeurs intermédiaires

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b.$$

Soient a_{i-1}, a_i les points de Ox ayant pour abscisses x_{i-1}, x_i. Menons les ordonnées correspondantes qui rencontrent la courbe en A_{i-1} et A_i. Soient m_i et M_i les bornes inférieure et supérieure de f dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i); construisons les deux rectangles ayant pour base commune $a_{i-1}a_i$ et pour hauteurs, l'un m_i, l'autre M_i. Ils ont respectivement pour aires

$$m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Le domaine partiel limité par l'arc $A_{i-1}A_i$, les ordonnées $a_{i-1}A_{i-1}$, $a_i A_i$ et l'axe Ox, est compris entre ces deux rectangles. Le domaine D est donc compris entre deux domaines polygonaux ayant pour aires les nombres

$$\sum m_i(x_i - x_{i-1}), \qquad \sum M_i(x_i - x_{i-1}).$$

D'après la théorie de l'intégrale définie, lorsque la loi de partage de l'intervalle (a, b) varie, il y a un nombre déterminé supérieur ou égal aux premières sommes, inférieur ou égal aux secondes. Ce nombre est l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. Il en résulte que le domaine considéré a une aire qui est $\int_a^b f(x)\,dx$ ou encore $\int_a^b y\,dx$.

Si, sur AB, on prend un point variable M d'abscisse x, on peut dire que l'aire du domaine amMA, m étant le pied de l'ordonnée du point M, est une fonction de x représentée par l'intégrale $\int_a^x y\,dx$. Cette fonction a donc pour dérivée la fonction $y = f(x)$.

On dit aussi que *l'élément différentiel de l'aire* est $y\,dx$, ou encore que l'*aire élémentaire* est $y\,dx$.

Considérons, par exemple, une ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

ou

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Prenons deux abscisses x_0, x_1 et cherchons l'aire A de la portion de plan située au-dessus de Ox, limitée par l'arc d'ellipse, les deux ordonnées correspondant à x_0 et x_1 et l'axe des x. On a

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Pour intégrer cette expression, posons $x = a\sin\varphi$, d'où

$$dx = a\cos\varphi\,d\varphi, \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\varphi,$$

φ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Il vient

$$A = \frac{b}{a}\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} a^2\cos^2\varphi\,d\varphi = ab\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi,$$

φ_0 et φ_1 correspondant à x_0 et x_1. L'intégration donne

$$A = ab\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2} + \frac{\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0}{4}\right).$$

En particulier, pour $x_0 = 0$, $x_1 = a$, on obtient l'aire du quart de l'ellipse. φ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et l'on a $A = \pi\frac{ab}{4}$.

152. Pour évaluer l'aire d'un domaine de forme plus compliquée, on cherche à ramener cette aire à des sommes ou à des différences d'aires de domaines rentrant dans les conditions précédentes. Considérons, par exemple, la région du plan limitée par deux ordonnées $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ et deux courbes $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, avec $f \geqq \varphi$.

Supposons d'abord $\varphi > 0$. On reconnaît que le domaine D est la différence de deux domaines D_1 et D_2 dont le premier est limité par $y = f(x)$, les ordonnées extrêmes et Ox, le second par $y = \varphi(x)$, les ordonnées extrêmes et Ox. D'où l'expression suivante de l'aire A du domaine D

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx = \int_a^b (f - \varphi)\,dx.$$

Si l'on déplace Ox parallèlement à lui-même, ce qui revient à faire un changement de variable de la forme $y = y' + h$, $f - \varphi$ reste constant, de sorte que l'intégrale ne change pas. Donc le résultat reste valable quelle que soit la position de Ox par rapport à la courbe $y = \varphi(x)$; on peut donc lever la restriction de $\varphi > 0$.

On a des résultats analogues en permutant le rôle des variables x et y.

153. Si un domaine est rapporté à des axes obliques faisant l'angle θ et si l'on a une courbe

$$y = f(x),$$

f étant positif, on reconnaît que l'aire d'un domaine élémentaire compris entre deux ordonnées voisines d'abscisse x et $x + dx$ est

$$y \sin\theta\, dx,$$

de sorte que l'aire du domaine est l'intégrale

$$\sin\theta \int_a^b y\,dx.$$

154. Considérons le cas des coordonnées polaires. Soit

$$\rho = f(\omega)$$

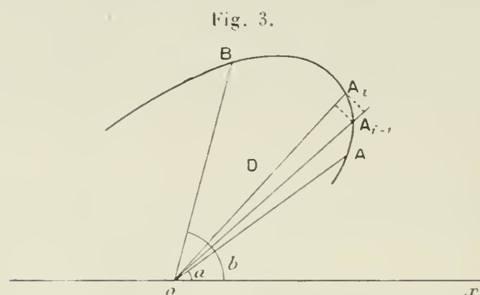
l'équation d'une courbe, ω variant dans un intervalle (a, b) et ρ étant positif dans cet intervalle. Soit D le domaine compris entre l'arc de

courbe AB et les rayons extrêmes $\omega = a$, $\omega = b$ (*fig.* 3). Divisons l'intervalle (a, b) en intervalles partiels par les valeurs intermédiaires

$$a = \omega_0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_{n-1},\ \omega_n = b.$$

Le domaine partiel compris entre les rayons d'angle polaire ω_{i-1},

Fig. 3.



ω_i est compris entre deux secteurs circulaires d'aires respectives

$$\tfrac{1}{2} m_i^2 (\omega_i - \omega_{i-1}), \qquad \tfrac{1}{2} M_i^2 (\omega_i - \omega_{i-1}),$$

m_i et M_i étant les bornes inférieure et supérieure de f dans l'intervalle (ω_{i-1}, ω_i). On en conclut que l'aire du domaine total, qui doit être supérieure ou égale aux nombres $\frac{1}{2}\sum m_i^2(\omega_i - \omega_{i-1})$ et inférieure ou égale aux nombres $\frac{1}{2}\sum M_i^2(\omega_i - \omega_{i-1})$, est représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2\, d\omega.$$

III. — Intégrales doubles.

155. Soit D un domaine plan borné ayant une aire A et rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy. Soit $f(x, y)$ une fonction définie en tout point de D et continue. Imaginons qu'on divise D en domaines partiels, par exemple en effectuant un carrelage par des parallèles aux axes, ou tout autrement. Désignons les domaines partiels obtenus, ainsi que leurs aires respectives, par $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. Dans le domaine σ_i, prenons arbitrairement un point (x_i, y_i) et formons la somme

$$(1) \qquad \sum f(x_i, y_i)\sigma_i.$$

Considérons une suite de partages $P_1, P_2, \ldots, P_h, \ldots$ telle que, quel que soit le nombre positif α, chacun des domaines partiels, à partir d'un certain rang dans la suite, est contenu dans un carré de côtés parallèles aux axes et de côté plus petit que α; nous exprimerons, d'une manière abrégée, cette condition en disant que *l'on fait varier le partage de façon que les domaines partiels deviennent infiniment petits dans toutes leurs dimensions*. Je dis que, dans ces conditions, *la somme* $\sum f(x_i, y_i)\sigma_i$ *a une limite déterminée.*

Soient M et m les bornes de f dans D, M_i et m_i ses bornes dans le domaine partiel σ_i. Du fait que l'on a

$$m_i \leqq f(x_i y_i) \leqq M_i$$

résulte

$$\sum m_i\sigma_i \leqq \sum f(x_i y_i)\sigma_i \leqq \sum M_i\sigma_i.$$

Posons

$$s = \sum m_i\sigma_i, \qquad S = \sum M_i\sigma_i;$$

nous appellerons ces deux nombres *somme inférieure* et *somme supérieure*. Comme $M_i \leqq M$, $m_i \geqq m$, on a

$$S \leqq M\sum \sigma_i = MA, \qquad s \geqq m\sum \sigma_i = mA.$$

Étant donné un premier partage, considérons-en un second, qui sera dit *consécutif au premier*, obtenu en subdivisant chaque domaine partiel du premier en certains domaines partiels. Pour passer de la somme supérieure S relative au premier à la somme supérieure S′ relative au second, on doit remplacer chaque terme $M_i\sigma_i$ par une certaine somme de termes, M_i et σ_i jouant, par rapport à cette somme, le rôle que jouaient précédemment M et A par rapport à la somme S.

Par conséquent, $M_i\sigma_i$ est remplacé par des termes dont la somme est moindre. Donc, en passant du premier partage au second, S ne peut que diminuer; de même, s ne peut qu'augmenter.

Toute somme supérieure est au moins égale à toute somme inférieure. Soient, en effet, deux partages P et P′, S la somme supérieure relative à P, s' la somme inférieure relative à P′. Prenons un troisième partage, consécutif aux deux premiers (on obtiendra un tel partage en prenant, de toutes les manières possibles, le domaine commun à un domaine σ relatif à P et à un domaine σ' relatif à P′). Soient S″ et

s'' les sommes relatives à ce partage. Nous avons

$$S \geqq S'', \qquad s'' \geqq s', \qquad S'' \geqq s'',$$

on en déduit

$$S \geqq s'.$$

On peut trouver une somme supérieure et une somme inférieure différant d'aussi peu que l'on veut. En effet, nous avons

$$S - s = \sum (M_i - m_i)\sigma_i.$$

La fonction f étant continue dans le domaine D, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre $\alpha > 0$ tel que les conditions

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha$$

entraînent

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Effectuons alors un partage dans lequel chaque domaine partiel soit contenu dans un carré de côtés parallèles aux axes et de côté plus petit que α. Les nombres M_i et m_i, bornes de f dans un domaine partiel σ_i, diffèrent entre eux de moins de ε. Il en résulte que l'on a

$$S - s < \varepsilon \sum \sigma_i = \varepsilon A,$$

et εA peut être rendu aussi petit que l'on veut.

Dans ces conditions, les nombres s d'une part, S de l'autre, sont tels que la borne supérieure des s est identique à la borne inférieure des S. Soit I ce nombre.

Considérons une suite de partages $P_1, P_2, \ldots, P_h, \ldots$ remplissant les conditions indiquées dans l'énoncé. Soient S_h et s_h les sommes relatives au partage P_h. Choisissons un nombre positif ε et déterminons le nombre α qui lui correspond d'après la loi indiquée. A partir d'un certain rang dans la suite des partages, les conditions précédentes sont réalisées et l'on a

$$S_h - s_h < \varepsilon A.$$

Comme ces deux nombres S_h et s_h comprennent entre eux le nombre I, ils ont tous deux pour limite I. La somme (1), étant comprise entre S_h et s_h, a donc aussi une limite déterminée qui est le nombre I. C'est ce qu'il fallait démontrer.

I est dit *l'intégrale double de la fonction f étendue au do-*

maine D. On la représente ainsi :

$$I = \int\int_D f(x, y)\, d\sigma,$$

ou encore

$$I = \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

156. *Remarques.* — 1° Il résulte des propriétés des sommes S et s que l'on a

$$mA \leq \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy \leq MA,$$

et, si G est la borne supérieure de la valeur absolue de f,

$$\left| \int\int_D f(x, y)\, dx\, dy \right| \leq GA.$$

2° Si D est constitué par la réunion de plusieurs domaines D_1, D_2, ..., D_h, on a

$$\int\int_D f\, d\sigma = \int\int_{D_1} f\, d\sigma + \int\int_{D_2} f\, d\sigma + \ldots + \int\int_{D_h} f\, d\sigma.$$

Il suffit, pour le voir, de considérer des partages obtenus en partageant d'abord D suivant D_1, D_2, ..., D_h, puis chacun de ces domaines en nouveaux domaines partiels.

3° Si f est de la forme

$$f = a\varphi + b\psi + \ldots + c\theta,$$

a, b, ..., c étant constants, on a

$$\int\int_D f\, d\sigma = a \int\int_D \varphi\, d\sigma + b \int\int_D \psi\, d\sigma + \ldots + c \int\int_D \theta\, d\sigma.$$

En effet, les différentes intégrales figurant dans cette équation peuvent être considérées respectivement comme les limites des sommes suivantes :

$$\sum f(x_i, y_i)\sigma_i, \quad \sum \varphi(x_i, y_i)\sigma_i, \quad \sum \psi(x_i, y_i)\sigma_i, \quad \ldots, \quad \sum \theta(x_i, y_i)\sigma_i,$$

obtenues en prenant partout le même point (x_i, y_i).

Or on a, entre ces sommes, la relation

$$\sum f(x_i, y_i)\sigma_i = a \sum \varphi(x_i, y_i)\sigma_i + b \sum \psi(x_i, y_i)\sigma_i + \ldots + c \sum \theta(x_i, y_i)\sigma_i.$$

En prenant les limites des deux membres, on obtient la relation à démontrer.

4° I *peut être considéré comme la limite de la somme* $\Sigma' f(x_i, y_i)\sigma_i$, Σ' *étant la somme* Σ *diminuée des termes correspondant à certaines aires, pourvu que l'aire totale des éléments négligés tende vers zéro lorsque les aires partielles deviennent infiniment petites dans toutes leurs dimensions.* En effet, posons

$$\sum f(x_i, y_i)\,\sigma_i = \sum{}' f(x_i, y_i)\,\sigma_i + \alpha.$$

Soit B l'aire totale correspondant aux termes négligés; on a $|\alpha| < \text{BG}$, G étant la borne supérieure du module de f dans le domaine D. Si B tend vers zéro, il en est de même de α. Donc Σ' a même limite que Σ.

Par exemple, si nous effectuons un carrelage plan de côté ρ par des parallèles aux axes, *la somme* Σ' *obtenue en ne conservant dans* Σ *que les termes correspondant aux carrés entièrement contenus dans le domaine* D, *soit* $\Sigma' f(x_i, y_i)\,\rho^2$, *a pour limite l'intégrale double* $\int\int_{\text{D}} f(x, y)\,d\sigma$, *quand* ρ *tend vers zéro.*

5° Si f se réduit à 1, on reconnaît que l'on a

$$\int\int_{\text{D}} dx\,dy = \text{A}.$$

157. *Évaluation des intégrales doubles.* — Considérons le cas particulier suivant. Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans le rectangle R compris entre les droites

$$\begin{aligned} x &= a, & x &= b & (a &< b),\\ y &= a', & y &= b' & (a' &< b'), \end{aligned}$$

f étant indépendante de x, c'est-à-dire constante sur toute parallèle à ox. Je dis que l'on a dans ces conditions

$$(1)\qquad \int\int_{\text{R}} f(x, y)\,d\sigma = (b - a)\int_{a'}^{b'} f(x, y)\,dy.$$

En effet, partageons R en rectangles partiels par des parallèles à ox d'ordonnées

$$\eta_0 = a', \quad \eta_1, \quad \ldots, \quad \eta_{n-1}, \quad \eta_n = b',$$

et par des parallèles quelconques à oy.

M_i étant la borne supérieure de f dans l'intervalle (η_{i-1}, η_i), l'intégrale simple qui entre dans la formule (1) à démontrer peut être considérée comme la limite de la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} M_i(\eta_i - \eta_{i-1}).$$

D'autre part, l'intégrale double est la limite de la somme obtenue en prenant les différents rectangles partiels, en multipliant l'aire de chacun d'eux par la borne de f dans ce rectangle. Pour tous ceux de ces rectangles qui sont compris entre les droites $y = \eta_{i-1}$ et $y = \eta_i$, la borne supérieure de f est M_i, de sorte qu'à ces rectangles correspond une somme de termes qui est

$$(b - a) M_i(\eta_i - \eta_{i-1}).$$

En prenant la somme des termes analogues pour tous les intervalles (η_{i-1}, η_i), on trouve

$$(b - a) \sum M_i(\eta_i - \eta_{i-1}).$$

Cette expression a donc pour limite chacun des deux membres de l'égalité (1), qui est ainsi établie, et qui peut encore s'écrire

$$\int\int_R f(x, y)\, d\sigma = \int_a^b dx \int_{a'}^{b'} f(x, y)\, dy.$$

Nous allons étendre cette formule.

158. Soit D un domaine limité par deux ordonnées $x = a$, $x = b$ et deux courbes γ, γ' (*fig.* 4) représentées par les équations

$$y = \theta(x), \qquad y = \theta'(x),$$

θ et θ' étant fonctions continues de x dans l'intervalle (a, b) et telles que θ' soit plus grand que θ, sauf peut-être pour les valeurs extrêmes, où l'on peut avoir $\theta' = \theta$.

Soit $f(x, y)$ une fonction définie dans le domaine D et continue. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un nombre positif α vérifiant les deux conditions suivantes :

1° $|x - x'| < \alpha$ entraîne

$$|\theta(x) - \theta(x')| < \varepsilon, \qquad |\theta'(x) - \theta'(x')| < \varepsilon.$$

2° Les deux conditions

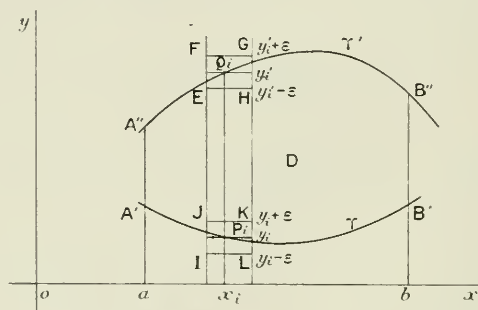
$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha$$

entraînent

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon.$$

Partageons l'intervalle $(b - a)$ en intervalles partiels $l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n$ dont nous désignons les longueurs respectives par les mêmes lettres, ces longueurs étant toutes plus petites que α. Soit x_i une valeur de x prise dans l'intervalle l_i. La droite $x = x_i$ coupe les deux courbes γ, γ' en deux points P_i, Q_i d'ordonnées y_i et y'_i. Soient (*fig.* 4) R_i la portion du domaine D comprise entre les ordonnées

Fig. 4.



extrêmes de l'intervalle l_i, R'_i le rectangle compris entre les mêmes ordonnées et les parallèles à ox menées par P_i et Q_i, R''_i la région commune à R_i et à R'_i. D'après les conditions imposées à α et à l_i, les fonctions θ et θ', dans l'intervalle l_i, ont une oscillation plus petite que ε. Les portions de courbe $y = \theta'(x)$, $y = \theta(x)$ correspondant à l'intervalle l_i sont donc respectivement à l'intérieur de deux rectangles limités tous deux par les ordonnées extrêmes et bornés, en outre, l'un par les droites d'ordonnées $y'_i - \varepsilon$, $y'_i + \varepsilon$ (EFGH, *fig.* 4), l'autre par les droites $y_i + \varepsilon$, $y_i - \varepsilon$ (IJKL). Le rectangle FGLI limité par les mêmes ordonnées extrêmes et par les droites d'ordonnées $y_i - \varepsilon$, $y'_i + \varepsilon$ contient R_i, R'_i et, par suite, R''_i. Le rectangle EHKJ limité par les mêmes ordonnées extrêmes et par les droites $y_i + \varepsilon$, $y'_i - \varepsilon$ est compris à la fois dans R_i et R'_i, par suite dans R''_i.

Or, ces deux rectangles auxiliaires ont pour différence d'aire $2 \times 2\varepsilon\, l_i$. Par suite, deux quelconques des régions R_i, R'_i, R''_i ont des aires qui diffèrent de moins de $4\varepsilon\, l_i$.

Cela posé, prenons une fonction auxiliaire φ qui sera définie dans le rectangle R'_i par la condition d'être égale à f sur le segment de droite $P_i Q_i$ et d'être constante sur toute parallèle à ox. Il résulte de là et de la condition 2° imposée à α qu'en tout point de R''_i, où f et φ se trouvent définies toutes deux, la différence $f - \varphi$ est inférieure en valeur absolue à ε. D'ailleurs φ rentre dans le cas du n° 157 et l'on a

$$\int\int_{R'_i} \varphi\, d\sigma = l_i \int_{y_i}^{y'_i} f(x_i, y)\, dy.$$

Cherchons à évaluer une limite supérieure de la différence

$$\int\int_{R_i} f\, d\sigma - \int\int_{R'_i} \varphi\, d\sigma.$$

Cette différence est inférieure en valeur absolue à la somme des valeurs absolues des trois différences suivantes :

$$\int\int_{R''_i} f\, d\sigma - \int\int_{R''_i} \varphi\, d\sigma, \quad \int\int_{R_i} f\, d\sigma - \int\int_{R''_i} f\, d\sigma, \quad \int\int_{R'_i} \varphi\, d\sigma - \int\int_{R''_i} \varphi\, d\sigma.$$

La première différence n'est autre que l'intégrale $\int\int_{R''_i} (f - \varphi)\, d\sigma$. Nous savons que l'on a $|f - \varphi| < \varepsilon$, d'où résulte

$$\left| \int\int_{R''_i} (f - \varphi)\, d\sigma \right| \leqq \varepsilon\, R''_i \leqq \varepsilon\, R_i.$$

La seconde différence est l'intégrale double de f étendue au domaine $R_i - R''_i$. Nous avons vu que ce domaine a une aire plus petite que $4\varepsilon\, l_i$. D'autre part, f est borné ; soit G la borne supérieure de son module. La seconde différence est plus petite en module que $4 G \varepsilon\, l_i$.

La troisième différence est l'intégrale de φ étendue au domaine $R'_i - R''_i$ dont l'aire est plus petite que $4\varepsilon l_i$. D'ailleurs on a $|\varphi| \leqq G$. Donc la troisième différence est plus petite en module que $4 G \varepsilon l_i$.

On a donc

$$\left| \int\int_{R_i} f\, d\sigma - \int\int_{R'_i} \varphi\, d\sigma \right| < \varepsilon (R_i + 8 G\, l_i),$$

de sorte que l'on peut écrire

$$\int\int_{R_i} f\,d\sigma = l_i \int_{y_i}^{y_i'} f(x_i, y)\,dy + \tau_i$$

avec

$$|\tau_i| < \varepsilon(R_i + 8G\,l_i).$$

Appliquons ce résultat à chaque valeur de i et ajoutons membre à membre les relations obtenues ; on obtient

$$(1) \qquad \int\int_D f\,d\sigma = \sum l_i \int_{y_i}^{y_i'} f(x_i, y)\,dy + \sum \tau_i$$

avec

$$\sum \tau_i < \varepsilon[A + 8G(b-a)].$$

Remarquons que l'intégrale simple $\int_{y_i}^{y_i'} f(x_i, y)\,dy$ ou encore $\int_{\theta(x_i)}^{\theta'(x_i)} f(x_i, y)\,dy$ contient x_i comme paramètre et est fonction continue de ce paramètre. Désignons-la par $\psi(x_i)$. Si l'on fait varier la loi de partage de l'intervalle (a, b) de manière que la plus grande longueur des intervalles partiels tende vers zéro, le premier terme du second membre de (1) a pour limite l'expression

$$\int_a^b \psi(x)\,dx,$$

et, comme ε est aussi petit que l'on veut, $\Sigma\tau_i$ tend vers zéro. Nous avons finalement la formule

$$\int\int_D f(x, y)\,d\sigma = \int_a^b \psi(x)\,dx,$$

ou, en remplaçant $\psi(x)$ par sa valeur,

$$\int\int_D f(x, y)\,d\sigma = \int_a^b dx \int_{\theta(x)}^{\theta'(x)} f(x, y)\,dy.$$

159. Soit, par exemple, à évaluer l'intégrale double $\int\int xy\,d\sigma$ étendue à la portion A, située dans l'angle xoy, de l'ellipse ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

On a, en appliquant la formule précédente,

$$\int\int_A xy\,d\sigma = \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy,$$

$$\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dy = \left(\frac{xy^2}{2}\right)_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{x}{2}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

$$\int\int_A xy\,d\sigma = \frac{b^2}{2a^2}\int_0^a x(a^2-x^2)\,dx.$$

On est ramené à calculer une intégrale de polynome.

160. Si le domaine D auquel est étendue l'intégrale double qu'on considère est de forme quelconque, on cherche à le décomposer en domaines rentrant dans les conditions précédentes.

Les considérations précédentes sont applicables si l'on permute le rôle des lettres x, y. On est encore ramené au calcul de deux intégrales successives, la première s'intégrant par rapport à x, la seconde par rapport à y.

Si le domaine D est un rectangle de côtés parallèles aux axes, limité par les droites $x=a$, $x=b$, $y=a'$, $y=b'$, en évaluant de deux manières $\int\int_D f\,d\sigma$, on obtient

$$\int_a^b dx\int_{a'}^{b'} f(x,y)\,dy = \int_{a'}^{b'} dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Cette formule peut être appelée *formule d'intégration* sous le signe $\int$.

161. *Changement de variables linéaire dans l'intégrale double.* — Considérons la transformation définie par les formules

$$x = au + bv + c, \qquad y = a'u + b'v + c',$$

le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

étant supposé différent de zéro. Si l'on considère les systèmes de variables (x, y), (u, v) comme représentant respectivement les coor-

données cartésiennes d'un point du plan des (x, y) et d'un point du plan des (u, v), on sait qu'il y a entre ces deux points une correspondance homographique qui possède les propriétés suivantes :

Si le point (u, v) décrit dans son plan un segment de droite, le point (x, y) décrit aussi dans son plan un segment de droite. A deux segments parallèles dans le plan (u, v) correspondent dans le plan (x, y) deux segments parallèles.

Si le point (u, v) prend toutes les positions à l'intérieur et sur le contour d'un triangle t, le point (x, y) prend toutes les positions à l'intérieur et sur le contour d'un triangle T correspondant à t.

Si $(u_0 v_0)$, $(u_1 v_1)$, $(u_2 v_2)$ sont les coordonnées des sommets de t, les sommets de T ont pour coordonnées $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ donnés par

$$\begin{array}{lll} x_0 = a\, u_0 + b\, v_0 + c, & x_1 = a\, u_1 + \ldots, & x_2 = a\, u_2 + \ldots, \\ y_0 = a' u_0 + b' v_0 + c', & y_1 = a' u_1 + \ldots, & y_2 = a' u_2 + \ldots. \end{array}$$

L'aire du triangle t est égale à la valeur absolue du déterminant

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix};$$

de même celle du triangle T est la valeur absolue de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} au_0 + bv_0 + c & a' u_0 + b' v_0 + c' & 1 \\ au_1 + bv_1 + c & a' u_1 + b' v_1 + c' & 1 \\ au_2 + bv_2 + c & a' u_2 + b' v_2 + c' & 1 \end{vmatrix}.$$

Or, ce second déterminant est égal au produit

$$\begin{vmatrix} u_0 & v_0 & 1 \\ u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a donc la relation

$$\text{aire}\,\mathrm{T} = \text{aire}\, t\, |\mathrm{D}|.$$

A tout domaine polygonal du plan des (u, v) correspond un domaine polygonal du plan des (x, y). Tous deux peuvent être décomposés en triangles qui se correspondent deux à deux. Il en résulte que le rapport de l'aire du second domaine à l'aire du premier est égal à $|\mathrm{D}|$.

On en conclut qu'*à un domaine quelconque du plan des* (u, v)

correspond un domaine du plan des (x, y), le rapport de l'aire du second domaine à l'aire du premier étant $|D|$.

Cela posé, considérons une intégrale double $\int\int f\,dx\,dy$ étendue à un domaine A du plan des (x, y). Par la transformation précédente, à A correspond un domaine a du plan des (u, v), et l'on a

$$A = a\,|D|.$$

Si l'on imagine A partagé en domaines partiels σ_i, on a

$$\int\int_A f(x, y)\,d\sigma = \lim \sum f(x_i, y_i)\,\sigma_i.$$

A σ_i correspond dans le plan des (u, v) un domaine σ'_i tel que l'on a

$$\sigma_i = \sigma'_i\,|D|.$$

Au point (x_i, y_i) correspond un point (u_i, v_i) dont les coordonnées satisfont aux relations

$$x_i = au_i + bv_i + c, \qquad y_i = a'u_i + b'v_i + c',$$

et l'on peut écrire

$$\sum f(x_i, y_i)\,\sigma_i = \sum f(au_i + bv_i + c, a'u_i + b'v_i + c')\,|D|\,\sigma'_i.$$

Posons

$$f(au + bv + c, a'u + b'v + c') = F(u, v).$$

La somme qui figure dans le second membre devient

$$\sum F(u_i, v_i)\,|D|\,\sigma'_i.$$

La première somme $\sum f(x_i, y_i)\,\sigma_i$ a pour limite

$$\int\int_A f(x, y)\,dx\,dy,$$

et la seconde somme, $\sum F(u_i, v_i)\,|D|\,\sigma'_i$, dans les mêmes conditions, a pour limite l'intégrale double

$$\int\int_a F(u, v)\,|D|\,du\,dv,$$

d'où la relation

$$\int\int_{A} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int_{a} f(au+bv+c,\ a'u+b'v+c')\,|\,D\,|\,du\,dv.$$

Si l'on remarque que D est le déterminant fonctionnel de x, y par rapport à u, v, on voit que le changement de variables se fait en substituant les nouvelles variables aux anciennes dans la fonction sous le signe $\int\int$ et en multipliant cette fonction par la valeur absolue du déterminant fonctionnel des anciennes variables par rapport aux nouvelles, la nouvelle intégrale double étant étendue au domaine a qui correspond au domaine donné A.

Nous allons étendre cette règle au cas général.

162. *Cas général du changement de variables.* — Considérons un changement de variables définissant une transformation de plan à plan dans les conditions suivantes :

1° On a

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v),$$

φ et ψ étant fonctions continues de u, v quand le point (u, v) est dans un certain champ borné Δ de son plan. On suppose qu'à deux points distincts du domaine Δ correspondent deux points (x, y) distincts. Il suit de là qu'à un point (x, y) ne correspond qu'un seul point (u, v).

Quand v, par exemple, reçoit une valeur fixe v_0, si u varie, (x, y) décrit un arc C_0 défini par

$$x = \varphi(u, v_0), \qquad y = \psi(u, v_0).$$

Quand v_0 varie en prenant toutes les valeurs de son intervalle de variation, l'arc de courbe C_0 balaye un certain domaine D. Ce domaine D a pour frontière l'ensemble des arcs de courbe correspondant aux côtés du rectangle qui constitue le champ Δ.

2° Les dérivées partielles de φ et ψ par rapport à u et v sont fonctions continues dans le champ Δ.

3° Le déterminant fonctionnel $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, qui est, d'après la condition précédente, fonction continue de u, v dans le champ Δ, ne s'annule pas dans ce champ. Il en résulte qu'il garde un signe constant.

Cela posé, soit ρ un nombre positif; considérons dans le champ Δ

un carré *abcd* de côté ρ, les sommets a, b, c étant

$$a:(u_0, v_0);\ b:(u_0+\rho, v_0);\ c:(u_0, v_0+\rho).$$

A un point (u, v) de ce carré correspond un point (x, y), et l'on a, par la formule des accroissements finis (n° 81),

$$(1)\quad \begin{cases} x = \varphi(u, v) = \varphi(u_0, v_0) + (u-u_0)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u', v') + (v-v_0)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u', v'), \\ y = \psi(u, v) = \psi(u_0, v_0) + (u-u_0)\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u'', v'') + (v-v_0)\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u'', v''), \end{cases}$$

(u', v'), (u'', v'') étant deux points intérieurs au carré.

Les valeurs des dérivées qui figurent dans ces formules ont pour limites, quand ρ tend vers zéro, les valeurs de ces dérivées pour u_0, v_0, soient $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_0}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial u_0}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial v_0}$. A $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\delta > 0$ tel que, si $\rho < \delta$, ce qui entraîne pour tout point (u, v) du carré

$$|u-u_0| < \delta, \qquad |v-v_0| < \delta,$$

les valeurs des dérivées qui entrent dans (1) diffèrent de leurs valeurs en (u_0, v_0) de moins de ε, d'où

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial v_0}\right| < \varepsilon, \qquad \ldots.$$

Prenons alors pour valeurs approchées de x, y les valeurs ξ, η suivantes :

$$\xi = \varphi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0} + (v-v_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v_0},$$

$$\eta = \psi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial\psi}{\partial u_0} + (v-v_0)\frac{\partial\psi}{\partial v_0}.$$

On a

$$|x-\xi| < \varepsilon(u-u_0) + \varepsilon(v-v_0) < 2\varepsilon\rho,$$

de même

$$|y-\eta| < 2\varepsilon\rho.$$

La distance du point (x, y) au point (ξ, η) est donc inférieure à $4\varepsilon\rho$.

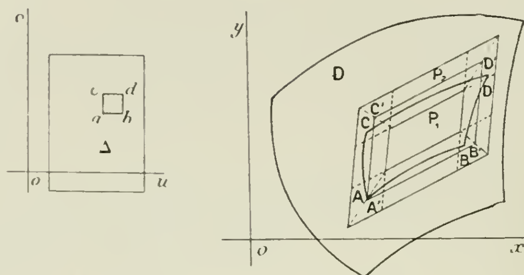
Quand (u, v) décrit le carré *abcd*, de ce que ξ et η sont fonctions *linéaires* de u, v résulte que le point (ξ, η) décrit un parallélogramme P. Soient A', B', C', D' ses sommets (*fig.* 5). Son aire est donnée (*Cf.* n° 161) par la relation

$$P = \rho^2\left|\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}\right| = \rho^2\,|D_0|,$$

en désignant par D_0 la valeur du déterminant fonctionnel de φ et ψ pour le point (u_0, v_0).

Calculons la longueur des côtés de ce parallélogramme P. Les som-

Fig. 5.



mets A′ et B′ correspondent respectivement à (u_0, v_0) et $(u_0 + \rho, v_0)$, d'où

$$\xi(B') - \xi(A') = \rho \frac{\partial\varphi}{\partial u_0},$$

$$\eta(B') - \eta(A') = \rho \frac{\partial\psi}{\partial u_0},$$

et, par suite,

$$A'B' = \rho\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u_0}\right)^2}.$$

On obtient de même

$$A'C' = \rho\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v_0}\right)^2}.$$

Soit G une limite supérieure dans le champ Δ des fonctions

$$\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2}, \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2};$$

on a

$$A'B' < G\rho, \qquad A'C' < G\rho,$$

et, comme on a

$$\text{distance } A'B' \text{ à } C'D' = \frac{\text{aire P}}{A'B'},$$

il en résulte, en remplaçant A′B′ par une quantité plus grande,

$$\text{distance } A'B' \text{ à } C'D' > \rho^2 \frac{|D_0|}{G\rho}.$$

Par hypothèse (3°), D est fonction continue et ne s'annule pas;

donc $|D|$ a une borne inférieure g *positive*, et l'on a

$$\text{distance } A'B' \text{ à } C'D' > \rho \frac{g}{G},$$

et de même

$$\text{distance } A'C' \text{ à } B'D' > \rho \frac{g}{G}.$$

Assujettissons-nous à prendre $\varepsilon < \frac{g}{8G}$, de façon à avoir

$$4\varepsilon\rho < \frac{1}{2} \rho \frac{g}{G}.$$

Si alors on trace de part et d'autre de chaque côté du parallélogramme P, et parallèlement à ce côté, deux parallèles qui en soient distantes de $4\varepsilon\rho$, on forme un parallélogramme intérieur P_1 et un parallélogramme extérieur P_2 (*fig.* 5).

Cela étant, revenons au point (x, y). A chaque côté du carré $abcd$ correspond dans le plan des (x, y) un arc de courbe. Ces arcs AB, BD, DC, CA constituent la frontière de la région R correspondant au carré $abcd$. Comme la distance d'un point (x, y) au point (ξ, η) correspondant est plus petite que $4\varepsilon\rho$, l'arc AB, par exemple, est compris entre les parallèles à A'B' que nous avons tracées; une conclusion analogue s'applique à BD, DC, CA, de sorte que la région R contient P_1 et est contenue dans P_2; d'où, en désignant les aires de ces régions par les mêmes lettres,

$$|R - P| < P_2 - P_1.$$

L'aire $P_2 - P_1$ est la somme des aires de quatre trapèzes de hauteur $8\varepsilon\rho$ ayant respectivement comme bases médianes les quatre côtés de P. On a donc

$$P_2 - P_1 = 8\varepsilon\rho \times 2(A'B' + A'C'),$$

d'où

$$|R - P| \leqq P_2 - P_1 \leqq 8\varepsilon\rho \times 4G\rho = 32G\varepsilon\rho^2.$$

Le nombre $32G\varepsilon$ peut être pris aussi petit qu'on veut, pourvu que ρ soit suffisamment petit, de sorte qu'on peut écrire, comme $P = \rho^2 |D_0|$:

$$R = \rho^2 |D_0| + \eta_1 \rho^2, \tag{2}$$

avec la condition que la borne supérieure η des nombres $|\eta_1|$ pour tous les carrés du champ Δ tend vers o avec ρ.

On peut exprimer aussi ce fait en disant que le *rapport* $\frac{R}{\rho^2}$ *tend uniformément vers* $|D_0|$ *lorsque* ρ *tend vers* 0.

163. Cela posé, soit un domaine A du plan des (x, y) compris dans la région correspondant au domaine Δ du plan des (u, v). Soit a la portion de Δ qui correspond à A.

Considérons une intégrale double, $\int\int f(x, y)\,dx\,dy$. Posons

$$f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] = F(u, v).$$

Effectuons dans le plan des (u, v) un carrelage de côté ρ, dans les conditions précédentes; en désignant par (x_0, y_0) le point qui correspond à (u_0, v_0) de l'égalité (2) du numéro précédent, on obtient

$$f(x_0, y_0)\,R = f(x_0, y_0)\,\rho^2\,|D_0| + f(x_0, y_0)\,\rho^2\eta_1.$$

Écrivons pour tous les carrés entièrement contenus dans a les relations analogues, et faisons la somme. Il vient

$$\sum f(x_0, y_0)\,R = \sum f(x_0, y_0)\,\rho^2\,|D_0| + \sum f(x_0, y_0)\,\rho^2\eta_1,$$

ou encore

$$(3)\qquad \sum f(x_0, y_0)\,R = \sum F(u_0, v_0)\,\rho^2\,|D_0| + \sum F(u_0, v_0)\,\rho^2\eta_1.$$

Faisons tendre ρ vers zéro. D'après la théorie de l'intégrale double, (n° 156, p. 160), le premier terme du second membre a pour limite

$$\int\int_a F(u, v)\,|D|\,du\,dv.$$

Quant à la somme qui figure dans le premier membre, elle est étendue aux régions correspondant aux carrés entièrement contenus dans a. Il y a donc dans cette somme, si on la compare à la somme analogue étendue à toute la région A, des termes négligés : à savoir, ceux qui sont relatifs aux régions correspondant aux régions négligées dans $\sum F(u_0, v_0)\,\rho^2\,|D_0|$.

Soient G une borne supérieure de $|D_0|$ et η le plus grand des nombres $|\eta_1|$. A cause de la relation

$$R = \rho^2\,|D_0| + \rho^2\eta_1,$$

l'aire totale négligée dans le plan des (x, y) est à l'aire négligée dans le plan des (u, v) dans un rapport plus petit que $G + \eta_1$. Comme la seconde tend vers zéro, il en est de même de la première. La somme qui figure dans le premier membre de (3) a donc pour limite, lorsque ρ tend vers zéro, $\int\int_A f(x, y)\,dx\,dy$.

Enfin, le terme complémentaire du second membre est plus petit que $\eta_1 H a$, H étant une limite supérieure de $|F(u, v)|$, par suite, il tend vers zéro avec ρ.

En résumé, on a la formule générale du changement de variables

$$\int\int_A f(x, y)\,dx\,dy = \int\int_a f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv.$$

164. Comme exemple, passons d'un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x, y) au système de coordonnées polaires défini par $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$. Considérons un arc de courbe ayant pour équation

$$\rho_1 = f_1(\omega),$$

ω allant de ω_0 à ω_1, et ρ étant une fonction continue et positive dans cet intervalle. Lorsque le point M décrit l'arc, le rayon vecteur OM balaye un certain domaine compris entre les rayons extrêmes OA_0, OA_1.

Soit une seconde courbe

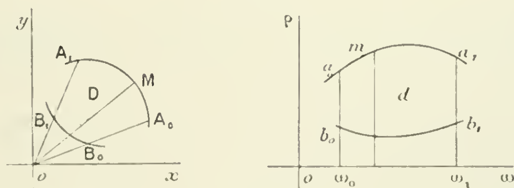
$$\rho_2 = f_2(\omega)$$

satisfaisant aux mêmes conditions, et telle, en outre, que

$$\rho_2 < \rho_1.$$

Considérons (*fig.* 6) le domaine D compris entre ces deux courbes et les deux rayons extrêmes.

Fig. 6.



Si l'on s'astreint à prendre ω compris entre o et 2π, à un système de valeurs de x, y correspond un seul système de valeurs de ρ, ω et inversement.

Calculons le déterminant fonctionnel de la transformation

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \omega)} = \begin{vmatrix} \cos\omega & -\rho\sin\omega \\ \sin\omega & \rho\cos\omega \end{vmatrix} = \rho.$$

Dans la région considérée, $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \omega)}$ a donc une valeur constamment positive.

La formule du changement de variables pour une intégrale double étendue au domaine D est la suivante :

$$\int\int_D f(x, y)\, dx\, dy = \int\int_d f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)\, \rho\, d\rho\, d\omega,$$

d étant un domaine constitué comme il suit : ω varie de ω_0 à ω_1 et, pour chaque valeur de ω, ρ varie de $f_2(\omega)$ à $f_1(\omega)$.

Considérons maintenant une première courbe fermée

$$\rho = \varphi_1(\omega),$$

φ_1 étant positif et ω variant de 0 à 2π avec la condition

$$\varphi_1(2\pi) = \varphi_1(0),$$

puis une seconde courbe fermée

$$\rho = \varphi_2(\omega)$$

remplissant les mêmes conditions et, en outre, telle que

$$\varphi_2 < \varphi_1.$$

Étudions le domaine D en forme de couronne qui a pour frontière l'ensemble de ces deux courbes. Les résultats de la théorie ne sont pas immédiatement applicables, parce qu'aux points de l'axe polaire correspondent deux valeurs pour ω. Mais, si nous séparons du domaine D la portion comprise entre les droites $\omega = 0$ et $\omega = \varepsilon > 0$, il reste un domaine auquel s'appliquent les considérations précédentes ; si ε tend vers zéro, l'aire du secteur négligé dans le plan des (x, y) et l'aire de la région négligée correspondante dans le plan (ρ, ω) tendent aussi vers zéro. Les intégrales obtenues ne cessent pas d'être égales et tendent vers les intégrales étendues aux régions complètes. Donc la formule a encore lieu pour ces régions.

Enfin, considérons un domaine contenant l'origine. On sait que, dans le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, l'origine est un point singulier : de plus, le déterminant fonc-

tionnel s'annule pour ce point. Pour ce double motif, la formule établie précédemment n'est pas applicable. Mais elle est applicable au domaine obtenu en enlevant du premier la région limitée par un cercle de centre O et de rayon ε. Ce cercle correspond dans le plan des variables (ω, ρ) à un rectangle de longueur 2π et de hauteur ε, dont l'aire, par conséquent, tend vers zéro avec ε. Il en résulte encore que la formule du changement de variables est valable pour le domaine entier.

165. On est conduit, d'après l'étude faite au n° 162, à dire que l'aire de la région limitée dans le plan (x, y) par les quatre courbes coordonnées u, $u + du$, v, $v + dv$, a pour valeur approchée la quantité

$$\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\, dv.$$

On dit que c'est l'*élément différentiel de l'aire considérée*.

Dans certains cas, on peut trouver directement l'élément différentiel de l'aire. Par exemple, en coordonnées polaires, on reconnaît que l'aire élémentaire comprise entre les courbes $\rho =$ const., $\rho + d\rho$, ω, $\omega + d\omega$ est la différence des aires de deux secteurs circulaires de rayons ρ et $\rho + d\rho$, et d'angle au centre $d\omega$. Elle est donc égale à

$$\tfrac{1}{2}(\rho + d\rho)^2\, d\omega - \tfrac{1}{2}\rho^2\, d\omega,$$

c'est-à-dire à

$$\rho\, d\rho\, d\omega + \tfrac{1}{2}\, d\rho^2\, d\omega.$$

En partageant le domaine considéré en domaines partiels de cette nature, on peut arriver directement à la formule du changement de variables. On constate que les termes en $d\rho^2\, d\omega$ ont une somme qui tend vers zéro.

166. En faisant $f = 1$ dans la formule générale du changement de variables, on obtient

$$\int\!\!\int_{A} dx\, dy = A = \int\!\!\int_{a} \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\, dv.$$

Soient M et m les bornes supérieure et inférieure de $|D|$ dans le domaine borné a. Le second membre est compris entre Ma et ma, d'où

$$m \leqq \frac{A}{a} \leqq M.$$

Le rapport $\frac{A}{a}$ est donc compris entre M et m. Il suit de là que, si nous considérons un point (x_0, y_0) de A et un domaine contenant ce point, si ce domaine varie de façon à devenir infiniment petit dans toutes ses dimensions sans cesser de contenir le point (x_0, y_0), le rapport de l'aire de ce domaine à l'aire du domaine correspondant en (u, v) tend vers $\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{u_0 v_0}$.

167. *Intégrales doubles fonctions de paramètres.* — Supposons qu'on ait un domaine A dans le plan des (x, y), une fonction $f(x, y)$ définie dans ce domaine et dépendant de certains paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ L'intégrale double $\int\int_A f(x, y)\,dx\,dy$ est une fonction de $\alpha, \beta, \ldots$ Soit $F(\alpha, \beta, \ldots)$ cette fonction.

Si f est fonction continue par rapport à $\alpha, \beta, \ldots$, il en est de même de F. En effet, on a

$$\begin{aligned} &F(\alpha + \Delta\alpha, \ldots) - F(\alpha, \beta, \ldots) \\ &\quad = \int\int_A [f(x, y, \alpha + \Delta\alpha, \ldots) - f(x, y, \alpha, \ldots)]\,dx\,dy. \end{aligned}$$

En vertu de la continuité de f, à tout nombre positif ε correspond un nombre positif δ tel que les conditions

$$|\Delta\alpha| < \delta, \qquad |\Delta\beta| < \delta, \qquad \ldots$$

entraînent, dans un champ borné convenablement choisi des variables $x, y, \alpha, \beta, \ldots$,

$$|f(x, y, \alpha + \Delta\alpha, \ldots) - f(x, y, \alpha, \ldots)| < \varepsilon.$$

Dans ces conditions, le second membre de la relation précédente est inférieur à εA, donc la différence

$$F(\alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta, \ldots) - F(\alpha, \beta, \ldots)$$

tend vers zéro avec $\Delta\alpha, \Delta\beta, \ldots$.

Faisons varier un seul des paramètres, α par exemple, et supposons que f ait, par rapport à α, une dérivée continue par rapport à l'ensemble des variables. Nous avons

$$(1)\quad \begin{cases} F(\alpha + \Delta\alpha, \beta, \ldots) - F(\alpha, \beta, \ldots) \\ \quad = \int\int_A [f(x, y, \alpha + \Delta\alpha, \beta, \ldots) - f(x, y, \alpha, \ldots)]\,dx\,dy. \end{cases}$$

La fonction sous le signe $\int\int$ peut se mettre sous la forme

$$\Delta\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha + \theta\Delta\alpha, \ldots),$$

ou

$$\Delta\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha, \ldots) + \varepsilon_1 \Delta\alpha.$$

A cause de la continuité uniforme de $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ dans un domaine borné qu'on pourra choisir et qui contiendra tous les systèmes de valeurs qu'on a à considérer, ε_1 peut être rendu, en valeur absolue, plus petit qu'un nombre ε choisi arbitrairement. Le second membre de (1) s'écrit

$$\Delta\alpha \int\int_A \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha, \ldots)\, dx\, dy + \Delta\alpha \int\int_A \varepsilon_1\, dx\, dy.$$

La seconde intégrale tend vers zéro avec $\Delta\alpha$. En divisant par $\Delta\alpha$ et faisant tendre $\Delta\alpha$ vers zéro, on a

$$\lim \frac{F(\alpha + \Delta\alpha, \beta, \ldots) - F(\alpha, \beta, \ldots)}{\Delta\alpha} = \int\int_A \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, y, \alpha, \beta, \ldots)\, dx\, dy.$$

Pour dériver une intégrale double par rapport à un paramètre, il suffit donc de remplacer sous le signe $\int\int$ la fonction f par sa dérivée par rapport au paramètre, ceci sous les mêmes réserves que dans le cas de l'intégrale simple.

168. *Extensions de la notion d'intégrale double.* — On a supposé jusqu'ici que le domaine auquel s'étend l'intégrale double est borné. On peut dans certains cas définir une intégrale double prise dans un domaine non borné. Considérons, par exemple, la fonction $\frac{1}{(x^2 + y^2)^n}$. On reconnaît qu'elle est continue dans tout domaine ne contenant pas l'origine. Traçons deux cercles de centre O et de rayons R et R' ($R < R'$); la fonction est définie dans la couronne C comprise entre ces deux cercles. Évaluons l'intégrale double

$$\int\int_C \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2)^n}.$$

Passons en coordonnées polaires. On a, moyennant le changement de

variables défini par les formules $x = \rho\cos\omega$, $y = \rho\sin\omega$,

$$\int\int_C \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^n} = \int\int_C \frac{\rho\,d\rho\,d\omega}{\rho^{2n}}.$$

Pour obtenir le domaine C, on fait varier ω de 0 à 2π et, pour chaque valeur de ω, ρ de R à R' : de sorte que l'on a

$$\int\int_C \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^n} = \int_0^{2\pi} d\omega \int_R^{R'} \frac{d\rho}{\rho^{2n-1}}.$$

A un facteur numérique près, la valeur de l'intégrale est

$$\frac{1}{R'^{2n-2}} - \frac{1}{R^{2n-2}}.$$

Si $n > 1$, on reconnaît que cette valeur a une limite finie quand R' croît indéfiniment.

D'une manière plus générale, considérons un domaine variable A_1, A_2, ..., A_p, ..., satisfaisant aux conditions suivantes : chaque domaine contient le précédent et ne contient pas l'origine ; quel que soit le nombre R', quand p est assez grand, le domaine A_p contient la couronne comprise entre deux cercles de rayons R et R', R' étant plus grand que R. On exprime plus brièvement ce fait en disant que le domaine variable s'étend indéfiniment dans toutes les directions. Dans ces conditions, faisons croître R' indéfiniment. On peut trouver une couronne comprise entre deux cercles de rayons R et R'' contenant le domaine A_p, R'' allant aussi en croissant indéfiniment. Bornons-nous à étudier les portions de A_p extérieures au cercle R. L'intégrale double de la fonction $\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$ étendue à cette région est comprise entre deux intégrales doubles qui tendent vers une même limite finie. Donc elle tend, elle aussi, vers cette limite. Donc enfin l'intégrale double étendue à A_p a une limite.

Si l'on a une fonction $f(x,y)$ pouvant se mettre sous la forme $\frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^n}$, n étant plus grand que 1 et φ restant borné en valeur absolue, on pourra également attacher un sens à l'intégrale double de f étendue à une région remplissant les conditions précédentes.

En effet, soit M la borne supérieure de $|\varphi(x,y)|$. Supposons la fonction f toujours positive ; l'intégrale de f est plus petite que l'intégrale de $\frac{M}{(x^2+y^2)^n}$. Lorsqu'on prend ces intégrales dans une couronne dont le rayon extérieur va en croissant, elles vont toutes deux en

croissant. La seconde a une limite finie et déterminée; la première, qui reste inférieure à cette limite et qui va en croissant, a donc, elle aussi, une limite.

Si f ne reste pas toujours positif, on l'écrit sous la forme suivante :

$$f = (f + |f|) - |f|.$$

Les deux fonctions $f + |f|$ et $|f|$ remplissent les conditions indiquées. Pour chacune d'elles, l'extension précédente est possible; par suite, elle l'est aussi pour leur différence f.

Il existe encore pour l'intégrale double une extension d'une autre sorte. Considérons, par exemple, la fonction $\frac{1}{(x^2+y^2)^n}$, au voisinage de l'origine. La valeur de l'intégrale double de cette fonction étendue à la couronne comprise entre deux cercles de centre O et de rayons R et R', R étant plus petit que R', est, à un facteur numérique près,

$$R^{2-2n} - R'^{2-2n}.$$

Si n est inférieur à 1, cette quantité a une limite finie quand R tend vers zéro. On peut donc attacher un sens à l'intégrale $\int\int \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^n}$, étendue à un cercle ayant pour centre l'origine, ou plus généralement à un domaine borné quelconque contenant l'origine.

IV. — Volumes

169. Dans l'espace à trois dimensions, nous appellerons *domaine polyédral* tout domaine dont la frontière est constituée par un nombre fini de domaines polygonaux plans; ces domaines sont dits les *faces* du domaine polyédral. Une surface polyédrale est la réunion d'un nombre quelconque de domaines polygonaux plans. Un polyèdre, la réunion de plusieurs polyèdres, la région comprise entre deux polyèdres dont l'un est intérieur à l'autre, sont des domaines polyédraux.

Nous dirons que deux domaines n'ont aucune partie commune ou qu'ils sont extérieurs l'un à l'autre s'ils ont au plus en commun des points de leurs frontières.

Tout domaine polyédral D peut être considéré comme la réunion d'un nombre fini de polyèdres convexes. En effet, enfermons D dans

un cube C et prolongeons indéfiniment le plan de chacune des faces de D; en remarquant qu'un plan indéfiniment prolongé partage un polyèdre convexe en deux polyèdres convexes, on voit que l'ensemble de ces plans partage le cube C en un nombre fini de polyèdres convexes dont chacun ne contient intérieurement aucun point de la frontière de D. Ils sont donc les uns contenus dans D, les autres extérieurs à D. La réunion des polyèdres de la première catégorie constitue le domaine D.

Nous admettrons qu'à tout domaine polyédral est attaché un nombre appelé *volume* du domaine, possédant les deux propriétés suivantes :

1° Deux domaines polyédraux égaux ont même volume;

2° Le domaine polyédral formé par la réunion de deux domaines polyédraux n'ayant aucune partie commune a pour volume la somme des volumes de ces deux domaines.

170. Cela posé, considérons un domaine borné quelconque D.

On appelle *volume de* D *un nombre plus grand que le volume de tout domaine polyédral contenu dans* D *et plus petit que le volume de tout domaine polyédral contenant* D, ceci dans l'hypothèse où il existe un et un seul nombre jouissant de ces propriétés.

Les volumes des domaines polyédraux contenus dans D ont une borne supérieure A, les volumes des domaines contenant D une borne inférieure A', et l'on a $A \leqq A'$. Pour qu'il y ait volume, il faut et il suffit que l'on ait

$$A = A',$$

et pour cela que, quel que soit le nombre positif ε, on puisse trouver deux domaines polyédraux de volumes P et P', le premier contenu dans D, le second contenant D, tels que

$$P' - P < \varepsilon.$$

Si cela est, considérons le domaine polyédral K dont la réunion avec P constitue P'. La frontière F de D est contenue dans K. De sorte que, *s'il existe un volume pour le domaine* D, *la frontière de* D *peut être renfermée dans un domaine polyédral de volume plus petit que* ε.

Inversement, supposons cette condition remplie; montrons qu'il y a un volume pour le domaine D.

Prenons un cube C contenant D et prolongeons indéfiniment le

plan de chacune des faces de K. Nous divisons ainsi C en un nombre fini de polyèdres convexes de différentes sortes :

1° Les uns sont contenus dans K, et K est formé par leur réunion. Les autres, étant extérieurs à K, ne contiennent aucun point de F. Ils sont, ou bien : 2° contenus dans D, ou bien : 3° extérieurs à la fois à K et à D.

L'ensemble des polyèdres 2° forme un domaine polyédral P contenu dans D. L'ensemble des polyèdres 1° et 2° forme un domaine polyédral P′ contenant D. La différence des volumes de P′ et P est le volume du domaine K, par suite est plus petite que ε.

Donc, *pour qu'il y ait volume, il faut et il suffit que la frontière du domaine* D *puisse être enfermée dans un domaine polyédral de volume plus petit que* ε.

A deux domaines égaux correspondent deux volumes égaux, car ce sont les bornes supérieures de deux ensembles de nombres identiques.

Si un domaine D est la réunion de deux domaines D_1 et D_2 n'ayant aucune partie commune et ayant des volumes, on a

$$\text{vol. } D = \text{vol. } D_1 + \text{vol. } D_2.$$

En effet, on peut déterminer des domaines polyédraux : P_1, P_2 contenus respectivement dans D_1 et D_2, P'_1, P'_2 contenant D_1 et D_2, et tels que

$$P'_1 - P_1 < \varepsilon, \qquad P'_2 - P_2 < \varepsilon.$$

P_1 et P_2 n'ont aucune partie commune. Leur réunion constitue un domaine de volume $P_1 + P_2$, contenu dans D. Le domaine H formé par la réunion de P'_1 et P'_2 contient D et l'on a

$$H \leqq P'_1 + P'_2 < P_1 + P_2 + 2\varepsilon.$$

Donc D est compris entre deux domaines polyédraux dont les volumes diffèrent de moins de 2ε. Par suite, il y a un volume pour D, et ce volume est la somme des volumes de D_1 et D_2. Il résulte de là que, si un domaine D est obtenu en réunissant plusieurs domaines D_1, D_2, ..., D_h sans parties communes, et en retranchant d'autres domaines D'_1, D'_2, ..., D'_k, tous ces domaines ayant des volumes qu'on désigne par les mêmes lettres, on a

$$D = D_1 + D_2 + \ldots + D_h - D'_1 - D'_2 - \ldots - D'_k.$$

171. Rapportons le domaine D à trois axes rectangulaires Ox,

y, z. Effectuons un carrelage de l'espace au moyen de plans parallèles aux plans de coordonnées, et équidistants de ρ. A chaque carrelage on obtient des cubes de trois espèces : 1° des cubes contenus dans D; 2° des cubes extérieurs à D; 3° des cubes empiétant sur D. Ceux-ci se trouvent parmi les cubes rencontrant la frontière F de D. Je dis que le volume total de ces derniers cubes tend vers zéro avec ρ.

Remarquons d'abord que les cubes d'un carrelage rencontrant un domaine polygonal plan quelconque δ sont compris dans un prisme de hauteur $2\rho\sqrt{3}$ et ayant pour base médiane dans le plan de δ un carré contenant tous les points dont la distance à δ est moindre que $\rho\sqrt{3}$: le volume de ce prisme tend vers zéro avec ρ. Si, au lieu d'un domaine polygonal plan, nous considérons une surface polyédrale, le même résultat subsiste.

Revenons aux cubes du carrelage rencontrant la frontière F de D. Prenons un nombre positif ε et enfermons F dans un domaine polyédral K de volume plus petit que ε. Les cubes qui rencontrent F sont, ou bien parmi ceux qui sont contenus dans K, ou bien parmi ceux qui rencontrent la frontière L de K.

Le volume total des premiers est plus petit que ε; le volume des seconds tend vers 0 avec ρ. Donc le volume des cubes rencontrant F peut être rendu plus petit que 2ε; par suite, il tend vers 0 avec ρ.

En résumé, *si l'on effectue dans l'espace un carrelage de côté* ρ, *le volume du domaine* D *est la limite de la somme des volumes des cubes entièrement contenus dans* D, *quand* ρ *tend vers zéro.*

172. *Évaluation des volumes.* — Proposons-nous d'évaluer le volume d'un domaine D constitué de la façon suivante. On a trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, une surface S représentée par l'équation

$$z = f(x, y),$$

f étant une fonction constamment positive, définie et continue en tous les points d'un domaine A du plan des xy. Le domaine D est le domaine compris entre la surface S, sa projection A sur le plan des xy et le cylindre projetant S.

Effectuons dans le plan des xy un carrelage de côté ρ par des parallèles aux axes. A chaque carré σ_i qui a une partie commune avec A correspondent, pour la fonction f, deux nombres m_i et M_i, bornes inférieure et supérieure de f dans la région σ_i.

Sur chacun de ces carrés comme base, construisons deux prismes droits de hauteurs respectives m_i et M_i.

Considérons le domaine polyédral P formé par la réunion des prismes de hauteur m_i dont les bases dans le plan des xy sont les carrés *entièrement contenus* dans A. Ce domaine P a pour volume $\sum' m_i \rho^2$, la somme $\sum'$ étant étendue aux carrés entièrement contenus dans A.

Considérons, d'autre part, le domaine polyédral P' formé par la réunion des prismes de hauteur M_i, dont les bases, dans le plan des xy, sont tous les carrés du carrelage *ayant une partie commune avec* A. Désignons son volume par $\sum'' M_i \rho^2$.

Le domaine P' contient D, tandis que P est contenu dans D. Faisons varier le carrelage en faisant tendre ρ vers zéro. D'après la théorie de l'intégrale double, $\sum' m_i \rho^2$ tend vers

(1) $$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy.$$

Quant à la somme $\sum'' M_i \rho^2$, elle peut être mise sous la forme

$$\sum' M_i \rho^2 + \sum''' M_i \rho^2,$$

$\sum'$ étant étendu aux carrés entièrement contenus dans A et $\sum'''$ aux carrés qui empiètent sur A. La somme $\sum' M_i \rho^2$ tend vers l'intégrale (1). La somme $\sum''' M_i \rho^2$ tend vers zéro. Les volumes des domaines P et P' tendent donc tous deux vers la même limite. Cela nous montre qu'il y a pour D un volume qui est égal à l'intégrale double $\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy$.

Comme cas particulier, si f est égale à une constante h, le domaine est un cylindre et son volume est

$$h \int\int_A dx\, dy = h A,$$

A étant l'aire de la base.

173. Supposons maintenant qu'on ait deux surfaces

$$z = f_1(x, y), \qquad z = f_2(x, y),$$

avec la condition

$$f_2 > f_1.$$

f_2 et f_1 étant deux fonctions définies et continues en tous les points d'un certain domaine A du plan des xy. On considère le domaine compris entre les deux surfaces et le cylindre ayant pour base, dans le plan des xy, le domaine A.

Supposons d'abord $f_1 > 0$. Le domaine D est alors la différence entre deux domaines qui sont tous deux dans les conditions du cas particulier précédent. Il en résulte que D a un volume dont la valeur est

$$\int\int_A [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dx\, dy.$$

Si l'on déplace parallèlement à lui-même le plan des xy, ce qui revient à faire pour z un changement de variable de la forme

$$z = z' + h,$$

l'intégrale double ne change pas et représente toujours le volume du domaine D. f_1 n'étant plus nécessairement positif, il en résulte que la restriction faite précédemment, de f_1 positif, peut être levée.

Si l'on a un domaine de forme plus compliquée, on cherche à le décomposer en domaines partiels remplissant les conditions précédentes.

174. Supposons que l'axe des z fasse un angle θ avec la perpendiculaire au plan des xy. Les considérations précédentes s'appliquent en remplaçant les prismes droits par des prismes obliques. Toutes les expressions de volumes doivent être multipliées par $\cos\theta$. Le volume d'un domaine compris entre une surface $z = f(x, y)$, le plan des xy et le cylindre projetant est

$$\cos\theta \int\int_A f(x, y)\, dx\, dy.$$

175. On peut transformer l'expression du volume trouvée dans les conditions du n° 173, en supposant que la région A du plan des xy soit définie de la façon suivante. Elle est limitée (*fig.* 7) par deux parallèles à Oy

$$x = a, \qquad x = b,$$

et deux courbes ayant pour équations

$$y = \theta_1(x), \qquad y = \theta_2(x),$$

θ_1 et θ_2 étant fonctions continues de x dans l'intervalle (a, b), avec la condition

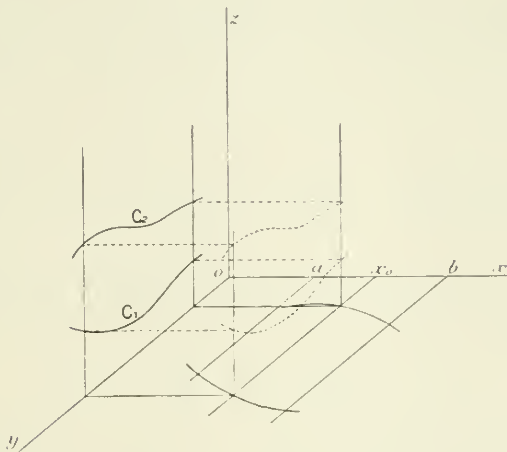
$$\theta_2 > \theta_1.$$

Le domaine D est compris entre les surfaces ayant pour équations

$$z = f_2(x, y), \qquad z = f_1(x, y) \qquad (f_2 > f_1),$$

et le cylindre droit ayant pour base A dans le plan des xy.

Fig. 7.



Soit V le volume du domaine D. On a

$$V = \int\int_A [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dx\, dy,$$

ou, d'après la théorie de l'évaluation des intégrales doubles, et en intégrant d'abord par rapport à y,

(1) $$V = \int_a^b dx \int_{\theta_1(x)}^{\theta_2(x)} [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dy.$$

Considérons un plan $x = x_0$. Il coupe le domaine D suivant une section R. Celle-ci se projette en vraie grandeur sur le plan des yz, suivant une région définie comme il suit (*fig.* 7) : elle est comprise entre les droites

$$y = \theta_1(x_0), \qquad y = \theta_2(x_0)$$

et les courbes C_2 et C_1

$$z = f_2(x_0, y), \qquad z = f_1(x_0, y).$$

L'aire $S(x_0)$ de cette région est donc

$$S(x_0) = \int_{\theta_1(x_0)}^{\theta_2(x_0)} [f_2(x_0, y) - f_1(x_0, y)]\, dy.$$

La formule (1) peut donc s'écrire

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$

Ce résultat est utile quand on sait évaluer l'aire d'une section du domaine considéré par un plan parallèle à une direction déterminée.

Considérons, par exemple, l'ellipsoïde ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Cherchons à évaluer le volume de la partie de cet ellipsoïde comprise entre les plans

$$x = \alpha, \qquad x = \beta.$$

La section par le plan $x = x_0$ est une ellipse ayant pour équation dans son plan

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}.$$

Les demi-axes de cette ellipse sont

$$b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}, \qquad c\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}},$$

son aire est donc

$$\pi b c \left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right),$$

par suite, le volume cherché est

$$V = \int_\alpha^\beta \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_\alpha^\beta.$$

V. — Intégrales triples.

176. Considérons dans l'espace à trois dimensions un domaine D rapporté à trois axes rectangulaires $Oxyz$. Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue définie en tous les points de ce domaine. On appelle *intégrale triple de la fonction f* étendue au domaine D, et l'on

désigne par la notation

$$\int\int\int_{D} f\,dv \qquad \text{ou} \qquad \int\int\int_{D} f\,dx\,dy\,dz$$

la limite vers laquelle tend l'expression

$$\sum f(x_i, y_i, z_i)\,v_i,$$

le domaine D étant partagé en domaines partiels $v_1, v_2, \ldots, v_i, \ldots$, dont on désigne les volumes par les mêmes lettres, x_i, y_i, z_i étant les coordonnées d'un point du domaine v_i et la loi de partage du domaine D variant de façon que les domaines partiels deviennent infiniment petits dans toutes leurs dimensions. Cela signifie que l'on prend une suite de partages $P_1, P_2, \ldots, P_h, \ldots$ telle que, étant donné un nombre positif α, à partir d'un certain rang dans la suite, chacun des domaines partiels est contenu dans un cube d'arêtes parallèles aux axes et de côté inférieur à α.

Soient M et m, M_i et m_i les bornes de f dans D et dans v_i. De $m_i \leq f(x_i, y_i, z_i) \leq M_i$ résulte

$$\sum m_i v_i \leq \sum f(x_i, y_i, z_i)\,v_i \leq \sum M_i v_i.$$

Appelons *somme inférieure* la première somme, *somme supérieure* la dernière, et soit V le volume du domaine D.

Toute somme inférieure s est supérieure ou égale à mV.

Toute somme supérieure S est inférieure ou égale à MV.

Un premier partage étant effectué, effectuons-en un second en subdivisant chacun des domaines partiels du premier. Nous dirons que le second partage est consécutif au premier. Pour former la somme inférieure s' relative à ce partage, il faut remplacer chaque terme $m_i v_i$ de s par un ensemble de termes dont la somme est au moins égale à $m_i v_i$, car m_i et v_i jouent, par rapport à ces termes, le même rôle que m et V par rapport à s. On a donc

$$s' \geq s.$$

On reconnaît de même que l'on a

$$S \geq S'.$$

Il résulte de là que toute somme supérieure S d'un partage quelconque P est supérieure ou égale à toute somme inférieure s' d'un

partage P'. Prenons en effet un troisième partage P'' consécutif à P et à P' (il suffit pour cela de prendre de toutes les manières possibles le domaine commun à un domaine partiel quelconque de P et à un domaine partiel quelconque de P'). Soient S'' et s'' les sommes relatives à ce troisième partage. On a, d'après ce qui précède,

$$S \geqq S'', \qquad S'' \geqq s'', \qquad s'' \geqq s',$$

d'où

$$S \geqq s'.$$

On peut trouver une somme supérieure et une somme inférieure différant d'aussi peu que l'on veut. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il lui correspond $\alpha > 0$ tel que, sous les conditions

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha, \qquad |z - z'| < \alpha,$$

on a, dans tout le domaine,

$$|f(x, y, z) - f(x', y', z')| < \varepsilon.$$

Si l'on effectue dans le domaine donné un partage tel que tout domaine partiel soit contenu dans un cube d'arêtes parallèles aux axes et de côté plus petit que α, dans chacun de ces domaines partiels, les nombres m_i et M_i diffèrent de moins de ε. Or on a

$$S - s = \sum (M_i - m_i) v_i.$$

On aura donc

$$S - s \leqq \varepsilon \sum v_i = \varepsilon V,$$

et εV peut être rendu aussi petit que l'on veut.

Il résulte de ces propriétés que les deux ensembles de nombres S et s sont tels qu'il y a un nombre déterminé I, qui est borne supérieure des s et borne inférieure des S.

Considérons alors une suite de partages $P_1, P_2, \ldots, P_h, \ldots$ remplissant les conditions de l'énoncé. Soient S_h et s_h les sommes relatives au partage P_h. La différence $S_h - s_h$ tend vers zéro, car, en choisissant un nombre positif ε, et en déterminant le nombre α qui lui correspond d'après la loi indiquée, quand h dépasse un certain entier, chaque domaine partiel du partage P_h est contenu dans un cube d'arêtes parallèles aux axes et de côté plus petit que α. On a, à partir de ce rang,

$$S_h - s_h < \varepsilon V.$$

Comme ε est arbitraire, cela veut dire que $S_h - s_h$ tend vers zéro.

Comme S_h et s_h comprennent entre eux le nombre I, ils tendent tous deux vers I. Par suite, la somme $\sum f(x_i, y_i, z_i).v_i$, qui est comprise entre S_h et s_h, a pour limite le nombre I.

177. *Remarques.* — 1° De la définition de I résulte la double inégalité

$$mV \leq \int\int\int_D f\,dv \leq MV.$$

2° Si l'on partage D en différents domaines $D_1, D_2, \ldots, D_h$, on a

$$\int\int\int_D f\,dv = \int\int\int_{D_1} f\,dv + \ldots + \int\int\int_{D_h} f\,dv.$$

3° Si l'on a

$$f = a\varphi + b\psi + \ldots + c\theta,$$

$\varphi, \psi, \ldots, \theta$ étant des fonctions continues dans le domaine D, $a, b, \ldots, c$ des constantes, on a

$$\int\int\int_D f\,dv = a\int\int\int_D \varphi\,dv + b\int\int\int_D \psi\,dv + \ldots + c\int\int\int_D \theta\,dv.$$

En effet, ces intégrales sont respectivement les limites des sommes

$$\sum f(x_i, y_i, z_i)v_i, \quad \sum \varphi(x_i, y_i, z_i)v_i, \quad \ldots, \quad \sum \theta(x_i, y_i, z_i)v_i,$$

obtenues en prenant partout dans chaque volume v_i le même point x_i, y_i, z_i; on a entre ces sommes une relation qui donne à la limite la relation que nous voulons établir.

4° Si dans la somme $\sum f(x_i, y_i, z_i)v_i$ on néglige certains termes, la somme $\sum' f(x_i, y_i, z_i)v_i$ obtenue tend encore vers $\int\int\int_D f\,dv$, pourvu que la somme des volumes des domaines partiels correspondant aux termes négligés tende vers zéro. En effet, soient G une limite supérieure du module de f et α la somme des volumes des domaines négligés, on a

$$\left|\sum' - \sum\right| \leq G\alpha,$$

et, si α tend vers zéro, on a bien

$$\lim \sum' = \lim \sum.$$

Si l'on effectue par exemple un carrelage de l'espace de côté ρ, et que l'on considère, au lieu de la somme $\sum f_i v_i$ étendue à tous les cubes ou portions de cubes contenus dans D, la somme $\sum' f_i v_i$ étendue seulement aux cubes entièrement contenus dans D, cette somme $\sum'$ a pour limite, quand ρ tend vers zéro, l'intégrale triple $\int\int\int_D f\,dv$.

5° En faisant $f = 1$, on trouve

$$V = \int\int\int_D dv.$$

178. *Évaluation des intégrales triples.* — Considérons le cas particulier suivant : Le domaine D est limité par un cylindre C de génératrices parallèles à Oz, ayant pour base dans le plan des xy un domaine A, et par deux plans de cotes z' et z''. La fonction f est définie en tout point de ce cylindre et *ne dépend que de z*. Je dis que l'on a, dans ce cas,

$$(1) \qquad \int\int\int_D f(x, y, z)\,dv = A \int_{z'}^{z''} f(x, y, z)\,dz,$$

en désignant par A l'aire du domaine A.

En effet, partageons D en domaines partiels, par des plans parallèles au plan des xy et de cotes

$$z_0 = z', \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_{n-1}, \qquad z_n = z'',$$

et par des plans parallèles à Oz, partageant A en aires partielles quelconques, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots$. L'intégrale simple qui entre dans le second membre de (1) est la limite de la somme

$$\sum M_i(z_i - z_{i-1}),$$

M_i étant la borne supérieure de f dans l'intervalle (z_{i-1}, z_i).

L'intégrale triple qui figure dans la formule (1) est la limite de la somme des produits obtenus en multipliant le volume v de chaque domaine partiel de D par la borne supérieure de f dans ce domaine. Or, pour tous les domaines partiels compris entre les plans de cotes z_{i-1} et z_i, la borne supérieure de f est M_i. A ces domaines correspond donc dans la somme un terme qui est égal à leur volume total

multiplié par M_i. D'ailleurs ce volume est celui d'un cylindre de base A et de hauteur $(z_i - z_{i-1})$. Ainsi le premier membre de (1) est la limite de

$$\sum A(z_i - z_{i-1}) M_i = A \sum (z_i - z_{i-1}) M_i.$$

La formule (1) résulte immédiatement de ce fait. On peut l'écrire

$$\int\int\int_D f(x, y, z)\, dv = \int\int_A dx\, dy \int_z^{z'} f(x, y, z)\, dz.$$

C'est ce résultat que nous allons étendre au cas général.

179. Soit un domaine D défini comme il suit. On a un domaine plan A dans le plan des (x, y), deux fonctions $z = \theta'(x, y)$, $z = \theta(x, y)$, définies et continues dans le domaine A et telles en outre que $\theta' > \theta$. Le domaine D est compris entre les deux surfaces S et S' représentées par ces équations et le cylindre projetant A. Considérons une fonction $f(x, y, z)$ définie dans le domaine D, et cherchons à évaluer $\int\int\int_D f(x, y, z)\, dv$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ vérifiant les conditions suivantes :

1° (x, y), (x', y') étant deux points du domaine A, les inégalités

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha$$

entraînent

$$|\theta(x, y) - \theta(x', y')| < \varepsilon, \qquad |\theta'(x, y) - \theta'(x', y')| < \varepsilon.$$

2° (x, y, z), (x', y', z') étant deux points du domaine D, les inégalités

$$|x - x'| < \alpha, \qquad |y - y'| < \alpha, \qquad |z - z'| < \alpha$$

entraînent

$$|f(x, y, z) - f(x', y', z')| < \varepsilon.$$

Cela posé, partageons A en domaines partiels σ_i dont chacun soit contenu dans un carré de côtés parallèles aux axes et plus petits que α. Soit (x_i, y_i) un point de la région σ_i. La droite ayant pour équations $x = x_i$, $y = y_i$ coupe la surface S : $z = \theta(x, y)$ en un point P_i de cote z_i et la surface S' : $z = \theta'$ en un point Q_i de cote z'_i. Appelons : R_i la portion du domaine D comprise dans le cylindre projetant σ_i; R'_i le cylindre projetant σ_i et limité par les plans de cotes z_i, z'_i; R''_i la région commune à R_i et à R'_i. A cause de la pre-

mière condition imposée à α, on reconnaît que, si l'on mène les plans de cotes $z'_i+\varepsilon$ et $z'_i-\varepsilon$, $z_i+\varepsilon$ et $z_i-\varepsilon$, le cylindre de base σ_i compris entre les plans extrêmes $z'_i+\varepsilon$ et $z_i-\varepsilon$ contient R_i et R'_i, par suite aussi R''_i; le cylindre de base σ_i compris entre les plans de cotes $z'_i-\varepsilon$ et $z_i+\varepsilon$ est contenu dans R_i et dans R'_i, par suite aussi dans R''_i.

Or, ces deux cylindres auxiliaires ont pour différence de volume $4\varepsilon\sigma_i$. Par suite, deux quelconques des domaines R_i, R'_i, R''_i ont des volumes qui diffèrent de moins de $4\varepsilon\sigma_i$.

Prenons alors une fonction auxiliaire φ définie dans le cylindre R'_i par la condition d'être en tout point de P_iQ_i égale à f et d'être constante dans tout plan parallèle au plan des xy. On constate, d'après la seconde condition imposée à α, qu'en tout point de R''_i, où les fonctions f et φ se trouvent toutes deux définies, on a

$$|f-\varphi|<\varepsilon.$$

Considérons l'intégrale $\int\int\int_{R'_i}\varphi\,dv$. Elle rentre dans le cas particulier examiné au n° 178, et l'on a

$$\int\int\int_{R'_i}\varphi\,dv=\sigma_i\int_{z_i}^{z'_i}f(x_i,y_i,z)\,dz.$$

Nous prendrons cette intégrale comme valeur approchée de

$$\int\int\int_{R_i}f\,dv.$$

Évaluons une limite supérieure de leur différence. Cette différence est plus petite en module que la somme des modules des trois différences suivantes :

$$\int\int\int_{R''_i}f\,dv-\int\int\int_{R''_i}\varphi\,dv,\quad \int\int\int_{R_i}f\,dv-\int\int\int_{R''_i}f\,dv,$$
$$\int\int\int_{R'_i}\varphi\,dv-\int\int\int_{R''_i}\varphi\,dv.$$

La première différence n'est autre que l'intégrale $\int\int\int_{R''_i}(f-\varphi)\,dv$. Comme on a $|f-\varphi|<\varepsilon$, cette intégrale est plus petite en module que $\varepsilon R''_i$ et par suite que εR_i.

La seconde différence est $\int\int\int_{R_i - R'_i} f\,dv$. Le domaine $R_i - R'_i$ a un volume plus petit que $4\varepsilon\sigma_i$. Soit G la borne supérieure du module de f. La seconde différence est plus petite en module que $4\varepsilon\sigma_i G$.

Il en est de même pour la troisième, car on a $|\varphi| < G$ et le domaine $R_i - R'_i$ a un volume plus petit que $4\varepsilon.\sigma_i$.

La somme des modules des trois différences est donc plus petite que $\varepsilon(R_i + 8\sigma_i G)$, de sorte qu'on peut écrire

$$\int\int\int_{R_i} f\,dv = \sigma_i \int_{z_i}^{z'_i} f(x_i, y_i, z)\,dz + \eta_i,$$

avec la condition

$$|\eta_i| < \varepsilon(R_i + 8\sigma_i G).$$

Appliquons ceci à chaque domaine partiel R_i et ajoutons membre à membre les relations obtenues. On obtient

$$\sum \int\int\int_{R_i} f\,dv = \sum \sigma_i \int_{z_i}^{z'} f(x_i, y_i, z)\,dz + \sum \eta_i.$$

Le premier membre de cette relation est

$$\int\int\int_{D} f\,dv.$$

L'intégrale simple qui figure dans le second membre renferme comme paramètres x_i, y_i et est fonction continue de ces paramètres. Posons

$$\int_{\theta(x,y)}^{\theta'(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \psi(x, y).$$

Le premier terme du second membre devient $\sum \sigma_i \psi(x_i, y_i)$. Quand la loi de partage varie de manière que α tende vers zéro, cette somme a pour limite l'intégrale double suivante

$$\int\int_{A} \psi(x, y)\,dx\,dy.$$

Enfin le terme complémentaire $\sum \eta_i$ tend vers zéro, car on a

$$\sum \eta_i < \varepsilon(V + 8AG),$$

et $\varepsilon(V + 8AG)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut.

Finalement, nous avons

$$\int\int\int_D f\,dv = \int\int_A \psi(x, y)\,dx\,dy,$$

ou en remplaçant ψ par sa valeur

$$\int\int\int_D f\,dv = \int\int_A dx\,dy \int_{\theta(x,y)}^{\theta'(x,y)} f\,dz.$$

180. Supposons que le domaine plan A soit limité par deux droites $x = a$, $x = b$, et deux courbes $y = \lambda_1(x)$, $y = \lambda_2(x)$, λ_1 et λ_2 étant fonctions continues de x dans l'intervalle (a, b), avec la condition $\lambda_2 > \lambda_1$. Nous pouvons remplacer l'intégrale double de la formule précédente par deux intégrales simples successives, et écrire

$$\int\int\int f\,dv = \int_a^b dx \int_{\lambda_1(x)}^{\lambda_2(x)} dy \int_{\theta(x,y)}^{\theta'(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

L'ensemble des deux dernières intégrales simples constitue l'intégrale double de f étendue à la section du domaine D par le plan d'abscisse x. De sorte qu'en désignant par $\Phi(x)$ cette intégrale double, on a

$$\int\int\int_D f\,dv = \int_a^b \Phi(x)\,dx,$$

ce qui donne une nouvelle manière d'évaluer l'intégrale.

181. *Changement de variables dans l'intégrale triple.* — Étudions d'abord le cas du changement de variables linéaire. Considérons la transformation définie par les formules

$$\begin{aligned} x &= au + bv + cw + d, \\ y &= a'u + b'v + c'w + d', \\ z &= a''u + b''v + c''w + d'', \end{aligned}$$

en supposant remplie la condition

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ce changement de variables définit, au point de vue de la Géométrie analytique, une transformation homographique d'espace à espace. Si le point (u, v, w) décrit un segment de droite, le point (x, y, z) décrit aussi un segment de droite. A deux segments

parallèles décrits par le point (u, v, w) correspondent deux segments parallèles décrits par le point (x, y, z). A un tétraèdre en (u, v, w) correspond un tétraèdre en (x, y, z); le rapport de son volume au volume du premier est $|D|$.

On en conclut qu'à tout domaine en (u, v, w) correspond un domaine en (x, y, z) dont le rapport du volume au volume du premier est $|D|$. Partant de là, on peut établir, comme on l'a fait pour l'intégrale double (n° 161), la formule du changement de variables dans le cas d'une transformation linéaire :

$$\int\int\int_R f(x, y, z)\,dv = \int\int\int_r f(au + bv + cw + d, \dots)\,|D|\,du\,dv\,dw,$$

r étant le domaine en (u, v, w) correspondant au domaine R en (x, y, z).

182. Passons maintenant au cas général et plaçons-nous dans les conditions suivantes :

1° On a entre deux systèmes de variables (x, y, z), (u, v, w) une transformation définie par les formules

$$x = \varphi(u, v, w), \qquad y = \psi(u, v, w), \qquad z = \chi(u, v, w),$$

φ, ψ, χ étant fonctions continues lorsque u, v, w varient respectivement dans des intervalles (α, β), (α', β'), (α'', β''), de sorte que le point (u, v, w) peut prendre toutes les positions à l'intérieur d'un certain champ Δ. On suppose que, pour deux positions différentes de (u, v, w), le point (x, y, z) prend deux positions différentes. Si l'on donne à deux des variables u, v, w des valeurs fixes et qu'on fasse varier la troisième, w par exemple, dans son intervalle (α'', β''), (x, y, z) décrit un arc de courbe. Si une autre des variables, v par exemple, varie dans son intervalle (α', β'), cet arc décrit un morceau de surface. Enfin, si u varie dans son intervalle (α, β), ce morceau de surface balaye une certaine région de l'espace. Cette région a pour frontière l'ensemble des six surfaces correspondant aux six faces du parallélépipède Δ. D'une manière générale, à un parallélépipède C contenu dans Δ et obtenu en faisant varier u de u_0 à u_1, v de v_0 à v_1, w de w_0 à w_1 correspond une région R dont la frontière est constituée par les morceaux de surfaces correspondant aux faces de C.

2° Les fonctions φ, ψ, χ ont des dérivées partielles toutes continues dans le champ Δ.

3° Le déterminant fonctionnel D de x, y, z par rapport à u, v, w,

qui est fonction continue d'après la seconde condition, n'atteint en aucun point de Δ la valeur zéro. Il en résulte qu'il garde un signe constant.

Cela étant, considérons dans le champ Δ un cube C dont un sommet a est le point (u_0, v_0, w_0), les trois sommets voisins b, c, d étant obtenus en ajoutant ρ successivement à chacune des coordonnées u, v, w. Soit (u, v, w) un point de ce cube, les valeurs correspondantes de x, y, z sont données par les formules

$$x = \varphi(u_0, v_0, w_0) + (u - u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u', v', w')$$
$$+ (v - v_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u', v', w') + (w - w_0)\frac{\partial\varphi}{\partial w}(u', v', w'),$$

(u', v', w') étant un point de C. Pour avoir y et z, il suffit de remplacer φ par ψ et χ.

Si ρ tend vers zéro, les valeurs des dérivées qui entrent dans ces expressions tendent vers les valeurs qu'elles ont au point a. A tout nombre positif ε correspond un nombre positif α, tel que, lorsque ρ est plus petit que α, les valeurs des neuf dérivées en tout point du cube diffèrent de leurs valeurs en a de moins de ε.

Soient $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_0}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v_0}$, $\cdots$ les valeurs des dérivées en a. Posons

$$\xi = \varphi(u_0, v_0, w_0) + (u - u_0)\frac{\partial\varphi}{\partial u_0} + (v - v_0)\frac{\partial\varphi}{\partial v_0} + (w - w_0)\frac{\partial\varphi}{\partial w_0},$$

et désignons par η et ζ les expressions analogues obtenues en remplaçant dans ξ la fonction φ par ψ et χ. Considérons le point de coordonnées ξ, η, ζ, on a

$$|x - \xi| < \varepsilon(u - u_0) + \varepsilon(v - v_0) + \varepsilon(w - w_0) < 3\varepsilon\rho$$

et des inégalités analogues pour $|y - \eta|$, $|z - \zeta|$, d'où résulte :

$$\text{Distance de } (x, y, z) \text{ à } (\xi, \eta, \zeta) < 9\varepsilon\rho.$$

Donc (en mettant ε à la place de 9ε), *étant donné* $\varepsilon > 0$, *dès que* ρ *est plus petit qu'un certain nombre* α, *les deux points* (x, y, z), (ξ, η, ζ), *correspondant à un même système de valeurs de* u, v, w, *ont une distance plus petite que* $\varepsilon\rho$.

D'ailleurs, comme ξ, η, ζ sont linéaires en u, v, w, quand le point (u, v, w) prend toutes les positions possibles dans le cube C, le point (ξ, η, ζ) décrit un parallélépipède P de sommets $A'B'C'D'\ldots$. Déterminons ses éléments. Son volume est $\rho^3 |D_0|$, D_0 étant la valeur

de D au point (u_0, v_0, w_0). Évaluons une limite supérieure de A′B′, qui correspond à ab. On a, comme au n° 162,

$$\xi(B') - \xi(A') = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial u_0},$$

$$\eta(B') - \eta(A') = \rho \frac{\partial \psi}{\partial u_0},$$

$$\zeta(B') - \zeta(A') = \rho \frac{\partial \chi}{\partial u_0},$$

d'où

$$A'B' = \rho \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u_0}\right)^2}.$$

Pour avoir A′C′ et A′D′, il suffit de remplacer u_0 par v_0 et w_0.

Soit G une borne supérieure dans le domaine Δ des quatre fonctions continues suivantes :

$$\sqrt{\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}, \quad \sqrt{\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}, \quad \sqrt{\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2}, \quad |D|.$$

Chaque côté du parallélépipède P est plus petit que $G\rho$. Par suite, chaque face a une aire moindre que $G^2\rho^2$ et comme on a, h étant la hauteur relative à la face A′B′C′,

$$h = \frac{\rho^3 |D_0|}{\text{aire } A'B'C'},$$

il en résulte que cette hauteur est plus grande que $\frac{\rho^3 |D_0|}{G^2\rho^2}$, ou encore que $\rho \frac{g}{G^2}$, g étant la borne inférieure (positive) de $|D|$ dans le domaine Δ.

Cela étant, assujettissons-nous à prendre $\varepsilon < \frac{1}{2} \frac{g}{G^2}$, c'est-à-dire $2\varepsilon\rho < \rho \frac{g}{G^2}$. Menons parallèlement au plan de chaque face de P, de part et d'autre de cette face, un plan distant de cette face de $\varepsilon\rho$. D'après le choix de ε, ces plans déterminent à l'intérieur de P un parallélépipède P_1, en dehors des régions comprises entre les plans parallèles précédents. Soit P_2 le parallélépipède formé par les plans extérieurs. Le point (x, y, z) correspondant à un point (u, v, w) du cube C décrit une région R, dont la frontière est formée par les morceaux de surfaces correspondant aux faces du cube C. La distance d'un point (x, y, z) au point (ξ, η, ζ) correspondant étant plus petite que $\varepsilon\rho$, le morceau de surface correspondant à la face abc, par exemple, est compris entre les deux plans menés parallèlement à A′B′C′ à la

distance $\varepsilon\rho$: il en est de même pour les autres faces. Donc R contient P_1 et est contenu dans P_2, d'où

$$|R - P| < P_2 - P_1.$$

$P_2 - P_1$ est constitué par six polyèdres, dont chacun a pour base médiane une face de P et pour hauteur $2\varepsilon\rho$. On a donc

$$P_2 - P_1 < 12\varepsilon\rho G^2\rho^2;$$

$12\varepsilon G^2$ peut être pris aussi petit que l'on peut, de sorte que l'on peut écrire

$$R = \rho^3 |D_0| + \eta_1 \rho^3, \tag{1}$$

la borne supérieure des nombres η_1 pour tous les cubes de côté ρ étant un nombre qui tend vers 0 avec ρ.

183. Cela posé, considérons l'intégrale triple d'une fonction f étendue à un domaine A de l'espace en (x, y, z). A ce domaine correspond, par le changement de variables défini précédemment, un domaine a en (u, v, w). Posons

$$f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] = F(u, v, w).$$

Soit (x_0, y_0, z_0) le point qui correspond à (u_0, v_0, w_0) de a. Effectuons dans l'espace (u, v, w) un carrelage de côté ρ par des plans parallèles aux plans de coordonnées. A un cube du carrelage contenu entièrement dans a et dont l'un des sommets est le point (u_0, v_0, w_0) correspond dans l'espace (x, y, z) une région R et l'on a la formule

$$R = \rho^3 |D_0| + \eta_1 \rho^3,$$

d'où

$$f(x_0, y_0, z_0) R = F(u_0, v_0, w_0)\rho^3 |D_0| + F(u_0, v_0, w_0)\rho^3 \eta_1.$$

Ajoutons membre à membre les équations analogues relatives à tous les cubes entièrement contenus dans a. On a

$$\sum f(x_0, y_0, z_0) R = \sum F(u_0, v_0, w_0)\rho^3 |D_0| + \sum F(u_0, v_0, w_0)\rho^3 \eta_1.$$

Faisons tendre ρ vers zéro. Le premier terme du second membre tend vers

$$\int\int\int_a F(u, v, w) |D| \, du \, dv \, dw.$$

Le premier membre tend vers

$$\int\int\int_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

car la somme des termes négligés dans $\sum f(x, y, z)R$ tend vers o. En effet, le volume total des portions de A relatives à ces termes négligés correspond au volume négligé dans le domaine a et le rapport du premier volume au second est inférieur à $H + \eta$, H étant une borne supérieure de $|D|$ et η une borne supérieure de $|\eta_1|$. Comme le second volume tend vers o, il en est de même du premier; par suite, $\sum f(x_0, y_0, z_0)R$ tend bien vers $\int\int\int_A f\,dv$. Quant au terme complémentaire $\sum F(u_0, v_0, w_0)\rho^3\eta_1$, il est plus petit en valeur absolue que $\eta.a.G$, G étant une borne supérieure de $|F(u, v, w)|$. Ce terme tend vers zéro avec ρ et l'on a finalement la formule

$$\int\int\int_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_a F(u, v, w)\,|D|\, du\, dv\, dw.$$

Si l'on fait $f = 1$, la première intégrale représente le volume du domaine A et l'on a

$$A = \int\int\int_a |D|\, du\, dv\, dw.$$

Soient M et m les bornes de $|D|$. L'intégrale du second membre est comprise entre Ma et ma, de sorte que l'on a

$$m < \frac{A}{a} < M.$$

Si A devient infiniment petit dans toutes ses dimensions, en ne cessant pas de contenir un point déterminé (x_0, y_0, z_0), a devient aussi infiniment petit dans toutes ses dimensions, et le rapport $\frac{A}{a}$ tend, d'après ce qui précède, vers le module de D, pris au point considéré.

184. Comme exemple de changement de variables, passons des coordonnées cartésiennes x, y, z aux coordonnées semi-polaires r, φ, z' au moyen des formules

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z'.$$

On doit remplacer l'élément différentiel $dx\,dy\,dz$ par

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z')}\right| dr\,d\varphi\,dz',$$

on a

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z')} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

L'élément différentiel nouveau est $r\,dr\,d\varphi\,dz'$. Toutefois la transformation définie par les formules précédentes n'établit pas une correspondante parfaite, point par point, entre (x, y, z) et (r, φ, z'). L'axe des z et le demi-plan xoz sont singuliers dans la transformation. Pour lever la difficulté, il suffit d'écarter pour un instant la portion du domaine a comprise entre les plans $\varphi = 0$ et $\varphi = 2\pi - \varepsilon$ et de prendre, lorsque ε tend vers zéro, la limite vers laquelle tend le résultat obtenu pour ce domaine réduit. On reconnaît ainsi que la formule subsiste.

Passons maintenant des coordonnées semi-polaires aux coordonnées polaires ρ, θ, φ' par les formules

$$r = \rho\sin\theta, \qquad z' = \rho\cos\theta, \qquad \varphi = \varphi'.$$

On a, en considérant les deux systèmes (x, y, z), (ρ, θ, φ'),

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi')} = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z')} \cdot \frac{D(r, \varphi, z')}{D(\rho, \theta, \varphi')}.$$

Le premier déterminant du second membre est r ou $\rho\sin\theta$. Évaluons le second,

$$\frac{D(r, \varphi, z')}{D(\rho, \theta, \varphi')} = \begin{vmatrix} \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho.$$

L'élément différentiel de l'intégrale triple en coordonnées polaires est donc $\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$. On lève, comme précédemment, les difficultés relatives aux singularités de la transformation.

185. *Applications des intégrales triples.* — 1° *Centre de gravité.* — Un corps est dit *homogène* si la masse d'une portion quelconque est au volume de cette portion dans un rapport constant. Ce rapport constant μ est dit la *densité du corps*. Rapportons celui-ci à

trois axes rectangulaires $oxyz$. Sa masse M est

$$M = \mu \int\int\int_V dx\,dy\,dz$$

Si le corps n'est pas homogène, nous nous placerons dans les conditions où il y a une densité en chaque point. Cela revient à admettre qu'étant donné un point (x_0, y_0, z_0) du corps, si l'on considère une portion du corps contenant (x_0, y_0, z_0), le rapport de la masse de cette portion à son volume tend, lorsque cette portion devient infiniment petite dans toutes ses dimensions, vers un nombre déterminé μ. Ce nombre μ, qui est fonction de x, y, z, est dit la *densité* en ce point. La masse du corps est

$$M = \int\int\int_V \mu(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Le *centre de gravité* du corps est un point tel que la somme des moments par rapport à un plan des masses des différents points du corps est égale au moment par rapport au même plan de la masse du corps supposée concentrée au centre de gravité.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité. Prenons les moments par rapport au plan des yz par exemple. Soit m_i la masse d'un volume élémentaire du corps, entourant le point (x_i, y_i, z_i). Considérons la somme $\sum x_i\, m_i$; elle a pour limite $\int\int\int_V x\mu\, dv$ et représente la somme des moments des éléments du corps par rapport au plan yz. On doit avoir

$$\xi \int\int\int_V \mu\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_V \mu x\,dx\,dy\,dz.$$

On a pour η et ζ des expressions analogues.

2° *Moment d'inertie.* — Soient un axe Δ et un système de points M_i, à chacun desquels est attachée une masse m_i. Soit encore r_i la distance du point M_i à Δ. On appelle *moment d'inertie* du système de points par rapport à l'axe, la somme $\sum m_i r_i^2$. S'il s'agit d'un corps continu V, cette somme doit être remplacée par

$$\int\int\int_V \mu r^2\,dx\,dy\,dz,$$

μ étant la densité au point (x, y, z), r la distance de ce point à l'axe.

186. On démontre, comme pour les intégrales doubles, que, si la fonction f, dont on prend l'intégrale triple, dépend de paramètres α, β, ... et est fonction continue par rapport à l'ensemble de toutes les variables x, y, z, α, β, ..., l'intégrale triple est fonction continue des différents paramètres. Si f a une dérivée par rapport à un paramètre α, continue par rapport à l'ensemble x, y, z, α, l'intégrale triple a, par rapport à ce paramètre, une dérivée qu'on obtient en remplaçant sous le signe $\int\int\int$ la fonction f par $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$.

De même qu'on a pu, dans certains cas, étendre les notions d'intégrale simple et d'intégrale double à des champs infinis ou à des champs bornés, contenant des valeurs où la fonction f devient infinie, de même on pourra faire cette extension pour les intégrales triples.

VI. — Aire d'une surface courbe.

187. Considérons une surface définie dans les conditions suivantes :

1° Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface sont données par les formules

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

les fonctions f, φ, ψ étant définies et continues pour tout point du champ Δ du plan des (u, v)

$$\alpha \leqq u \leqq \beta, \qquad \alpha' \leqq v \leqq \beta'.$$

Si u reçoit une valeur déterminée de l'intervalle (α, β), v étant variable, le point (x, y, z) correspondant décrit dans l'espace un arc de courbe c_0. Quand u varie à son tour, c_0 décrit une surface Σ. A deux points (u, v) distincts de Δ correspondent deux points (x, y, z) distincts. La surface Σ peut être aussi engendrée par le déplacement de l'arc de courbe $v =$ const., u variable, lorsque la constante varie dans l'intervalle (α', β').

2° f, φ, ψ ont des dérivées partielles continues par rapport à l'ensemble des variables u, v dans le champ Δ.

3° Les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)}, \qquad \frac{D(z, x)}{D(u, v)}, \qquad \frac{D(x, y)}{D(u, v)},$$

qui, d'après l'hypothèse précédente, sont fonctions continues dans le champ Δ, ne sont jamais nuls simultanément.

Cela posé, on reconnaît qu'à un domaine plan Γ contenu dans Δ correspond une surface S, portion de la surface Σ. Nous allons chercher à donner un sens à la notion d'*aire de la surface* S.

Effectuons dans le plan des (u, v), par des parallèles aux axes, un carrelage de côté ρ. Prenons un des carrés obtenus; soient a, b, c, d ses sommets, a, b, c ayant les coordonnées

$$(u_0, v_0), \quad (u_0+\rho, v_0), \quad (u_0, v_0-\rho);$$

(u, v) étant un point de ce carré, on a

$$x = f(u, v) = f(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial f}{\partial u}(u', v') + (v-v_0)\frac{\partial f}{\partial v}(u', v'),$$

(u', v') étant, lui aussi, un point du carré. On a des expressions analogues pour y et z, en remplaçant f par φ et ψ.

A cause de la continuité des six dérivées partielles de f, φ, ψ, à $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\delta > 0$ tel que, si $\rho < \delta$, les valeurs de ces dérivées en un point quelconque du carré diffèrent de leurs valeurs en a de moins de ε. Cela posé, considérons les trois quantités ξ, η, ζ définies par les formules

$$\xi = f(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial f}{\partial u_0} + (v-v_0)\frac{\partial f}{\partial v_0},$$

$$\eta = \varphi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial \varphi}{\partial u_0} + (v-v_0)\frac{\partial \varphi}{\partial v_0},$$

$$\zeta = \psi(u_0, v_0) + (u-u_0)\frac{\partial \psi}{\partial u_0} + (v-v_0)\frac{\partial \psi}{\partial v_0}.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$|x-\xi| < \varepsilon(u-u_0) + \varepsilon(v-v_0) < 2\varepsilon\rho,$$
$$|y-\eta| < 2\varepsilon\rho, \qquad |z-\zeta| < 2\varepsilon\rho,$$

d'où résulte

$$\text{distance } (x, y, z) \text{ à } (\xi, \eta, \zeta) < 6\varepsilon\rho,$$

et cela dès que ρ est plus petit qu'une certaine valeur δ.

Quand (u, v) prend toutes les positions dans le carré $abcd$, (ξ, η, ζ) décrit dans l'espace un parallélogramme P de sommets A'B'C'D' et l'on a comme précédemment (n°s 162, 182)

$$\xi(B') - \xi(A') = \rho\frac{\partial f}{\partial u_0}, \qquad \eta(B') - \eta(A') = \rho\frac{\partial \varphi}{\partial u_0}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$A'B' = \rho\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u_0}\right)^2},$$

$$A'C' = \rho\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v_0}\right)^2}.$$

L'aire de P est égale à la racine carrée de la somme des carrés des aires de ses projections sur les trois plans de coordonnées. La projection P_1 de P sur le plan des xy, par exemple, est le parallélogramme décrit par le point ξ, η du plan des xy, et l'on a

$$P_1 = \rho^2\left|\frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)}\right| = \rho^2\left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)_{u_0, v_0}}\right|.$$

Posons

$$H(u, v) = \sqrt{\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2}.$$

L'aire de P est donnée par la formule

$$P = \rho^2 H(u_0, v_0).$$

Soit G une limite supérieure des fonctions suivantes :

$$\sqrt{\sum\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}, \qquad \sqrt{\sum\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}, \qquad H.$$

Soit g une limite inférieure *positive* de H, qui est continu et toujours *positif*, d'après l'hypothèse 3°. On a

$$A'B' < G\rho, \qquad A'C' < G\rho.$$

Évaluons une limite inférieure des hauteurs de P. On a

$$\text{distance } A'B' \text{ à } C'D' = \frac{\text{aire de P}}{A'B'} > \frac{H_0\rho^2}{G\rho} > \rho\frac{g}{G}.$$

Revenons au point (x, y, z) correspondant à (u, v). Quand (u, v) décrit le carré $abcd$, (x, y, z) décrit dans l'espace un morceau de surface ABCD. *On est conduit à considérer le parallélogramme* P *comme représentant ce morceau de surface avec une approximation d'autant plus grande que* ε *est plus petit.* Nous constatons en effet que les côtés et les hauteurs de P sont de l'ordre de ρ, tandis que la distance d'un point de P au point correspondant de S est plus petite que $6\varepsilon\rho$.

La somme des aires des parallélogrammes P correspondant à tous les carrés $abcd$ entièrement contenus dans le domaine Γ a pour limite,

quand ρ tend vers zéro, l'intégrale double

$$I = \int\int_{\Gamma} H(u, v)\, du\, dv.$$

C'est ce nombre I *que nous appellerons l'aire de la portion de surface* S. Nous allons, pour préciser cette notion, démontrer deux propriétés qui caractérisent le nombre I.

188. Nous dirons qu'une surface S_1 est *image* d'une surface S si l'on peut établir entre les points de S et ceux de S_1 une correspondance réciproque remplissant les conditions suivantes : quand un point de S décrit un arc de courbe L, le point correspondant de S_1 décrit un arc de courbe L_1. Si le premier ne passe pas deux fois par la même position, il en est de même du second. Si L décrit un morceau de surface sans passer deux fois par la même position, L_1 décrit de la même manière un morceau de surface sans passer deux fois par la même position. En d'autres termes, on suppose que *les deux surfaces se correspondent au point de vue de la géométrie de situation*. Par exemple, dans les hypothèses précédentes, le domaine Γ du plan des (u, v) est image de S ; le carré *abcd*, le morceau de surface ABCD et le parallélogramme A′B′C′D′ sont trois surfaces qui sont deux à deux images l'une de l'autre.

Nous dirons qu'une surface S_1, supposée image de S, est *approchée de* S *à* ε *près* si l'on peut établir entre les deux surfaces une correspondance dans les conditions précédentes, la distance de deux points correspondants étant plus petite que ε. Par exemple, dans ce qui précède, le morceau de surface ABCD a pour image approchée à $6\varepsilon\rho$ près le parallélogramme A′B′C′D′. *Nous allons chercher à définir des surfaces polygonales de plus en plus approchées de* S. Nous étendrons le sens du mot *surface polygonale* en l'appliquant à toute surface composée d'un nombre fini de portions de plans, chacune de ces portions pouvant être limitée par des courbes planes. Par exemple, la surface d'un cube dont on enlève une face et dont on limite les faces adjacentes par des courbes est une surface polygonale.

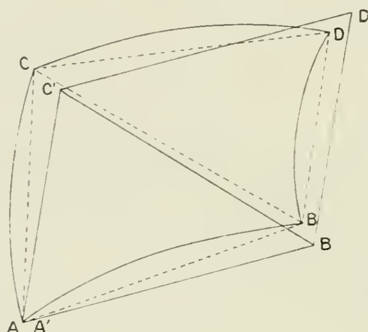
189. Étant donnée la surface S, nous allons tout d'abord construire *une surface polygonale variable* S_1 dans les conditions suivantes : S_1 *est formée par la juxtaposition d'un nombre fini de portions de surfaces planes dont chacune est l'image de plus en plus*

approchée d'un morceau de S, les portions de surfaces planes de S_1 étant juxtaposées entre elles comme le sont les morceaux de S. En outre, *la somme des aires de toutes ces portions*, c'est-à-dire l'aire de S_1, *tend vers le nombre* I.

Pour construire la surface S_1, prenons dans le plan des (u, v) le carré *abcd*, de côté ρ, que nous partageons en deux triangles par la diagonale *bc*.

Quand (u, v) décrit le triangle *abc*, (x, y, z) décrit un morceau de surface ABC, et d'autre part (ξ, η, ζ) décrit le triangle A′B′C′ (*fig.* 8). Nous prenons comme image du morceau de surface ABC le *triangle* ABC, la correspondance étant établie comme il suit. Rappelons que le triangle A′B′C′ correspond au triangle *abc* du plan des (u, v)

Fig. 8.



par des formules où ξ, η, ζ sont linéaires en u, v. De la même manière, nous pouvons trouver une loi faisant correspondre au point (u, v) du triangle *abc* un point (x_1, y_1, z_1) qui décrira le triangle ABC, x_1, y_1, z_1 étant de la forme

$$x_1 = lu + mv + n, \qquad y_1 = l'u + m'v + n', \qquad z_1 = l''u + m''v + n''.$$

Les neuf coefficients $l, m, n, l', \ldots$ sont en effet déterminés par les neuf conditions obtenues en exprimant que les trois points A, B, C correspondent respectivement à a, b, c. En langage géométrique, on considère la *correspondance homographique* parfaitement déterminée qui fait correspondre ABC à *abc*.

Considérons les deux points (x_1, y_1, z_1), (ξ, η, ζ) correspondant à un même point (u, v). Les trois différences $x_1 - \xi, \ldots$ sont linéaires en u, v. Par suite, si (u, v) décrit un segment de droite, $x_1 - \xi$ atteint sa plus grande valeur absolue en l'une des extrémités ; si (u, v)

décrit un triangle, $x_1 - \xi$ atteint sa plus grande valeur absolue en l'un des sommets. Or, pour chacun des sommets a, b, c, il y a coïncidence entre le point de S et le point correspondant (x_1, y_1, z_1); donc, en a, b, c, on a $x_1 = x$ et, par suite, $x_1 - \xi = x - \xi$. Or, on a $|x - \xi| < 2\varepsilon\rho$ (n° 187). Donc, en chaque sommet, on a $|x_1 - \xi| < 2\varepsilon\rho$.

Donc, *pour tout point du triangle abc, on a*

$$(1) \qquad |x_1 - \xi| < 2\varepsilon\rho.$$

Comparons maintenant deux points (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) correspondant au même point (u, v). Des deux inégalités

$$|x - \xi| < 2\varepsilon\rho, \qquad |x_1 - \xi| < 2\varepsilon\rho$$

résulte

$$|x_1 - x| < 4\varepsilon\rho,$$

et de même $|y_1 - y| < 4\varepsilon\rho$, $|z_1 - z| < 4\varepsilon\rho$, d'où

$$\text{distance } (x, y, z) \text{ à } (x_1, y_1, z_1) < 12\varepsilon\rho.$$

De la même manière, on fera correspondre au morceau BCD le triangle BCD, et les mêmes méthodes s'appliqueront à chacun des carrés tels que *abcd*, qu'on peut construire dans Δ. Nous pouvons dire que *les triangles* ABC, BCD *constituent des images approchées des morceaux de surface* ABC, BCD, *à* $12\varepsilon\rho$ *près*. Nous construirons la surface S_1 en appliquant ceci à tous les carrés ayant une partie commune avec Γ. En ce qui concerne les carrés qui empiètent sur Γ, nous ne retiendrons dans S_1 que les parties correspondant aux parties contenues dans Γ.

Soient T l'aire du triangle ABC, T′ celle du triangle A′B′C′. Évaluons une limite supérieure de T — T′.

Soient T_1, T_2, T_3 les projections de T sur les plans xy, xz, zy, T'_1, T'_2, T'_3 celles de T′. On a

$$T = \sqrt{\Sigma T_1^2}, \qquad T' = \sqrt{\Sigma T_1'^2};$$

donc (p. 145, note)

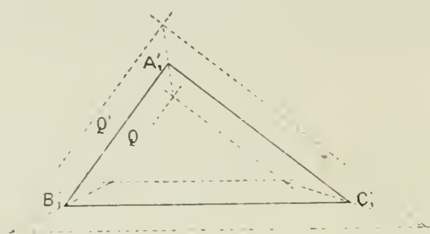
$$|T' - T| < |T_1 - T'_1| + |T_2 - T'_2| + |T_3 - T'_3|.$$

Évaluons $T_1 - T'_1$, c'est-à-dire la différence des aires des triangles $A_1 B_1 C_1$ décrit par le point (x_1, y_1) et $A'_1 B'_1 C'_1$ décrit par (ξ, η). On a, d'après (1),

$$\text{distance } (x_1, y_1) \text{ à } (\xi, \eta) < 4\varepsilon\rho.$$

Il en résulte que, si l'on trace (*fig.* 9) le triangle $A'_1 B'_1 C'_1$, et que l'on mène de part et d'autre de chaque côté une parallèle à ce côté à la distance $4\varepsilon\rho$, le point (x_1, y_1) sera compris, lorsqu'il décrira le

Fig. 9.



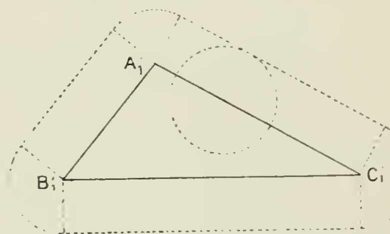
côté correspondant de $A_1 B_1 C_1$, entre ces deux parallèles. Deux cas sont possibles :

1° Si le rayon r du cercle inscrit au triangle $A'_1 B'_1 C'_1$ est supérieur ou égal à $4\varepsilon\rho$, avec les six parallèles aux côtés de ce triangle ainsi obtenues on forme deux triangles Q', Q, homothétiques de T'_1 par rapport au centre du cercle inscrit. Le triangle extérieur Q' contient T_1 et T'_1 qui, eux-mêmes, contiennent le triangle intérieur Q. La différence $Q' - Q$ est la réunion de trois trapèzes dont chacun a pour base médiane un côté de T'_1 et pour hauteur $8\varepsilon\rho$. Nous avons vu (n° 187) que chacun des côtés $A'B'$, $A'C'$ est plus petit que $G\rho$. Il en est, *a fortiori*, de même pour leurs projections $A'_1 B_1$, $A'_1 C'_1$. Le troisième côté $B'_1 C'_1$ est donc plus petit que $2G\rho$ et le périmètre du triangle plus petit que $4G\rho$, d'où

$$|T'_1 - T_1| < Q' - Q < 8\varepsilon\rho \cdot 4G\rho = 32G\varepsilon\rho^2.$$

2° Si $r < 4\varepsilon\rho$, imaginons (*fig.* 10) un cercle de rayon $4\varepsilon\rho$ dont le

Fig. 10.



centre parcourt le périmètre du triangle T'_1. Le domaine balayé par ce cercle comprend à son intérieur le périmètre du triangle T_1 ; donc

la réunion de ce domaine avec T'_1 constitue un domaine Θ qui contient T'_1 et T_1. Par suite, on a

$$|T'_1 - T_1| < \Theta.$$

Le domaine Θ est constitué : 1° par le triangle T'_1 dont l'aire, égale au demi-produit du périmètre par le rayon du cercle inscrit, est moindre que $2G\rho r$, donc moindre que $2G\rho.4\varepsilon\rho$; 2° par trois rectangles construits extérieurement à T'_1 avec les côtés de T'_1 comme bases et $4\varepsilon\rho$ comme hauteur; 3° par trois secteurs circulaires de rayon $4\varepsilon\rho$ ayant pour centres les trois sommets du triangle. On a donc

$$\Theta < 2G\rho.4\varepsilon\rho + 4G\rho.4\varepsilon\rho + 3\pi(4\varepsilon\rho)^2.$$

Le second membre de cette inégalité est de la forme

$$\varepsilon\rho^2(M + \varepsilon N),$$

M et N étant deux nombres.

En réunissant les deux cas de $r \geq 4\varepsilon\rho$ et $r < 4\varepsilon\rho$, on voit que l'on peut toujours trouver un nombre déterminé λ tel que, dès que ε et ρ sont plus petits que certaines quantités, on a

$$|T'_1 - T_1| < \lambda\varepsilon\rho^2.$$

Le même fait a lieu pour les deux autres projections, d'où finalement

$$|T' - T| < 3\lambda\varepsilon\rho^2.$$

Appliquons le même raisonnement aux triangles BCD, B'C'D', et faisons la somme des deux inégalités obtenues. Il vient, en désignant comme précédemment par P l'aire du parallélogramme A'B'C'D',

$$|P - (\text{aire ABC} + \text{aire BCD})| < 6\lambda\varepsilon\rho^2,$$

ou, en remplaçant P par sa valeur $H_0\rho^2$,

$$\text{aire ABC} + \text{aire BCD} = H_0\rho^2 + \mu_1\rho^2,$$

la borne supérieure des nombres $|\mu_1|$ pour tous les carrés tendant vers zéro avec ρ.

Supposons écrites les relations analogues pour chaque carré du carrelage ayant une partie commune avec Γ, en ne retenant des carrés qui empiètent sur Γ (carrés irréguliers) que la partie contenue dans Γ. Faisons tendre ρ vers zéro. La somme des aires des carrés irréguliers tend vers zéro. Il en est de même de la portion de S_1 correspondant

à ces carrés, car le rapport d'une portion de S_1 à la partie correspondante de Γ est inférieur à $G+\mu$, G étant une limite supérieure de H et μ une limite supérieure des nombres $|\mu_1|$. La portion de S_1 correspondant aux carrés intérieurs à Γ est $\sum(ABC+BCD)$, et l'on a

$$\sum(ABC+BCD)=\sum H_0\rho^2+\sum\mu_1\rho^2.$$

Quand ρ tend vers zéro, le premier terme du second membre tend vers $\int\int_\Gamma H(u,v)\,du\,dv$, le second tend vers zéro, ce qui établit la propriété énoncée, à savoir que l'aire de S_1 tend vers I.

190. Montrons maintenant qu'*il est impossible de trouver une surface polygonale variable* S_1 *remplissant les conditions indiquées au* n° 189, *la somme des aires des portions de surfaces planes qui constituent* S_1 *tendant vers un nombre* I' *moindre que* I.

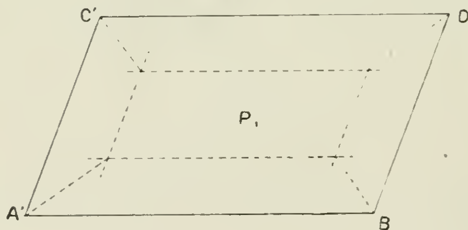
En effet, nous avons vu que les hauteurs du parallélogramme P sont plus grandes que $\rho\frac{g}{G}$.

Assujettissons-nous à prendre ε de façon que l'on ait

$$24\varepsilon\rho<\rho\frac{g}{G}\qquad\text{ou}\qquad\varepsilon<\frac{g}{24G}.$$

Traçons alors à l'intérieur de P, parallèlement à chaque côté, une droite à la distance $12\varepsilon\rho$ de ce côté. Il y a (*fig.* 11) à l'intérieur de

Fig. 11.



ces droites un parallélogramme P_1. La différence $P-P_1$ est plus petite que la somme de quatre parallélogrammes ayant pour bases les côtés de P et pour hauteur $12\varepsilon\rho$, c'est-à-dire que l'on a

$$P-P_1<12\varepsilon\rho(2A'B'+2A'C')<48\varepsilon G\rho^2,$$
$$P_1>P-48\varepsilon G\rho^2.$$

Soit S_1 une surface constituée par des polygones plans qui soient images approchées de morceaux de S, à $6\varepsilon\rho$ près. Étudions l'arc A_1B_1 de S_1 qui correspond à l'arc AB de S. On a, par hypothèse,

$$\text{distance } (x_1, y_1, z_1) \text{ à } (x, y, z) < 6\varepsilon\rho,$$

et, d'après le n° 187,

$$\text{distance } (x, y, z) \text{ à } (\xi, \eta, \zeta) < 6\varepsilon\rho,$$

d'où résulte

$$\text{distance } (x_1, y_1, z_1) \text{ à } (\xi, \eta, \zeta) < 12\varepsilon\rho,$$

et si, au lieu de ces deux points, on considère leurs projections sur le plan de P, l'inégalité a lieu *a fortiori*. Donc, quand (ξ, η, ζ) décrit A′B′, la ligne A_1B_1, décrite par (x_1, y_1, z_1), a sa projection sur le plan de P, *extérieure* au parallélogramme P_1; de même pour les lignes A_1C_1, ... correspondant aux autres côtés de P. Donc, *la portion de* S_1 *correspondant au carré abcd se projette suivant une aire contenant* P_1. Son aire est supérieure à P_1, c'est-à-dire à $P - 48\varepsilon G\rho^2$.

Cela posé, donnons-nous un nombre positif μ et effectuons dans le plan des (u, v) un carrelage de côté ρ. Formons la somme

$$\sum{}' H(u_0, v_0)\rho^2,$$

étendue à tous les carrés du carrelage entièrement contenus dans Γ. Quand ρ est assez petit, cette somme est plus grande que $I - \mu$.

Choisissons ε en nous astreignant aux conditions déjà fixées, puis ρ en nous astreignant aux conditions qui en résultent et, en outre, à ce que $\sum' H_0\rho^2$ soit plus grand que $I - \mu$. Si, dans ces conditions, nous considérons la surface S_1 précédente, la somme des aires des portions qui la composent est plus grande que $\sum P - 48\varepsilon G \sum \rho^2$.

En remplaçant $\sum P$ par sa valeur $\sum' H_0\rho^2$, nous avons l'inégalité

$$\text{aire } S_1 > I - \mu - 48\varepsilon G\Gamma.$$

Or, les deux termes μ et $48\varepsilon G\Gamma$ peuvent être rendus aussi petits que l'on veut; donc *l'aire de* S_1 *peut surpasser tout nombre inférieur à* I *dès que* ε *et* ρ *sont inférieurs à certains nombres*. La proposition énoncée résulte immédiatement de là.

191. Le nombre I nous apparaît ainsi comme ayant par rapport à la surface une propriété *intrinsèque*, indépendante de sa représentation paramétrique.

Remarques. — 1° Dans la formule

$$\mathrm{I} = \int\int_\Gamma \mathrm{H}\, du\, dv,$$

on peut convenir de désigner $\mathrm{H}\,du\,dv$ par $d\sigma$ et dire que c'est *l'élément différentiel de l'aire*. Si l'on considère sur cette surface les courbes coordonnées correspondant à $u=$ const., $v=$ const., on dira que $d\sigma$ représente la valeur principale de la portion de surface comprise entre les courbes u, $u+du$, v, $v+dv$.

2° Dans le cas particulier où l'équation de la surface est de la forme

$$z = f(x, y),$$

le tableau des dérivées de x, y, z par rapport aux deux paramètres x, y est

$$\begin{matrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{matrix}$$

Les trois déterminants fonctionnels déduits de ce tableau sont

$$-\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad 1.$$

L'élément différentiel est donc

$$d\sigma = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

3° Revenons au cas général et supposons qu'on effectue un changement de variables sur les paramètres u, v, ce changement étant réversible dans le domaine considéré.

Nous savons *a priori* que nous devons trouver pour expression de I une expression analogue en fonction des nouveaux paramètres u_1, v_1, puisque nous avons donné une propriété intrinsèque du nombre I. En effet, on a, par le changement de variables,

$$\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u_1, v_1)} = \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}\,\frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(u_1, v_1)},$$

de sorte que, si l'on forme la fonction H relative à u_1, v_1, on trouve

$$\mathrm{H}(u_1, v_1) = \mathrm{H}(u, v) \left| \frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(u_1, v_1)} \right|$$

et l'on a

$$\int\int_{\Gamma_1} \mathrm{H}(u_1, v_1)\, du_1\, dv_1 = \int\int_{\Gamma_1} \mathrm{H}(u, v) \left| \frac{\mathrm{D}(u, v)}{\mathrm{D}(u_1, v_1)} \right| du_1\, dv_1.$$

Cette intégrale est bien celle que l'on obtient en faisant directement le changement de variables dans $\int\int_{\Gamma} \mathrm{H}(u, v)\, du\, dv$.

4° De l'étude faite résulte que, si l'on décompose S en plusieurs morceaux S_1, S_2, ..., S_h, on a

$$\int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{H}\, du\, dv = \int\int_{\mathrm{S}_1} \mathrm{H}\, du\, dv + \ldots + \int\int_{\mathrm{S}_h} \mathrm{H}\, du\, dv.$$

c'est-à-dire que l'aire totale est égale à la somme des aires de ses différentes parties.

5° Les hypothèses analytiques faites sur la surface s'expriment, en langage géométrique, en disant que la surface a, en chaque point, un plan tangent qui varie d'une manière continue avec le point. Si l'on a une surface S ne remplissant pas ces conditions, mais décomposable en un nombre fini de parties dont chacune les remplit, l'aire de S sera par définition la somme des aires de ces différentes parties.

192. Considérons le cas particulier des surfaces de révolution d'axe oz. On peut mettre les coordonnées d'un point (x, y, z) de la surface sous la forme

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z,$$

r et z étant des fonctions données d'un paramètre t; r, θ, z sont les coordonnées semi-polaires. Le tableau des dérivées de x, y, z par rapport aux variables indépendantes t, θ est

$$\begin{matrix} r'_t\cos\theta & r'_t\sin\theta & z'_t \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{matrix}$$

Les déterminants fonctionnels qui s'en déduisent sont, au signe près,

$$rr', \qquad rz'\cos\theta, \qquad rz'\sin\theta,$$

d'où résulte

$$d\sigma = r\sqrt{r'^2 + z'^2}\, dt\, d\theta.$$

VII. — Intégrales curvilignes.

193. Considérons dans l'espace un arc de courbe L, allant de A à B, rapporté à trois axes rectangulaires et défini par des relations de la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Nous supposons que f, φ, ψ sont des fonctions continues, pourvues de dérivées elles-mêmes continues, et que t varie dans le même sens de a à b lorsque le point (x, y, z) va de A en B.

Donnons-nous, d'autre part, une fonction $P(x, y, z)$ définie en tout point de l'arc AB.

Prenons sur cet arc entre A et B des points intermédiaires

$$M_0 \text{ ou } A, \qquad M_1, \qquad M_2, \qquad \ldots, \qquad M_{n-1}, \qquad M_n \text{ ou } B,$$

correspondant aux valeurs suivantes du paramètre :

$$t_0 = a, \qquad t_1, \qquad t_2, \qquad \ldots, \qquad t_{n-1}, \qquad t_n = b,$$

ces valeurs étant rangées par ordre de grandeur croissante ou décroissante. Sur l'arc $M_{i-1}M_i$, prenons arbitrairement un point (ξ_i, η_i, ζ_i) et formons la somme

$$(1) \qquad \sum_{i=1,\ldots,n} P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Je dis que *cette somme tend vers une limite déterminée et finie si l'on fait varier la loi de partage de l'intervalle* (a, b) *de manière que la plus grande différence* $(t_i - t_{i-1})$ *tende vers zéro,* ou, ce qui revient au même, de manière que la plus grande distance $M_{i-1}M_i$ tende vers zéro.

En effet, (ξ_i, η_i, ζ_i) correspond à une valeur θ_i du paramètre comprise entre t_{i-1} et t_i. D'autre part, nous avons, d'après la formule des accroissements finis,

$$x_i - x_{i-1} = (t_i - t_{i-1}) f'(\theta'_i),$$

θ'_i étant, lui aussi, compris entre t_{i-1} et t_i.

A cause de la continuité de $f'(t)$, qui entraîne la continuité uniforme dans l'intervalle borné (a, b), nous pouvons poser

$$f'(\theta'_i) = f'(\theta_i) + \varepsilon_i,$$

la borne supérieure ε des nombres $|\varepsilon_i|$ tendant vers o quand la loi de partage de l'intervalle (a, b) varie de manière que la plus grande des différences $(t_i - t_{i-1})$ tende vers o. La somme (1) peut alors s'écrire

$$\sum \mathrm{P}[f(\theta_i), \varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)] f'(\theta_i)(t_i - t_{i-1})$$
$$+ \sum \mathrm{P}[f(\theta_i), \varphi(\theta_i), \psi(\theta_i)] \varepsilon_i (t_i - t_{i-1}).$$

Si l'on fait varier la loi de partage de manière que la plus grande différence $t_i - t_{i-1}$ tende vers o, le second terme tend vers o, car il est plus petit en valeur absolue que $\varepsilon \mathrm{A}(b - a)$, A étant la borne supérieure de $|\mathrm{P}(x, y, z)|$ dans l'intervalle (a, b).

Dans les mêmes conditions, le premier terme tend vers l'intégrale

$$\int_a^b \mathrm{P}[f(t), \varphi(t), \psi(t)] f'(t)\, dt.$$

On reconnaît que dans cette intégrale l'élément différentiel est ce que l'on obtient si dans l'expression $\mathrm{P}(x, y, z)\, dx$ on remplace x, y, z par $f(t), \varphi(t), \psi(t)$ et dx par $f'(t)\, dt$. On convient de désigner cette intégrale par

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}(x, y, z)\, dx,$$

et l'on dit que c'est une *intégrale curviligne prise le long de l'arc de courbe* AB.

De la même manière on définit $\int_{\mathrm{L}} \mathrm{Q}(x, y, z)\, dy$ et $\int_{\mathrm{L}} \mathrm{R}(x, y, z)\, dz$; par définition, on désigne par

$$\int_{\mathrm{L}} \mathrm{P}(x, y, z)\, dx + \mathrm{Q}(x, y, z)\, dy + \mathrm{R}(x, y, z)\, dz$$

la somme de ces trois intégrales.

194. *Remarques.* — 1° Si l'on exprime t en fonction d'un nouveau paramètre u, l'intégrale en t est modifiée comme il suit : on fait le changement de variable dans $\mathrm{P}f'(t)$ et l'on remplace dt par $t'_u du$. On reconnaît que l'élément différentiel obtenu est celui que l'on obtient si l'on applique directement la définition de l'intégrale curviligne à la fonction P en prenant pour paramètre u.

2° Les deux intégrales

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz \quad \text{et} \quad \int_{BA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

sont deux nombres opposés.

3° Si C est un point de l'arc AB, on a

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{AC} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + \int_{CB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

4° Si l'on a un arc de courbe ne remplissant pas toutes les conditions permettant de définir une intégrale curviligne le long de cet arc, mais formé par la réunion bout à bout d'arcs qui les remplissent, l'intégrale curviligne le long de l'arc total est, par définition, la somme des intégrales curvilignes le long des différents arcs partiels.

5° Si L est un contour *fermé*, l'intégrale prise le long de L est indépendante du point de départ, mais elle dépend du sens de parcours et change de signe si ce sens est changé.

195. *Dérivation d'une intégrale curviligne par rapport à un paramètre.* — Supposons que P soit fonction de certaines variables α, β, ... jouant le rôle de paramètres et considérons une intégrale curviligne

$$I = \int_{L} P(x, y, z, \alpha, \beta, \ldots)\,dx.$$

Si P est fonction continue par rapport à l'ensemble des variables x, y, z, α, β, ..., il en résulte que I est fonction continue des paramètres α, β, ... Si P a une dérivée par rapport à α, par exemple, I a aussi une dérivée par rapport à α et on l'obtient en remplaçant la fonction que l'on intègre par sa dérivée par rapport à α. En effet, en considérant I comme une intégrale en t, on sait que I a une dérivée par rapport à α, et l'on a

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_a^b \frac{\partial P}{\partial \alpha}[f(t), \varphi(t), \psi(t)]\,f'(t)\,dt.$$

On reconnaît que l'intégrale du second membre n'est autre que l'intégrale curviligne $\int_{L} \frac{\partial P}{\partial \alpha}\,dx$.

En résumé, *la règle ordinaire de dérivation s'applique aux intégrales curvilignes.*

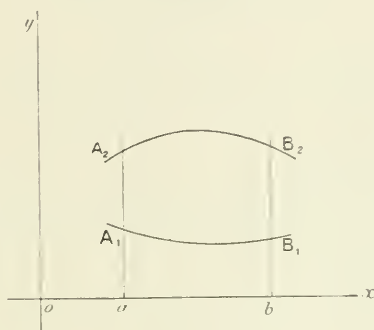
196. *Formule de Green.* — La formule de Green établit une relation importante entre une intégrale curviligne *plane* et une intégrale double. Considérons d'abord le cas particulier suivant :

On a, dans un plan Oxy (*fig.* 12) un domaine A limité par deux parallèles à Oy d'abscisses a et b ($a < b$) et par deux arcs de courbe ayant pour équations

$$y = \theta_1(x), \qquad y = \theta_2(x).$$

θ_1 et θ_2 étant fonctions continues de x dans l'intervalle (a, b) et telles que $\theta_2 > \theta_1$ (sauf peut-être pour a et b, où l'on peut avoir $\theta_2 = \theta_1$).

Fig. 12.



Considérons l'intégrale double étendue au domaine A d'une fonction qui est la dérivée partielle par rapport à y d'une fonction connue $P(x, y)$, soit

$$I = \int\int_A \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dx\, dy.$$

Évaluons cette intégrale double en intégrant d'abord par rapport à y. Une droite d'abscisse x coupe les deux courbes frontières en deux points d'ordonnées $y_1 = \theta_1(x)$, $y_2 = \theta_2(x)$, et l'on a

$$I = \int_a^b dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\, dy = \int_a^b dx \,[P(x, y)]_{y_1}^{y_2},$$

$$I = \int_a^b P(x, y_2)\, dx - \int_a^b P(x, y_1)\, dx.$$

L'intégrale $\int_a^b P(x, y_2)\, dx$ est l'intégrale curviligne de $P\, dx$ prise le long de l'arc A_2B_2 ; de même $\int_a^b P(x, y_1)\, dx$ est l'intégrale curvi-

ligne de $P\,dx$ prise le long de l'arc A_1B_1; donc

$$I = \int_{A_2B_2} P\,dx - \int_{A_1B_1} P\,dx,$$

ou encore

$$I = -\int_{A_1B_1} P\,dx - \int_{B_2A_2} P\,dx.$$

L'intégrale curviligne de $P\,dx$ prise le long des droites A_1A_2 ou B_1B_2 est nulle, puisque x est constant sur chacune de ces droites. On peut donc ajouter au second membre de la dernière relation les deux intégrales $-\int_{B_1B_2} P\,dx$ et $-\int_{A_2A_1} P\,dx$. Nous pourrons alors écrire, en réunissant toutes ces intégrales curvilignes,

$$I = \int\int_{A} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{A_1B_1B_2A_2A_1} P\,dx.$$

C'est la relation cherchée.

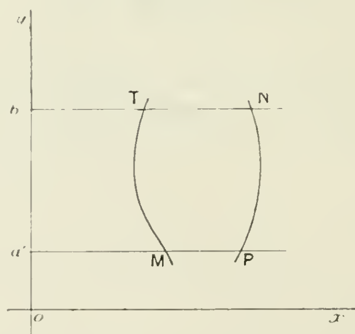
En intervertissant le rôle des lettres x, y, on constate de même le résultat suivant :

Soit l'intégrale double

$$I = \int\int_{A} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy;$$

le domaine A (*fig.* 13) étant limité par deux parallèles à Ox d'or-

Fig. 13.



données a' et b' $(a' < b')$ et deux courbes d'équations

$$x = \lambda_1(y), \qquad x = \lambda_2(y) \qquad (\lambda_2 > \lambda_1),$$

λ_1, λ_2 étant continues dans l'intervalle (a', b'), on a

$$\mathrm{I} = \int_{a'}^{b'} dy \int_{\lambda_1(y)}^{\lambda_2(y)} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\, dx = \int_{a'}^{b'} dy\, [\mathrm{Q}(x_2, y) - \mathrm{Q}(x_1, y)],$$

ou, en introduisant les intégrales curvilignes,

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{PN}} \mathrm{Q}(y)\, dy + \int_{\mathrm{TM}} \mathrm{Q}(y)\, dy.$$

Ajoutons au second membre les intégrales curvilignes, nulles toutes deux,

$$\int_{\mathrm{NT}} \mathrm{Q}\, dy, \quad \int_{\mathrm{MP}} \mathrm{Q}\, dy;$$

on obtient

$$\mathrm{I} = \int\int_{\mathrm{A}} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\mathrm{PNTMP}} \mathrm{Q}(y)\, dy.$$

197. Avant de déduire de ces cas particuliers la formule de Green dans le cas général, nous donnerons quelques définitions. Considérons un domaine A du plan dont la frontière est constituée par un contour γ qui remplit les conditions suivantes : il n'a pas de point multiple; il est formé par un ou plusieurs arcs de courbe placés bout à bout, chacun de ces arcs pouvant être défini par des formules de la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

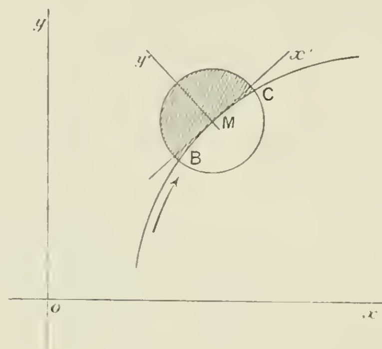
f, φ étant continues et ayant des dérivées elles-mêmes continues. Enfin, l'intervalle de variation de t relatif à un tel arc peut être divisé en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels f et φ varient dans un sens déterminé, à moins que l'une des deux fonctions ne soit constante (c'est le cas des segments de droite parallèles à $\mathrm{O}x$ et à $\mathrm{O}y$).

Dans ces conditions, on peut diviser le contour total en un nombre fini d'arcs pour chacun desquels ou bien x ou y est constant, ou bien chacune des variables x, y est une fonction de t toujours croissante ou toujours décroissante; sur un tel arc, t peut être considéré comme fonction déterminée de x (d'après la théorie des fonctions inverses) et par suite y comme une fonction déterminée de x, de même x est fonction déterminée de y, de sorte que l'on a un nombre fini d'arcs joints bout à bout et dont chacun est représenté soit par une équation de la forme $y = \mathrm{F}(x)$, soit par une équation de la forme $x = \Phi(y)$,

les fonctions F et Φ ayant des dérivées continues. Nous appellerons *contour simple* un tel contour, points *réguliers* les points du contour, sauf les points en nombre fini où se raccordent deux arcs différents; nous appellerons ces derniers points *singuliers*.

Soit M un point régulier; d'après la théorie de la construction des courbes, il y a en M une tangente et une normale. Traçons (*fig.* 14) un cercle α de rayon ρ assez petit et de centre M. La portion d'arc de γ comprise dans le cercle se compose de deux parties BM et CM,

Fig. 14.



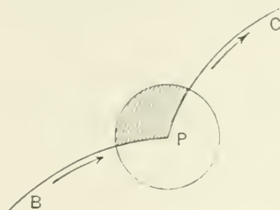
situées de part et d'autre de la normale. D'autre part, le cercle est divisé par l'arc BC en deux parties dont l'une seulement fait partie du domaine A, de sorte que, parmi les deux portions de demi-normale en M contenues dans le cercle, l'une seulement est contenue dans A. Cela étant, il existe sur γ deux sens de parcours. L'un d'eux étant choisi comme sens de parcours d'un mobile, l'arc BC est parcouru dans un sens déterminé. Soient Mx' la demi-tangente qui est du même côté par rapport à la normale que celui des deux arcs MB, MC qui est parcouru après l'autre, My' la demi-normale contenue dans l'intérieur de A. L'angle $x'My'$ est ou bien de même sens que l'angle des coordonnées, ou bien de sens contraire. Dans le cas de la figure, il est de même sens. On reconnaît dans ce cas que *le mobile a l'aire à sa gauche.*

Je dis que, *lorsque* M *décrit le contour* γ *dans un sens déterminé, le sens de* $x'My'$ *par rapport à* xoy *reste le même, c'est-à-dire que le mobile a constamment l'aire* A *à sa gauche ou constamment à sa droite.*

En effet, lorsque M se déplace sur l'arc régulier partiel dont il fait partie, les demi-droites Mx', My' se déplacent d'une façon continue.

Le sens de l'angle reste donc le même. Imaginons maintenant que M arrive en un point singulier P (*fig.* 15), c'est-à-dire au point de raccordement de deux arcs dont chacun remplit les conditions précédentes. Soient BP l'arc par lequel le mobile arrive en P, PC l'arc par lequel il en part. Décrivons encore un cercle de centre P et de rayon assez petit. Il est divisé en deux régions dont l'une est contenue

Fig. 15.

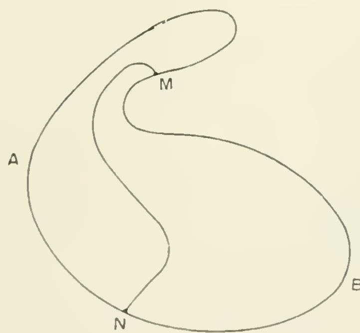


dans A. Si, en parcourant BP, le mobile a à sa gauche cette portion, le même fait se produit quand il parcourt PC. La proposition énoncée est donc établie.

Nous dirons que le sens de parcours sur γ est le sens positif, si en parcourant γ dans ce sens le mobile a constamment l'aire A à sa gauche, le fait étant entendu comme il vient d'être précisé. Le sens de parcours sera négatif si l'aire est à droite.

198. Considérons maintenant un domaine A limité par un contour simple γ. Traçons (*fig.* 16) une ligne courbe tout entière intérieure

Fig. 16.



à A joignant deux points M et N de γ. A est partagé en deux domaines A_1, A_2 ayant respectivement pour frontières MANM et

MBNM. Considérons une intégrale curviligne de la forme

$$\int_{\text{MANBM}} P\,dx + Q\,dy.$$

Je dis que l'on a

$$(1) \qquad \int_{\text{MANBM}} P\,dx + Q\,dy = \int_{\text{MANM}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\text{MNBM}} P\,dx + Q\,dy.$$

En effet, le second membre peut se mettre sous la forme

$$\int_{\text{MAN}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\text{NM}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\text{MN}} P\,dx + Q\,dy + \int_{\text{NBM}} P\,dx + Q\,dy.$$

Dans cette somme, le deuxième et le troisième terme ont une somme nulle. Il reste les deux intégrales extrêmes dont la somme est justement

$$\int_{\text{MANBM}} P\,dx + Q\,dy.$$

Remarquons que, dans les trois intégrales qui figurent dans la relation (1), *les contours sont parcourus dans le même sens.*

Le résultat obtenu s'étend évidemment au cas où A est décomposé de la même façon en un nombre fini *quelconque* de domaines partiels.

199. Cela posé, considérons un domaine A limité par un contour simple γ. Décomposons ce domaine en domaines partiels dont chacun est de la forme de ceux qui ont été étudiés dans les deux cas particuliers de la formule de Green. On y parviendra de la façon suivante : On considère une droite parallèle à oy qui rencontre γ et qui varie en partant de la position d'abscisse minimum. On la déplace en mettant en évidence les positions pour lesquelles elle passe par un point singulier; deux de ces positions consécutives déterminent entre elles dans A une ou plusieurs aires partielles remplissant les conditions du paragraphe 196. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ces aires partielles en nombre fini. $P(x, y)$ étant une fonction définie dans tout le domaine A, on a

$$\int\int_{A_i} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{C_i} P\,dx,$$

C_i étant le contour de A_i et l'intégrale étant prise le long du contour parcouru dans le sens positif. D'où, en faisant la somme des relations

analogues pour tous les domaines A_i,

$$\int\int_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\sum \int_{C_i} P\,dx.$$

D'après ce qui précède, la somme d'intégrales qui constitue le second membre est égale à l'intégrale prise le long du contour γ, d'où

$$\int\int_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_\gamma P\,dx.$$

De la même manière on établit la formule

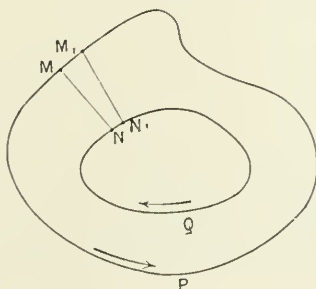
$$\int\int_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_\gamma Q\,dy,$$

et, en réunissant les deux formules,

$$\int\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy.$$

C'est la formule de Green. Elle peut d'ailleurs s'étendre à une aire limitée par plusieurs contours simples. Étant donné un domaine A (*fig.* 17) dont la frontière est constituée par un con-

Fig. 17.



tour γ : MPM, retranchons-en un domaine A_1 limité par un contour γ_1 : NQN, et soit B le domaine restant en forme de couronne. Supposons que les fonctions P et Q satisfassent, ainsi que leurs dérivées, aux conditions de continuité dans ce domaine B. Joignons deux points voisins M et M_1 de γ à deux points voisins N et N_1 de γ_1. Le contour MPM_1N_1QNM est un contour simple auquel s'applique la formule de Green. L'intégrale curviligne qui figure dans cette for-

mule s'écrit

$$\int_{\mathrm{MPM}_1} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \int_{\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1} \mathrm{P}\,dx + \ldots + \int_{\mathrm{N}_1\mathrm{QN}} \mathrm{P}\,dx + \ldots + \int_{\mathrm{NM}} \mathrm{P}\,dx + \ldots.$$

Quand M_1 tend vers M et N_1 vers N, la formule ne cesse pas d'être valable. Mais, dans ces conditions, $\int_{\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1} \mathrm{P}\,dx + \ldots + \int_{\mathrm{NM}} \mathrm{P}\,dx + \ldots$ tend vers zéro; $\int_{\mathrm{MPM}_1} \mathrm{P}\,dx + \ldots$ tend vers $\int_{\gamma} \mathrm{P}\,dx + \ldots$ et, enfin, $\int_{\mathrm{N}_1\mathrm{QN}} \mathrm{P}\,dx + \ldots$ tend vers $\int_{\gamma_1} \mathrm{P}\,dx + \ldots$, de sorte que l'on a finalement

$$\int\int_{\mathrm{B}} \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\gamma} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \int_{\gamma_1} \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

le contour γ étant parcouru dans le sens positif et le contour γ_1 dans le sens qui serait le sens négatif, eu égard à la région A_1, mais qui est le sens positif par rapport au domaine B.

200. Reprenons le cas d'un contour simple γ entourant une aire A et faisons dans la formule de Green

$$\mathrm{P} = y, \qquad \mathrm{Q} = 0.$$

Il vient

$$\int_{\gamma} y\,dx = -\int\int_{\mathrm{A}} dx\,dy = -\mathrm{A}.$$

De même, en faisant

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{Q} = x,$$

on obtient

$$\int_{\gamma} x\,dy = \int\int_{\mathrm{A}} dx\,dy = \mathrm{A}.$$

En réunissant ces deux formules, on a une troisième valeur de A :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\gamma} x\,dy - y\,dx.$$

On a ainsi trois expressions de l'aire A par des intégrales curvilignes.

La dernière présente la propriété d'être invariante pour un changement de direction des axes de coordonnées. On s'en rend compte en passant par les coordonnées polaires; en employant les notations habituelles, on reconnaît que $x\,dy - y\,dx$ se transforme en $\rho^2\,d\theta$.

201. *Cas où P et Q sont les dérivées partielles d'une même fonction.* — Supposons qu'il y ait une fonction $F(x, y)$ continue dans le domaine D et telle que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Considérons une intégrale curviligne $\int_L P\,dx + Q\,dy$, L étant un arc de courbe contenu dans D et défini par des relations de la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

On a par définition, t variant de a à b sur l'arc L,

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \{ P[f(t), \varphi(t)]\,f'(t) + Q[f(t), \varphi(t)]\,\varphi'(t) \}\,dt.$$

Posons

$$F[f(t), \varphi(t)] = \Phi(t).$$

On reconnaît que l'élément différentiel de cette intégrale est $\frac{d\Phi}{dt}\,dt$, de sorte que l'on a

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \Phi(b) - \Phi(a),$$

ou encore, en désignant par A et B les extrémités de l'arc,

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = F(B) - F(A).$$

Donc, dans ce cas, la valeur de l'intégrale curviligne ne dépend que de la position des extrémités de l'arc ; elle reste la même si l'arc se déforme d'une manière quelconque en restant contenu dans D, ses extrémités restant fixes.

En particulier, si l'on considère un contour fermé, on voit que toute intégrale curviligne prise le long de ce contour est nulle.

Prenons par exemple

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Les fonctions P et Q, qui sont ici $\frac{x}{x^2 + y^2}$ et $\frac{y}{x^2 + y^2}$, sont partout définies, sauf pour l'origine. Ce sont les dérivées partielles de la

fonction

$$F(x, y) = \frac{1}{2} L(x^2 + y^2),$$

qui est définie et continue dans tout domaine A ne contenant pas l'origine.

Pour tout arc MN du plan ne passant pas par l'origine, nous serons dans les conditions d'application de la théorie précédente et l'on aura, en appelant x_0, y_0 les coordonnées de M, x_1, y_1 celles de N,

$$\int_{MN} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} L(x_1^2 + y_1^2) - \frac{1}{2} L(x_0^2 + y_0^2).$$

Prenons, comme autre exemple,

$$P\,dx + Q\,dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2},$$

c'est-à-dire

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

P et Q sont les dérivées partielles de la fonction

$$F(x, y) = \text{arc tang} \frac{y}{x}.$$

Pour être dans les conditions d'application de la théorie précédente, il faut trouver une aire où F soit parfaitement définie en tout point et continue. En premier lieu, il faut écarter l'origine; les systèmes de valeurs telles que $x = 0$, $y \neq 0$ ne sont singuliers qu'en apparence, car, lorsque $\frac{y}{x}$ devient infini, la fonction arc tang $\frac{y}{x}$ prend une série de valeurs finies. Considérons un cercle de centre O et de rayon r et retranchons-en un cercle de centre O et de rayon ε. On reconnaît que l'on ne peut trouver une détermination de arc tang $\frac{y}{x}$ qui serait bien définie pour tout point de la couronne et aurait pour dérivées les fonctions P et Q.

En effet, faisons mouvoir un point M dans le sens positif sur un troisième cercle de centre O et de rayon compris entre r et ε. En posant

$$OM = \rho,$$

on aura

$$x = \rho \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\varphi,$$

et φ sera une des déterminations de arc tang $\frac{y}{x}$. Si l'on part pour

cette détermination de la valeur o, quand M sera revenu à son point de départ, la valeur obtenue pour φ sera augmentée de 2π. On ne constitue pas une fonction qui serait partout continue dans la couronne (ε, r) et qui aurait pour dérivées P et Q. Pour éviter cette difficulté, nous enlèverons de la couronne la partie comprise entre les rayons correspondant aux angles o et α, α étant aussi petit que l'on veut. Il reste un domaine dans lequel on peut fixer une détermination de $\operatorname{arc tang} \frac{y}{x}$ qui est, dans tout ce domaine, fonction bien déterminée et continue. Dans ces conditions, l'intégrale curviligne le long de tout chemin compris dans ce nouveau domaine a une valeur déterminée qui ne dépend que des extrémités.

VIII — Intégrales de surface.

202. Considérons une surface S ayant pour équation en coordonnées rectangulaires

$$z = f(x, y),$$

f étant définie en tout point d'un domaine A du plan des (x, y). Soit $R(x, y, z)$ une fonction définie dans une certaine région contenant S. Prenons l'intégrale double

$$I = \int\int_A R[x, y, f(x, y)]\, dx\, dy.$$

On peut convenir de considérer ce nombre I comme attaché à S. Pour préciser, rappelons que nous avons été conduits à appeler *élément différentiel de l'aire de la surface* l'expression

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

D'autre part, les cosinus de la normale au point (x, y, z) sont donnés par

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma}{-1},$$

d'où

$$\cos\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

ce qui conduit à écrire, en supposant $\cos\gamma$ positif,

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{\cos\gamma}.$$

Nous sommes conduits à remplacer, dans l'intégrale double précédente, $dx\,dy$ par $\cos\gamma\,d\sigma$ et à écrire conventionnellement

$$\mathrm{I} = \int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{R}(x, y, z)\cos\gamma\,d\sigma.$$

Il y a lieu de distinguer en un point de S deux demi-normales. Pour l'une, γ est aigu ; pour l'autre, il est obtus. On peut considérer chacune de ces demi-normales comme attachée à une face de S. Nous appellerons *face supérieure* celle pour laquelle $\cos\gamma$ est *positif;* l'autre sera la *face inférieure*.

Pour la face supérieure, nous poserons

$$\mathrm{J} = \mathrm{I},$$

et, pour la face inférieure,

$$\mathrm{J} = -\mathrm{I}.$$

On peut étendre la définition de J au cas d'une surface décomposable en morceaux dont chacun remplit les conditions précédentes.

De la même manière, en désignant par B et C les projections de S sur le plan des yz et sur le plan des zx, on considère les intégrales doubles

$$\int\int \mathrm{P}\,dy\,dz, \quad \int\int_{\mathrm{C}} \mathrm{Q}\,dz\,dx,$$

et on les écrit conventionnellement

$$\int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{P}(x, y, z)\cos\alpha\,d\sigma, \quad \int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{Q}(x, y, z)\cos\beta\,d\sigma.$$

D'une manière générale, par addition de telles intégrales, on obtient une *intégrale de surface étendue à* S ; c'est une expression de la forme

$$\int\int_{\mathrm{S}} [\mathrm{P}(x, y, z)\cos\alpha + \mathrm{Q}(x, y, z)\cos\beta + \mathrm{R}(x, y, z)\cos\gamma]\,d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue soit à l'une des faces, soit à l'autre. Pour l'évaluer, on la sépare en trois parties; dans chacune de ces parties, on remplace respectivement $\cos\alpha\,d\sigma$, $\cos\beta\,d\sigma$, $\cos\gamma\,d\sigma$ par $\pm\,dy\,dz$, $\pm\,dz\,dx$, $\pm\,dx\,dy$. En ce qui concerne le signe, pour chacune des

faces, chaque cosinus a un signe déterminé. Si $\cos\alpha$, par exemple, est positif, on choisit devant $dy\,dz$ le signe $+$; de même pour les autres.

203. *Formule de Green.* — Prenons un domaine D compris entre deux surfaces S_1 et S_2 ayant pour équations

$$z = \theta_1(x, y), \qquad z = \theta_2(x, y), \qquad \theta_2 > \theta_1,$$

et le cylindre projetant ces surfaces sur le plan des xy; θ_1 et θ_2 sont des fonctions définies en tout point d'un domaine A du plan des xy. Soit $R(x, y, z)$ une fonction.

Considérons l'intégrale triple

$$\int\int\int_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Elle est égale (n° 179) à

$$(1) \qquad \int\int_A [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]\, dx\, dy,$$

z_2 et z_1 étant égaux à $\theta_2(x, y)$ et $\theta_1(x, y)$.

Or, l'intégrale

$$\int\int_A R(x, y, z_2)\, dx\, dy$$

peut être considérée comme intégrale de surface de la fonction R étendue à la surface S_2 et prise sur la face supérieure, c'est-à-dire sur la *face extérieure au volume*. De même l'intégrale

$$-\int\int_A R(x, y, z_1)\, dx\, dy$$

peut être considérée comme intégrale de surface de R étendue à S_1 et prise sur la face inférieure, c'est-à-dire encore sur la *face extérieure au volume*.

D'autre part, si la frontière de D comprend un cylindre, l'intégrale de surface de R étendue à ce cylindre doit être considérée comme nulle, car dans l'expression $\int\int R\, d\sigma \cos\gamma$, $\cos\gamma$ sera constamment nul. On peut ajouter cette intégrale de surface à l'expression (1) et l'on reconnaît que l'on obtient ainsi l'*intégrale de surface de la fonction* R *étendue à la face extérieure de la frontière* S *du domaine* D. C'est en cela que consiste la formule de Green; elle

s'écrit

$$\int\int\int_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \int\int_S R(x, y, z)\cos\gamma\, d\sigma.$$

Le résultat s'étend à un domaine de forme plus compliquée, décomposable en domaines de la forme précédente.

En permutant le rôle des variables x, y, z, on obtient deux autres formules analogues, d'où, par addition, la formule générale

$$\int\int\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \int\int_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma,$$

l'intégrale de surface étant prise sur la *face extérieure* de S.

Si l'on fait en particulier

$$P = x, \qquad Q = 0, \qquad R = 0,$$

on obtient

$$\int\int\int_D dx\, dy\, dz = \int\int_S x\, dy\, dz,$$

ou

$$V = \int\int_S x\, dy\, dz.$$

On peut obtenir de la même façon deux autres expressions du volume

$$V = \int\int_S y\, dz\, dz = \int\int_S z\, dx\, dy.$$

204. *Formule de Stokes.* — Plaçons-nous dans les conditions suivantes : On a une surface S définie par une équation de la forme

$$z = f(x, y).$$

Elle se projette sur le plan des xy suivant un domaine A limité par un contour simple γ. Soit L le contour de S, qui se projette suivant γ. Nous dirons que S *est limité par* L. Considérons l'intégrale curviligne

$$I = \int_L P(x, y, z)\, dx.$$

On suppose le sens du parcours sur L choisi de telle sorte que la projection du mobile qui parcourt L dans ce sens parcoure γ dans le sens positif. D'après cela, on peut écrire

$$I = \int_\gamma P[x, y, f(x, y)]\, dx = \int_\gamma P_1(x, y)\, dx$$

en posant

$$P[x, y, f(x, y)] = P_1(x, y).$$

Appliquons la formule de Green à l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma P_1(x, y)\, dx.$$

On a

$$I = \int_\gamma P_1\, dx = -\int\int_A \frac{\partial P_1}{\partial y}\, dx\, dy.$$

Évaluons $\frac{\partial P_1}{\partial y}$. On a

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

d'où, en portant cette valeur dans l'intégrale double,

$$I = -\int\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Cette intégrale double peut se mettre sous la forme d'une intégrale de surface attachée à S. Remplaçons $dx\,dy$ par $\cos\gamma\, d\sigma$, ce qui revient à considérer la demi-normale faisant un angle aigu avec Oz, c'est-à-dire à prendre l'intégrale sur la face supérieure de S. On a

$$I = -\int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cos\gamma\, d\sigma.$$

Séparons l'intégrale en deux parties et remarquons que l'on a

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\cos\beta}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\cos\gamma}{-1},$$

de sorte que $\frac{\partial z}{\partial y}\cos\gamma$, qui entre dans l'intégrale précédente, peut se remplacer par $-\cos\beta$, ce qui nous donne

$$I = \int\int_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) d\sigma.$$

Remarquons que cette formule subsiste, si l'on change en même temps la face de S considérée et le sens de parcours sur L, puisque les deux membres changent tous deux de signe.

On peut, une fois pour toutes, établir une correspondance entre une des faces de S et un des sens de parcours sur L. Une face de S étant choisie, appelons *sens direct* sur L, correspondant à la face

choisie, le sens tel que, si l'on mène la demi-normale à cette face en un point M voisin du contour, un observateur dirigé suivant cette demi-normale voie le mobile, décrivant le contour dans le voisinage de M, tourner dans le sens positif.

Cette condition a été réalisée dans le cas précédent; la formule est valable quelle que soit la face de S, pourvu que le sens de parcours sur L corresponde à cette face d'après la loi indiquée.

Le résultat s'étend à une surface décomposable en morceaux dont chacun remplit les conditions analogues par rapport à des axes convenablement choisis. Enfin, en permutant x, y, z et en ajoutant membre à membre les relations obtenues, on a la formule générale suivante

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$
$$= \int\int_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] d\sigma,$$

la face de S et le sens de parcours sur L se correspondant de la façon indiquée. C'est la formule générale de Stokes.

Dans le cas particulier où P, Q, R sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une même fonction $F(x, y, z)$ bien déterminée dans une région contenant S, on voit que les deux membres sont nuls. En effet, l'expression $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ est la différentielle totale de F; on en déduit, comme au n° 201, que l'intégrale curviligne de cette expression le long du contour fermé L est nulle. D'autre part, les trois expressions $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\cdots$ sont nulles.

FIN DU TOME I.

39584 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

39584 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.

COURS D'ANALYSE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE

PAR

RENÉ BAIRE,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

TOME II.

VARIABLES COMPLEXES. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
40731 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS D'ANALYSE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE

PAR

René BAIRE,

PROFESSEUR A LA FACULTE DES SCIENCES DE DIJON.

TOME II.

VARIABLES COMPLEXES. — APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1908

PRÉFACE.

Cette deuxième Partie de mon Cours a été écrite dans le même esprit que la première. Laissant de côté les détails accessoires, je me suis proposé de mettre le lecteur en possession des faits mathématiques vraiment essentiels, et j'ai cherché à les relier entre eux par des méthodes aussi directes que possible. C'est dire que, dans ce Volume comme dans le précédent, la question de l'ordonnance des matières m'a préoccupé tout autant que le choix des matières elles-mêmes. Tout se tient en Mathématiques, peut-on dire; c'est une raison de plus pour rechercher si tel groupement de faits n'est pas plus conforme à la nature des choses que tel autre, justifié seulement par des habitudes acquises. Il est certain, par exemple, que la division surannée de l'Analyse en Calcul différentiel et Calcul intégral n'a plus aucune raison d'être. Par contre, on n'insistera jamais assez sur la distinction fondamentale qui existe entre l'Analyse des variables réelles et l'Analyse des variables complexes. Ce sont là presque deux sciences distinctes, qui, bien entendu, se prêtent un mutuel appui, appui d'ailleurs d'autant plus efficace qu'on aura mieux insisté sur la différence des points de départ.

Le Chapitre IV, par lequel s'ouvre le présent Volume, est précisément consacré aux fonctions analytiques. Ici surtout, les idées que je viens d'exposer d'une manière générale prennent une importance particulière. Il est généralement admis qu'on doit, dans l'exposition de cette partie de la Science, se placer au point de vue, soit de l'un, soit de l'autre des fondateurs de la théorie, ce qui conduit à reprendre les mêmes résultats par trois

ou quatre procédés distincts. Il me semble qu'on peut avantageusement modifier cette méthode. Un cours d'Analyse n'est pas un cours d'histoire de l'Analyse; le fait d'éviter systématiquement de mélanger les théories de divers auteurs, sans doute pour mieux respecter leur œuvre, me paraît provenir d'un scrupule traditionnaliste que je ne partage pas. A coup sûr, il est intéressant de savoir que, à telle époque, tel géomètre est arrivé à construire tout un corps de doctrines, indépendamment des travaux de ses contemporains. Mais, à mon avis, le meilleur hommage à rendre à nos devanciers est encore de continuer leur œuvre; c'est pourquoi j'estime que nous devons aujourd'hui chercher à opérer, non plus une simple juxtaposition, mais une véritable synthèse entre les diverses méthodes qu'ils nous ont léguées, de manière à en construire une nouvelle, qui participe des avantages de toutes les autres.

C'est en partant de ces idées que j'ai cherché à utiliser en même temps la notion d'intégrale de variables complexes et la notion de série entière. D'ailleurs, le résultat le plus essentiel de la théorie des fonctions analytiques réside précisément dans ce fait qu'une fonction qui a la propriété d'avoir une dérivée est par cela même représentable par une série entière. C'est donc la préparation et la démonstration de ce théorème fondamental qui font l'objet des premiers paragraphes du Chapitre. Une fois cette identité établie, on se trouve en possession des avantages de l'une et l'autre méthode, puisque, dès qu'on peut, par un moyen quelconque, montrer qu'une fonction satisfait aux conditions d'holomorphie, il en résulte que son développement taylorien est applicable, ce qui permet de l'utiliser dans les calculs. Ce même théorème fondamental, établi d'abord pour le cas d'une variable, est étendu plus loin au cas de plusieurs, au moyen d'une transformation très simple, qui ne nécessite pas l'emploi des intégrales multiples de variables complexes.

En ce qui concerne le choix des démonstrations, je ferai remarquer qu'il n'y a aucune raison plausible, sous prétexte qu'on est dans le domaine complexe, pour s'interdire de revenir à la décomposition en parties réelle et imaginaire; en fait, ce retour aux variables réelles fournit des démonstrations très

simples et très naturelles de plusieurs résultats fondamentaux, en particulier de ceux qui sont des extensions de théorèmes relatifs aux fonctions réelles, tels que, par exemple, le principe des fonctions composées, celui de la dérivation des intégrales par rapport à des paramètres, etc.

C'est dans ce même Chapitre que je traite la théorie des séries de fonctions. Bien qu'à mon avis l'introduction de termes nouveaux ne doive se faire qu'avec une extrême prudence, il m'a paru indispensable de caractériser par une locution brève le cas le plus simple et de beaucoup le plus courant des séries uniformément convergentes, celui des séries dont les termes sont moindres en module que des nombres positifs formant série convergente (ce qu'on appelle quelquefois *critère de Weierstrass*). J'appelle ces séries *normalement* convergentes, et j'espère qu'on voudra bien excuser cette innovation. Un grand nombre de démonstrations, soit dans la théorie des séries, soit plus loin dans la théorie des produits infinis, sont considérablement simplifiées quand on met en avant cette notion, beaucoup plus maniable que la propriété de convergence uniforme.

Dans le Chapitre V, consacré aux équations différentielles et aux équations aux dérivées partielles, je me suis contenté d'exposer les fondements de la théorie, en m'attachant surtout à faire connaître les cas, en petit nombre, où l'intégration peut être effectuée. J'ai tenu à indiquer, par un exemple classique emprunté à la Physique, comment les équations aux dérivées partielles interviennent le plus souvent dans les applications, quel rôle essentiel jouent les hypothèses complémentaires, et comment on doit en faire usage pour la résolution des problèmes posés.

Le Chapitre VI contient les applications géométriques. J'y expose les propriétés les plus importantes de la théorie des courbes et des surfaces, de manière à préparer le lecteur à une étude plus approfondie de la Géométrie supérieure. Dans l'étude des surfaces, j'ai donné le plus souvent la préférence aux démonstrations qui utilisent les coordonnées curvilignes générales, à cause des avantages de symétrie qu'elles présentent, mais j'ai également mis à profit l'étude du cas où l'équation est résolue

par rapport à une des coordonnées, cette seconde méthode se prêtant mieux à l'établissement de certains théorèmes.

Enfin, voulant donner au moins une application des théories générales exposées dans l'Ouvrage, j'ai, dans un dernier Chapitre, exposé les principes essentiels de la théorie des fonctions elliptiques.

M. Cousson a continué de m'apporter son concours le plus dévoué pour la rédaction et la mise au point de ce second Volume. M. Denjoy, agrégé de Mathématiques, a bien voulu aussi m'assister dans le travail de revision des épreuves. Je leur en adresse ici mes plus affectueux remercîments. Enfin, si tout le monde sait combien est précieuse à un auteur scientifique la collaboration de M. Gauthier-Villars, il convient de dire que la chose apparaît mieux encore peut-être lorsqu'il s'agit d'un Livre destiné à l'enseignement, où tous les détails de l'exécution doivent concourir au but à atteindre.

Dijon, le 10 avril 1908.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

Pages.

CHAPITRE IV.

FONCTIONS ANALYTIQUES.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

CHAPITRE VII.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

ERRATA.

Tome I.

Page 145, note : ligne 1, *supprimer* positives.
» » ligne 3, *lire* le rapport ... est inférieur *en module* à 1.
» » ligne 4, *lire* ... par des nombres inférieurs *en module* à 1.

Tome II.

Page 28, avant le dernier alinéa, *ajouter :* La série T a pour somme S.Σ, limite de $S_n.\Sigma_n$.

Page 212, n° 418, *remplacer* la formule donnant R_1^2 par

$$R_1^2 = \frac{ds_1^2}{\left[d\left(\frac{dx}{ds_1}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{dy}{ds_1}\right)\right]^2} = \frac{ds_1^2}{(1+k^2)(d\alpha^2 + d\beta^2)},$$

d'où

$$\frac{R}{R_1} = 1 + k^2.$$

Page 226, n° 432, dernière ligne, *au lieu de* c'est une parabole, *lire* l'indicatrice est parabolique.

LEÇONS

SUR LES

THÉORIES GÉNÉRALES

DE

L'ANALYSE.

CHAPITRE IV.

FONCTIONS ANALYTIQUES.

I. — Nombres complexes.

205. Les nombres *complexes* ou *imaginaires* s'introduisent en Algèbre à propos de l'étude des équations algébriques de degré supérieur à 1. Par définition, un nombre complexe z est une expression de la forme $a + bi$, a et b étant des nombres réels.

On définit les quatre opérations arithmétiques élémentaires sur ces nombres de la façon suivante. L'addition, la soustraction, la multiplication sont définies par des conventions qui peuvent se résumer ainsi : Un polynome par rapport à des nombres complexes

$$z = a + bi, \qquad z' = a' + b'i, \qquad \ldots$$

est le nombre complexe obtenu en effectuant sur ces nombres les calculs indiqués, suivant les règles ordinaires du calcul algébrique, et remplaçant dans le résultat i^2 par -1.

Cette convention peut être remplacée par la suivante : On considère comme *équivalents* deux polynomes en i de la forme

$$A_0 + A_1 i + A_2 i^2 + \ldots, \qquad B_0 + B_1 i + B_2 i^2 + \ldots,$$

les nombres A et B étant réels, si les restes de la division de ces deux polynomes par i^2+1, qui sont du premier degré en i, sont identiques. En effet, les puissances de i :

$$(1) \qquad i^{4n}, \quad i^{4n+1}, \quad i^{4n+2}, \quad i^{4n+3},$$

où n est un entier positif ou nul, sont, au sens précédent, équivalentes respectivement à

$$(2) \qquad 1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

On en déduit que le polynome $A_0 + A_1 i + \ldots$ est équivalent au nombre complexe obtenu en y remplaçant les expressions (1) par les expressions (2) correspondantes : cela revient à remplacer i^2 par -1 dans ce polynome.

La seconde forme donnée à la convention montre que les lois du calcul algébrique relatives à l'addition, la soustraction, la multiplication s'appliquent aux nombres complexes.

206. Deux nombres complexes $a+bi$, $a'+b'i$ sont dits *égaux* s'ils sont équivalents, c'est-à-dire si l'on a à la fois $a=a'$, $b=b'$.

Un nombre complexe $a+bi$ est *nul* s'il est équivalent à zéro, c'est-à-dire si l'on a $a=0$, $b=0$.

Deux nombres $a+bi$, $a'+b'i$ sont dits *opposés* ou égaux et de signes contraires si leur somme est nulle, c'est-à-dire si $a'=-a$, $b'=-b$.

Quand, dans un nombre complexe $a+bi$, on a $b=0$, on dit que le nombre complexe se réduit à sa partie réelle. Si l'on a $a=0$, on dit que le nombre est imaginaire pur.

Deux nombres complexes sont dits *conjugués* s'ils ont même partie réelle et pour coefficients de i deux nombres opposés.

207. Étant donnés deux nombres complexes $z=a+bi$ et $z'=a'+b'i$, cherchons un nombre complexe $c+di$ qui, multiplié par z', reproduise z. On doit avoir, d'après la règle de multiplication,

$$a'c - b'd = a, \qquad b'c + a'd = b.$$

Ce sont deux équations linéaires en c et d. Le déterminant des coefficients des inconnues est $a'^2+b'^2$, qui est différent de zéro dès que z' l'est ; c et d sont donc déterminés par ces équations ; *il existe*

un nombre $c + di$ et un seul vérifiant la condition requise : c'est le *quotient* de z par z'.

Si z est différent de zéro et z' nul, il n'y a pas de nombre complexe qui, multiplié par z', reproduise z.

En effectuant sur des nombres complexes les quatre opérations arithmétiques, on obtient des *fractions rationnelles*.

208. On appelle *module* d'un nombre complexe $z = a + bi$ la quantité positive ou nulle $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. On reconnaît que, pour qu'un nombre complexe soit nul, il faut et il suffit que son module soit nul. Nous désignerons par $|z|$ le module de z.

On démontre que :

1° Le module de la somme algébrique de plusieurs nombres complexes est inférieur ou égal à la somme des modules.

2° Le module de la différence de deux nombres complexes est supérieur ou égal à la différence des modules.

3° Le module d'un produit est égal au produit des modules.

4° Le module d'un quotient est égal au quotient du module du dividende par le module du diviseur.

D'après la Trigonométrie, on sait qu'étant donnés deux nombres a et b, il y a un angle φ, déterminé à un multiple de 2π près, tel que l'on a

$$a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\varphi, \qquad b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\varphi.$$

L'angle φ ainsi déterminé est dit l'*argument* du nombre complexe $a + bi$.

Le produit de plusieurs nombres complexes a pour argument la somme des arguments des différents facteurs.

209. On représente géométriquement les nombres complexes en considérant dans le plan deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy. Au nombre $a + bi$ on fait correspondre le point M d'abscisse a et d'ordonnée b.

Le module du nombre $a + bi$ a pour valeur la longueur OM, et son argument est l'angle, défini à un multiple de 2π près, de OM avec Ox.

210. *Notion de limite.* — Un nombre complexe $z_n = a_n + ib_n$, variable avec l'entier n, a pour limite $z = a + ib$ si l'on a simultanément $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$.

Cela revient à dire que le module de la différence $(z_n - z)$ doit tendre vers zéro.

En effet, on a

$$z_n - z = a_n - a + i(b_n - b),$$

d'où

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2}.$$

Pour que $|z_n - z|$ tende vers zéro, il faut et il suffit que $(a_n - a)$ et $(b_n - b)$ tendent vers zéro.

Le théorème de Cauchy sur les limites (t. I, n° 22, p. 15) s'applique aux nombres complexes et s'énonce ainsi : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de nombres complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ ait une limite est qu'à tout nombre positif ε corresponde un entier p tel que les conditions $\mu > p$, $\nu > p$ entraînent $|z_\mu - z_\nu| < \varepsilon$.*

En effet, en posant $z_n = a_n + ib_n$, la condition $|z_\mu - z_\nu| < \varepsilon$ s'écrit

$$|(a_\mu - a_\nu) + i(b_\mu - b_\nu)| < \varepsilon.$$

Cette condition, supposée remplie, entraîne

$$(1) \qquad |a_\mu - a_\nu| < \varepsilon, \qquad |b_\mu - b_\nu| < \varepsilon.$$

Donc a_n et b_n tendent vers des limites a et b; par conséquent, z_n tend vers $a + bi$.

Réciproquement, si z_n a une limite $a + bi$, on a

$$\lim a_n = a, \qquad \lim b_n = b.$$

Quand μ et ν dépassent une certaine valeur, les conditions (1) sont vérifiées; il en résulte

$$|z_\mu - z_\nu| < 2\varepsilon,$$

ce qui montre que la condition du théorème de Cauchy est vérifiée.

II. — Fonctions de variables complexes.

211. Soit $z = x + iy$ une variable complexe. On est conduit à considérer comme fonction de z tout nombre complexe u de la forme suivante :

$$u = P(x, y) + i\,Q(x, y),$$

P et Q étant deux fonctions réelles de x, y.

Supposons que P et Q soient fonctions *continues* de x, y dans un

certain domaine D du plan des x, y. Si z prend une suite de valeurs $x_n + iy_n$ tendant vers une valeur fixe $x + iy$, les nombres $P(x_n, y_n)$, $Q(x_n, y_n)$ tendent vers $P(x, y)$, $Q(x, y)$, de sorte que $u(z_n)$ tend vers $u(z)$. On exprime ce fait en disant que u est fonction *continue* de z.

Cela posé, donnons à z deux valeurs différentes $z = x + iy$, $z + \Delta z = x + \Delta x + i(y + \Delta y)$.

Soient u et $u + \Delta u$ les valeurs correspondantes de la fonction. On a $\Delta u = \Delta P + i\,\Delta Q$ et, par suite,

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta P + i\,\Delta Q}{\Delta x + i\,\Delta y}.$$

Introduisons l'hypothèse que P *et* Q *ont, par rapport à* x *et* y, *des dérivées partielles du premier ordre continues dans le domaine* D, et cherchons dans quelles conditions il y a, pour le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$, une limite déterminée quand Δx et Δy tendent vers zéro d'une manière quelconque.

Considérons d'abord deux cas particuliers :

1° Si $\Delta y = 0$, c'est-à-dire si x varie seul, on a, quand Δx tend vers zéro,

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim \frac{\Delta P + i\,\Delta Q}{\Delta x} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

2° Si $\Delta x = 0$, c'est-à-dire si y varie seul, on a, quand Δy tend vers zéro,

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim \frac{\Delta P + i\,\Delta Q}{i\,\Delta y} = -i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Une première condition pour que le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tende vers une limite déterminée, quand Δx et Δy tendent vers zéro d'une façon quelconque, est que les deux nombres complexes $\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}$, $-i\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Je dis que ces conditions sont suffisantes. En effet, supposons-les remplies. Δx et Δy étant quelconques, on a, d'après la formule des

accroissements finis,

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial x}(x + \theta\,\Delta x,\ y + \theta\,\Delta y)\,\Delta x + \frac{\partial P}{\partial y}(x + \theta\,\Delta x,\ y + \theta\,\Delta y)\,\Delta y,$$
$$\Delta Q = \frac{\partial Q}{\partial x}(x + \theta'\,\Delta x,\ y + \theta'\,\Delta y)\,\Delta x + \frac{\partial Q}{\partial y}(x + \theta'\,\Delta x,\ y + \theta'\,\Delta y)\,\Delta y,$$

θ et θ' étant compris entre o et 1.

Les valeurs des dérivées qui entrent dans ces formules peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \varepsilon_1, \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \varepsilon_2,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) + \varepsilon_3, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + \varepsilon_4,$$

et par suite de la continuité de ces quatre dérivées partielles, étant donné un nombre positif ε, il est possible de trouver un nombre positif α tel que, dès que l'on a

$$|\Delta x| < \alpha, \qquad |\Delta y| < \alpha,$$

les quatre nombres ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 soient en module inférieurs à ε. Cela étant, on a $\Delta u = \Delta P + i\,\Delta Q$, c'est-à-dire

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta u = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)\Delta x + \left(\dfrac{\partial P}{\partial y} + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)\Delta y \\ \qquad + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y + i(\varepsilon_3\,\Delta x + \varepsilon_4\,\Delta y). \end{cases}$$

D'après les relations (1), on peut remplacer $\dfrac{\partial P}{\partial y} + i\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ par $i\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$. Les deux premiers termes de Δu deviennent

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(\Delta x + i\,\Delta y),$$

de sorte qu'en divisant par Δz les deux membres de (2) on a

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta z} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta z} + i\varepsilon_3\frac{\Delta x}{\Delta z} + i\varepsilon_4\frac{\Delta y}{\Delta z}.$$

Les rapports $\dfrac{\Delta x}{\Delta z}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta z}$ sont au plus égaux en module à 1; si Δx et Δy tendent vers zéro d'une manière quelconque, les nombres ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 tendent vers zéro. On a, dans ces conditions,

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On exprime ce résultat en disant qu'il y a pour u *une dérivée par rapport à* z et que u est *holomorphe par rapport à* z *au point considéré*. On désigne cette dérivée par u'_z.

On appelle *différentielle* de u et l'on désigne par du le produit de la dérivée u'_z par l'accroissement Δz de la variable. En considérant z lui-même comme fonction de z, on est conduit à écrire $dz = \Delta z$.

On modifie alors la notation précédente et l'on pose

$$du = u'_z\, dz$$

avec

$$dz = dx + i\, dy.$$

On déduit de là une nouvelle manière d'écrire la dérivée u'_z:

$$u'_z = \frac{du}{dz}.$$

212. Nous appellerons *fonction holomorphe* de z, dans un domaine D, toute fonction continue par rapport à z et ayant une dérivée déterminée en tout point du domaine D. Les conditions (1) seront appelées *conditions d'holomorphie*.

On est certain qu'une fonction $f(z)$ est holomorphe si l'on peut d'une manière quelconque montrer que le rapport $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ tend vers une limite déterminée quand h tend vers zéro.

Par exemple, z^m, m étant entier et positif, est fonction holomorphe dans tout le plan, car, d'après la théorie de la division, on a

$$\frac{(z+h)^m - z^m}{h} = m z^{m-1} + h\, \varphi(z, h),$$

$\varphi(z, h)$ étant un polynome. En vertu des propriétés des polynomes, on vérifie directement que le module de φ est borné dans tout domaine borné et l'on en déduit que le premier membre a pour limite, quand h tend vers zéro, l'expression $m z^{m-1}$.

213. *Fonctions de plusieurs variables complexes.* — Soient plusieurs variables complexes $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, ...; on dit que le nombre complexe

$$u = \mathrm{P}(x, y, x', y', \ldots) + i\, \mathrm{Q}(x, y, x', y', \ldots)$$

est *fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des variables* z, z', ... *quand ces variables sont respectivement dans des domaines*

D, D', ... *de leurs plans* si P et Q sont des fonctions continues par rapport à l'ensemble des variables réelles $x, y, x', y', \ldots$ admettant des dérivées partielles du premier ordre, elles-mêmes continues, et si u admet une dérivée par rapport à chacune des variables complexes $z, z', \ldots$.

Il faut et il suffit pour cela qu'on ait l'ensemble des conditions

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x'} = \frac{\partial Q}{\partial y'}, \qquad \ldots,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y'} = -\frac{\partial Q}{\partial x'}, \qquad \ldots.$$

Les dérivées de u se représentent par $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z'}, \ldots$.

214. *Fonctions composées.* — Soit $u = F(z, z', \ldots)$ une fonction holomorphe des variables complexes $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, ... quand $z, z', \ldots$ sont dans certaines régions de leurs plans.

Supposons que $z, z', \ldots$, au lieu d'être variables indépendantes, soient fonctions holomorphes de nouvelles variables complexes

$$t = \theta + i\tau, \qquad t_1 = \theta_1 + i\tau_1, \qquad \ldots;$$

u peut être considérée comme fonction de $t, t_1, \ldots$ par l'intermédiaire de $z, z', \ldots$. On dit que c'est une *fonction composée* de t, $t_1, \ldots$. Je dis que *u est fonction holomorphe par rapport à $t, t_1, \ldots$*.

En effet, posons $u = P(x, y, \ldots) + iQ(x, y, \ldots)$.

Lorsqu'on remplace $z, z', \ldots$ par leurs valeurs en fonction de t, $t_1, \ldots$, P et Q deviennent des fonctions composées des variables réelles $\theta, \tau, \theta_1, \tau_1, \ldots$. Formons les dérivées de ces fonctions par rapport à θ et τ par exemple. On a

$$\frac{\partial P}{\partial \theta} = \sum\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right), \qquad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right),$$
$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \sum\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}\right), \qquad \frac{\partial Q}{\partial \tau} = \sum\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}\right),$$

les signes $\sum$ s'appliquant aux différents couples de variables (x, y), (x', y'), ...

Comme u est fonction holomorphe de z, on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

De même, z étant fonction holomorphe de t, on a

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial y}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \tau} = -\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Par suite de ces relations, on constate qu'il y a identité entre $\frac{\partial P}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial Q}{\partial \tau}$, ainsi qu'entre $\frac{\partial P}{\partial \tau}$ et $-\frac{\partial Q}{\partial \theta}\cdot$ Donc u a, par rapport à la variable complexe $t = \theta + i\tau$, une dérivée déterminée, à savoir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial \theta} + i\frac{\partial Q}{\partial \theta} = \sum \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial \theta} + i\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = \sum \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}.$$

Ainsi, u est fonction holomorphe par rapport à l'ensemble des variables t, t_1, t_2, ..., et ses dérivées par rapport à chacune de ces variables sont données par la règle habituelle des fonctions composées.

215. Comme cas particulier, on voit que la somme, le produit et le quotient de deux fonctions holomorphes sont des fonctions holomorphes dont les dérivées s'obtiennent par les règles applicables aux fonctions de quantités réelles.

Un *polynome* par rapport à plusieurs variables z, z', ... est fonction *holomorphe* de ces variables, chacune d'elles étant arbitraire dans son plan.

Considérons la fonction d'une seule variable $u = \frac{1}{z}\cdot$ Elle est holomorphe dans tout le domaine D obtenu en supprimant du plan des z un cercle de centre O. C'est en effet le quotient des deux fonctions holomorphes 1 et z, et z est différent de zéro dans D.

Une *fonction rationnelle* de plusieurs variables complexes, c'est-à-dire une fonction égale au quotient de deux polynomes, est holomorphe si les variables z, z', ... sont assujetties à rester dans des domaines D, D', ... de leurs plans respectifs choisis de telle façon que le dénominateur de la fraction ne soit jamais nul.

216. *Fonctions implicites.* — Considérons une équation de la forme

$$F(z, z', \ldots) = 0. \tag{1}$$

F étant fonction holomorphe des variables z, z', ... quand ces variables sont dans certains domaines D, D', ... de leurs plans respectifs. Soient z_0, z'_0, ... un système de valeurs de z, z', ... intérieures à D, D', ... Comme dans le cas des variables réelles, nous appellerons *point* un tel système de valeurs. Supposons que l'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, z'_0, \ldots) \neq 0.$$

Je dis que, dans ces conditions, on peut, au voisinage du point $(z_0, z'_0, \ldots)$, résoudre l'équation (1) par rapport à z, c'est-à-dire trouver pour z une fonction holomorphe des variables z', z'', ... quand z', z'', ... seront dans certains domaines contenant z'_0, z''_0, ..., cette fonction satisfaisant à l'équation (1) et se réduisant à z_0 quand z', z'', ... se réduisent à z'_0, z''_0, ...

Soient $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, ..., $F = P + iQ$.

Résoudre l'équation (1) revient à résoudre par rapport à x, y le système

$$(2) \qquad \begin{cases} P(x, y, x', y', \ldots) = 0, \\ Q(x, y, x', y', \ldots) = 0. \end{cases}$$

D'après la théorie des fonctions implicites de variables réelles (t. I, p. 104), il faut étudier le déterminant fonctionnel de P et Q par rapport à x, y, c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

En vertu des relations d'holomorphie, il est égal à

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2;$$

or, on a

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x},$$

et cette dérivée est différente de zéro au point $(z_0, z'_0, z''_0, \ldots)$; il en résulte que $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ne sont pas tous deux nuls en ce point. Donc le déterminant fonctionnel précédent est différent de zéro pour le système de valeurs $(x_0, y_0, x'_0, y'_0, \ldots)$. Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème des fonctions implicites. Des équations (2), on peut tirer pour x, y deux fonctions continues des

autres variables $x', y', x'', y'', \ldots$, définies dans certains intervalles de variation

$$|x'-x'_0| \leq \alpha, \qquad |y'-y'_0| \leq \alpha, \qquad |x''-x''_0| \leq \alpha, \qquad \ldots,$$

ces fonctions se réduisant à x_0, y_0 quand $x', y', x'', \ldots$ se réduisent à $x'_0, y'_0, x''_0, \ldots$.

En revenant aux variables complexes, on voit que z est fonction déterminée de $z', z'', \ldots$ et se réduit à z_0 quand $z', z'', \ldots$ se réduisent à $z'_0, z''_0, \ldots$.

Je dis que cette fonction z a des dérivées partielles par rapport à $z', z'', \ldots$. Montrons-le par exemple pour z'. On a, en différentiant les équations (2),

$$\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial x'}dx' + \ldots = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial x'}dx' + \ldots = 0.$$

Multiplions les deux membres de la seconde équation par i et ajoutons. On a, en tenant compte des relations d'holomorphie,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(dx + i\,dy) + \ldots = 0$$

ou

(3) $$\frac{\partial F}{\partial z}(dx + i\,dy) + \frac{\partial F}{\partial z'}(dx' + i\,dy') + \ldots = 0.$$

Supposons que les variables indépendantes $z', z'', \ldots$ reçoivent des valeurs fixes, sauf z'. L'équation (3) montre que, dans ces conditions, $\frac{dx + i\,dy}{dx' + i\,dy'}$ a une limite déterminée quand $dx' + i\,dy'$ tend vers zéro. Donc z a par rapport à z' une dérivée donnée par la formule

$$\frac{\partial z}{\partial z'} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial z'}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

C'est la même règle que pour les variables réelles.

Ainsi z *est fonction holomorphe* de $z', z'', \ldots$.

217. Supposons maintenant qu'on ait n équations de la forme

(1) $$\begin{cases} F_1(z, z', \ldots, u, u', u'', \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_n(z, z', \ldots, u, u', u'', \ldots) = 0. \end{cases}$$

les variables u étant au nombre de n et les F étant fonctions holomorphes des variables complexes z et u dans certains domaines. Soit $z_0, z'_0, \ldots, u_0, u'_0, \ldots$ un système de valeurs des variables vérifiant ces équations. Supposons que le déterminant fonctionnel des F par rapport aux u soit différent de zéro pour ce point, soit

$$(2) \qquad \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u, u', u'', \ldots)} \neq 0.$$

Je dis que l'on peut trouver pour $u, u', u'', \ldots$ un système de fonctions holomorphes de $z, z', z'', \ldots$ au voisinage du point $(z_0, z'_0, z''_0, \ldots)$, satisfaisant aux équations (1) et se réduisant pour $z_0, z'_0, z''_0, \ldots$ à $u_0, u'_0, u''_0, \ldots$. Le théorème est démontré pour $n = 1$. Admettons-le pour $n - 1$ et démontrons-le pour n.

D'après (2), l'un au moins des mineurs d'ordre $(n - 1)$ du déterminant fonctionnel des F par rapport aux u est différent de zéro pour le point considéré. On peut supposer que c'est

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(u', u'', \ldots)}.$$

On peut résoudre les $(n - 1)$ premières équations (1) par rapport à $u', u'', \ldots$ et exprimer ces $(n - 1)$ variables par des fonctions holomorphes de $z, z', z'', \ldots$ et u. Soient par exemple

$$(3) \qquad u' = \varphi'(z, z', \ldots, u), \qquad u'' = \varphi''(z, z', \ldots, u), \qquad \ldots.$$

Portons ces expressions de $u', u'', \ldots$ dans la fonction F_n, et soit $\Phi(z, z', \ldots, u)$ la fonction obtenue. Φ est fonction holomorphe et l'on a (*cf.* t. I, p. 106)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(u, u', u'', \ldots)} : \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(u', u'', \ldots)}.$$

Donc, pour le point $(z_0, z'_0, \ldots, u_0, u'_0, \ldots)$, on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u} \neq 0.$$

On peut donc résoudre l'équation

$$(4) \qquad \Phi(z, z', \ldots, u) = 0$$

par rapport à u, c'est-à-dire trouver pour u une fonction holomorphe de $z, z', z'', \ldots$ au voisinage du point $(z_0, z'_0, z''_0, \ldots)$, satisfaisant à l'équation (4) et se réduisant à u_0 quand $z, z', z'', \ldots$ se

réduisent à z_0, z'_0, z''_0, ... En remplaçant u par cette fonction dans les équations (3), on obtient pour u, u', u'', ... des fonctions holomorphes de z, z', z'', ..., vérifiant les équations (1).

On voit que le système (1) est résolu par rapport aux u, la proposition ayant le même sens que pour les fonctions de variables réelles, en remplaçant la condition pour une fonction d'être continue et pourvue de dérivées par la condition d'être holomorphe dans un certain domaine.

218. *Fonctions inverses.* — En particulier, soit une fonction holomorphe de z

$$u = f(z).$$

Considérons cette relation comme une équation en z; pour la résoudre par rapport à z, posons $F(z) = f(z) - u$; il s'agit de résoudre l'équation

$$F(z) = 0.$$

On pourra le faire au voisinage de tout point z_0, pour lequel $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. Mais $\frac{\partial F}{\partial z}$ n'est autre que $\frac{\partial f}{\partial z}\cdot$ Donc, au voisinage de tout point z_0 tel que $\frac{\partial f}{\partial z_0} \neq 0$, on peut considérer z comme fonction déterminée et holomorphe de u. On dit que c'est la *fonction inverse* de f; soit

$$z = \varphi(u)$$

cette fonction. On constate, en dérivant par rapport à z, que l'on a

$$\varphi'(u) = \frac{1}{f'(z)}\cdot$$

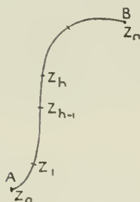
219. De même que pour les variables réelles, on peut définir les fonctions *dépendantes* et *indépendantes* de variables complexes, et l'on peut établir pour ces fonctions les résultats obtenus pour les fonctions dépendantes et indépendantes de variables réelles (*cf.* t. I, p. 108-112).

III. — Intégrales de variables complexes.

220. Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction holomorphe de z dans un domaine D. Considérons un arc de courbe L allant de A à B, et ayant en chaque point une tangente (*fig.* 18) : marquons sur cet arc,

en allant par exemple de A à B, des points intermédiaires correspondant aux valeurs $z_0, z_1, \ldots, z_h, \ldots, z_n$ de z, z_0 correspondant au point A, z_n au point B.

Fig. 18.



Posons $z_h = x_h + i y_h$. Prenons sur l'arc (z_{h-1}, z_h) un point arbitraire ζ_h et soit $\zeta_h = \xi_h + i\eta_h$. Formons la somme

$$(1) \qquad \sum_{h=1,\ldots,n} f(\zeta_h)(z_h - z_{h-1}),$$

ou, en mettant en évidence les parties réelle et imaginaire,

$$\sum [P(\xi_h, \eta_h)(x_h - x_{h-1}) - Q(\xi_h, \eta_h)(y_h - y_{h-1})]$$
$$+ i \sum [Q(\xi_h, \eta_h)(x_h - x_{h-1}) + P(\xi_h, \eta_h)(y_h - y_{h-1})].$$

Si l'on suppose que la loi de partage de l'arc AB varie de façon que la plus grande distance des points z_{h-1}, z_h tende vers zéro, cette somme tend, d'après la théorie des intégrales curvilignes, vers une limite déterminée qui est

$$\int_L P\,dx - Q\,dy + i \int_L Q\,dx + P\,dy.$$

Cette expression est ce que l'on obtiendrait si, dans l'intégrale $\int f(z)\,dz$, on remplaçait f par $P + iQ$, dz par $dx + i\,dy$. On convient de la représenter par

$$\int_L f(z)\,dz \quad \text{ou} \quad \int_{AB} f(z)\,dz,$$

et l'on dit que c'est *l'intégrale de la fonction de variable complexe $f(z)$ prise le long de l'arc* AB.

221. *Remarques.* — 1° On reconnaît, d'après cette définition,

que, si C est un point de l'arc AB, on a

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_{AC} f(z)\,dz + \int_{CB} f(z)\,dz.$$

Si une courbe est formée par la réunion bout à bout d'arcs remplissant les conditions requises, la courbe elle-même ne les remplissant pas, l'intégrale de $f(z)$ est, par définition, la somme des intégrales prises le long des arcs partiels.

2° Si l'on change le sens de parcours sur l'arc AB, on a

$$\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz.$$

3° Si L est un contour *fermé*, $\int_{L} f(z)\,dz$ est indépendante du point de départ, mais dépend du sens du parcours, et est multipliée par -1 si ce sens est changé.

4° *Si* M *est la borne supérieure du module de* $f(z)$ *sur l'arc* AB, *on a*

$$\left| \int_{L} f(z)\,dz \right| \leqq \text{M. longueur L}.$$

En effet, remarquons que la distance des deux points z_{h-1}, z_h est égale au module de la différence $z_h - z_{h-1}$. On a donc

$$|f(\zeta_h)(z_h - z_{h-1})| \leqq \text{M. distance}\, z_{h-1} z_h \leqq \text{M. arc}\, z_{h-1} z_h.$$

En donnant à h les valeurs successives $1, 2, \ldots, n$, et en ajoutant membre à membre les inégalités obtenues, on trouve

$$\left| \sum f(\zeta_h)(z_h - z_{h-1}) \right| \leqq \text{M. arc L}.$$

La somme (1) étant au plus égale en module à M. arc L, sa limite, qui est l'intégrale $\int_{L} f(z)\,dz$, satisfait à la même condition.

5° Supposons l'arc L défini par des équations de la forme

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

t étant un paramètre réel. Pour calculer $\int_{L} f(z)\,dz$ ou encore $\int_{L} P\,dx - Q\,dy + i\int_{L} Q\,dx + P\,dy$, on doit, dans chaque intégrale curviligne, exprimer P et Q en fonction de t et remplacer dx par

$\varphi'(t)\,dt$, dy par $\psi'(t)\,dt$. Cela revient à remplacer, dans $\int_L f(z)\,dz$, z par $\varphi + i\psi$ et dz par $(\varphi' + i\psi')\,dt$, puis à effectuer les calculs et séparer ensuite la partie réelle et le coefficient de i.

222. *Fonctions primitives.* — Soit un champ C dans lequel $f(z)$ est holomorphe. Les expressions

$$P\,dx - Q\,dy, \quad Q\,dx + P\,dy$$

sont des différentielles exactes (t. I, p. 138), en vertu des conditions

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Il existe donc des fonctions $P_1(x, y)$, $Q_1(x, y)$ telles qu'on a, dans C,

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{\partial Q_1}{\partial y} = P, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\frac{\partial P_1}{\partial y} = Q.$$

D'après ces relations, $P_1 + iQ_1$ est une fonction holomorphe de z dans C, soit $F(z)$, et l'on a

$$F'(z) = \frac{\partial P_1}{\partial x} + i\frac{\partial Q_1}{\partial x} = P + iQ = f(z).$$

D'autre part, d'après la théorie des intégrales curvilignes (t. I, p. 225), on a, en supposant l'arc AB contenu dans C, les points A et B étant $z_0 = x_0 + iy_0$, $z = x + iy$,

$$\int_{AB} P\,dx - Q\,dy = P_1(x, y) - P_1(x_0, y_0),$$

$$\int_{AB} Q\,dx + P\,dy = Q_1(x, y) - Q_1(x_0, y_0),$$

d'où résulte, par combinaison,

$$\int_{AB} f(z)\,dz = P_1(x, y) + i\,Q_1(x, y) - [P_1(x_0, y_0) + i\,Q_1(x_0, y_0)]$$
$$= F(z) - F(z_0).$$

L'intégrale du premier membre est prise sur un chemin quelconque joignant z_0 à z et contenu dans C. On la désigne aussi par $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$.

On dit que $F(z)$ est une *fonction primitive* de $f(z)$.

Deux fonctions primitives de $f(z)$ diffèrent par une constante, car leur différence Φ doit avoir pour dérivée zéro. Or, si $\Phi(z)$ a pour dérivée zéro, c'est que, en posant

$$\Phi = P + iQ,$$

on a

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0;$$

donc P et Q sont constants et, par suite, Φ l'est aussi.

Comme pour les variables réelles, nous désignerons par $\int f(z)\,dz$ une fonction primitive de $f(z)$, définie à une constante additive près.

223. *Dérivation par rapport à des paramètres.* — Considérons une fonction de plusieurs variables complexes $f(z, z', z'', \ldots)$ supposée holomorphe par rapport à ces variables lorsque $z, z', z'', \ldots$ sont dans certains domaines D, D', D'', ... de leurs plans respectifs.

Prenons l'intégrale de $f(z)$ par rapport à z le long d'un chemin L contenu dans le domaine D (L pouvant être un chemin fermé), soit

$$I = P_1 + iQ_1 = \int_L f(z, z', z'', \ldots)\,dz.$$

Les variables $z', z'', \ldots$ jouent le rôle de paramètres. Je dis que *cette intégrale est fonction holomorphe de $z', z'', \ldots$ et que ses dérivées s'obtiennent par la règle valable pour le cas des variables réelles.* Posons

$$z = x + iy, \qquad z' = x' + iy', \qquad \ldots, \qquad f = P + iQ;$$

on a

$$P_1 = \int_L P\,dx - Q\,dy, \qquad Q_1 = \int_L Q\,dx + P\,dy.$$

Dans P et Q figurent les paramètres réels $x', y', x'', y'', \ldots$. D'après la théorie des intégrales curvilignes (t. I, p. 216), P_1 et Q_1 sont fonctions continues de ces mêmes paramètres et ont des dérivées qui s'obtiennent en dérivant sous le signe $\int$.

On a, par exemple,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial x'} &= \int_L \frac{\partial P}{\partial x'}\,dx - \frac{\partial Q}{\partial x'}\,dy, & \frac{\partial Q_1}{\partial x'} &= \int_L \frac{\partial Q}{\partial x'}\,dx + \frac{\partial P}{\partial x'}\,dy,\\ \frac{\partial P_1}{\partial y'} &= \int_L \frac{\partial P}{\partial y'}\,dx - \frac{\partial Q}{\partial y'}\,dy, & \frac{\partial Q_1}{\partial y'} &= \int_L \frac{\partial Q}{\partial y'}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y'}\,dy.\end{aligned}\right.$$

On reconnaît que ces quatre dérivées partielles sont fonctions continues des variables qui y entrent. De plus, les relations d'holomorphie

$$\frac{\partial P}{\partial x'} = \frac{\partial Q}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y'} = -\frac{\partial Q}{\partial x'}$$

entraînent, d'après (1),

$$\frac{\partial P_1}{\partial x'} = \frac{\partial Q_1}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial y'} = -\frac{\partial Q_1}{\partial x'}.$$

Donc P_1 et Q_1 satisfont, par rapport aux différents couples de variables (x', y'), (x'', y''), ..., aux relations d'holomorphie. Par conséquent, le nombre I est une fonction F des variables z', z'', ... holomorphe par rapport à toutes ces variables. Calculons ses dérivées ; on a

$$\frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{\partial P_1}{\partial x'} + i\frac{\partial Q_1}{\partial x'} = \int_L \left(\frac{\partial P}{\partial x'} + i\frac{\partial Q}{\partial x'}\right)(dx + i\,dy) = \int_L \frac{\partial f}{\partial z'}\,dz.$$

Ainsi, *la dérivée de l'intégrale par rapport à z' s'obtient en remplaçant, sous le signe $\int$, la fonction f par $\frac{\partial f}{\partial z'}$.*

224. *Théorème de Cauchy.* — Soit A un domaine du plan des z dont la frontière est constituée par un contour simple C (*cf.* t. I, n° 197, p. 219); soit $f(z)$ une fonction holomorphe en tous les points de A, contour compris. Je dis qu'on a

(1) $$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

En effet, on a, si $f = P + iQ$,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C P\,dx - Q\,dy + i\int_C Q\,dx + P\,dy.$$

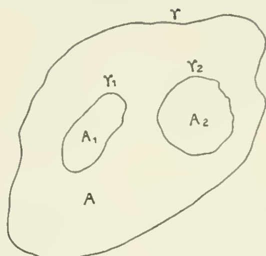
La formule de Green est applicable à chacune des intégrales curvilignes du second membre, et donne (t. I, n° 199, p. 223)

$$\int_C f(z)\,dz = -\int\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + i\int\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

En vertu des relations d'holomorphie, les éléments différentiels des intégrales doubles sont nuls, ce qui établit la relation (1).

225. *Cas d'un domaine limité par plusieurs contours simples* (*cf.* t. I, p. 223). — Soit A un domaine limité par un contour simple γ; on retranche de A un ou plusieurs domaines A_1, A_2, ... contenus dans A, extérieurs l'un à l'autre, et limités respectivement par les contours simples γ_1, γ_2, ... (*fig.* 19); soit B la région res-

Fig. 19.



tante. Soit $f(z) = P + iQ$ une fonction holomorphe dans B et sur les contours γ, γ_1, γ_2, ...

Par application de la formule de Green (t. I, p. 224), on peut écrire

$$-\int\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_\gamma P\, dx - Q\, dy + \int_{\gamma_1} P\, dx - Q\, dy + \ldots,$$

$$\int\int_B \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_\gamma Q\, dx + P\, dy + \int_{\gamma_1} Q\, dx + P\, dy + \ldots,$$

les intégrales curvilignes étant prises dans le *sens positif par rapport à* B sur γ, γ_1, γ_2, ...

Les premiers membres sont nuls en vertu des relations d'holomorphie. Changeons le sens de parcours sur γ_1, γ_2, ... de façon que ces contours soient parcourus dans le sens positif par rapport à A_1, A_2, ...; nous avons les formules

$$\int_\gamma P\, dx - Q\, dy = \int_{\gamma_1} P\, dx - Q\, dy + \ldots,$$

$$\int_\gamma Q\, dx + P\, dy = \int_{\gamma_1} Q\, dx + P\, dy + \ldots.$$

Par combinaison de ces formules, on obtient la formule fondamentale suivante :

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\gamma_2} f(z)\, dz + \ldots,$$

les intégrales étant prises dans le sens positif sur tous les contours γ, γ_1, γ_2, ... C'est le théorème de Cauchy pour les contours complexes ([1]).

226. *Formule fondamentale de Cauchy.* — La fonction $\frac{1}{z-a}$ est holomorphe par rapport à z dans tout domaine qui ne contient pas le point a. Prenons un cercle C de centre a et de rayon r et évaluons l'intégrale $\int_C \frac{dz}{z-a}$.

En tout point M du cercle, on peut poser

$$z - a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

φ variant, par exemple, de 0 à 2π lorsque M décrit le cercle dans le sens positif. On déduit de là

$$dz = r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi$$

ou

$$dz = ir(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi,$$

et, par suite,

(1) $$\int_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2i\pi.$$

Cela étant, soient $f(z)$ une fonction holomorphe de la variable complexe z dans un domaine D, a un point intérieur à D.

Soit A un domaine compris dans D, contenant intérieurement a, et limité par un contour simple C (*fig.* 20). Prenons un cercle γ de centre a, de rayon r, contenu dans A.

Remarquons que la fonction $\frac{f(z)}{z-a}$ est fonction holomorphe de z dans tout domaine contenu dans D et ne contenant pas a, en particulier dans la région comprise entre les contours C et γ. Il en résulte, d'après le théorème de Cauchy (n° 225), qu'on a

$$\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

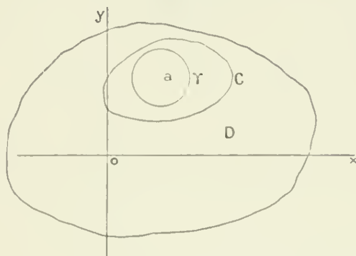
([1]) Dans la suite, à moins d'indication contraire, une intégrale telle que

$$\int_\gamma f(z)\,dz,$$

où γ est un contour simple, représente l'intégrale prise dans le sens positif de parcours par rapport au domaine intérieur à γ.

Il en résulte aussi que l'intégrale du second membre reste invariable si l'on remplace γ par un cercle concentrique intérieur γ'; autrement dit, la valeur de l'intégrale est indépendante du rayon r.

Fig. 20.



D'autre part, comme f est fonction continue, étant donné un nombre ε positif, on peut trouver un nombre positif α tel que sous la condition $r < \alpha$ on ait, en tout point du cercle γ de centre a et de rayon r,

$$|f(z) - f(a)| < \varepsilon.$$

Écrivons alors

$$I = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz + \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz.$$

La première intégrale du second membre est égale, d'après (1), à $2i\pi f(a)$. Comme I est indépendant de r, la seconde doit aussi être indépendante de r. Comme on a, sur γ,

$$|f(z)-f(a)| < \varepsilon, \qquad |z-a| = r,$$

on voit, en appliquant la règle qui donne une limite supérieure du module d'une intégrale (nº 221, p. 15), que l'on a

$$\left| \int_\gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz \right| < \frac{\varepsilon}{r}\,2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

Cette seconde intégrale est donc en module plus petite que $2\pi\varepsilon$; par suite, elle peut être rendue aussi petite que l'on veut. Comme elle a une valeur bien déterminée, indépendante de r, il en résulte qu'elle est nulle.

Nous avons finalement la *formule fondamentale de Cauchy*

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-a} = 2i\pi f(a),$$

ou encore

(2) $$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-a}.$$

Elle est valable dans les conditions suivantes : a est intérieur à un domaine d'holomorphie D, l'intégrale est prise dans le sens positif sur un contour simple C entourant a et contenu dans D.

227. Considérons la formule (2) obtenue. Si l'on suppose que a varie, *en restant intérieur à* C, on a dans le second membre, sous le signe $\int$, une fonction holomorphe de la variable complexe a, qui joue le rôle de paramètre dans l'intégrale. Donc le second membre est holomorphe par rapport à a; par la règle de dérivation sous le signe $\int$, on obtient

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}.$$

Dans cette nouvelle formule, l'expression à intégrer est fonction holomorphe de a. Donc le second membre et par suite le premier ont une dérivée par rapport à a, que nous obtenons en dérivant sous le signe $\int$; cela donne

$$f''(a) = \frac{2}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^3}.$$

Je dis, d'une manière générale, que $f(a)$ *a des dérivées de tous les ordres, la dérivée d'ordre n étant*

(3) $$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

En effet, cette formule étant admise pour une valeur de n, on peut la dériver par rapport à a; on obtient ainsi la même formule, n étant remplacé par $n+1$.

228. Soit maintenant une fonction f holomorphe par rapport à plusieurs variables complexes $x, y, z, \ldots$, quand ces variables sont respectivement dans des domaines A, B, C, ... de leurs plans. Si toutes les variables, moins une, reçoivent des valeurs fixes, f se réduit à une fonction d'une seule variable. D'après ce qui précède, cette fonction a, par rapport à cette variable, des dérivées de tous les ordres dont on connaît l'expression par une intégrale.

Cela posé, soit a, b, c un système de valeurs de x, y, z intérieures aux domaines A, B, C. Soit γ un cercle contenu dans A et auquel le point a est intérieur. Laissons fixes les points b, c et le cercle γ, et faisons varier a à l'intérieur de ce cercle.

On a, par application de la formule (3),

$$\frac{\partial^n f(a, b, c)}{\partial a^n} = \frac{n!}{2 i \pi} \int_\gamma \frac{f(x, b, c)\, dx}{(x-a)^{n+1}}.$$

Dans l'intégrale, b et c sont des paramètres; la fonction à intégrer, étant quotient de deux fonctions holomorphes par rapport aux variables x, a, b, c, est elle-même fonction holomorphe par rapport à ces variables. Il en résulte qu'on peut appliquer la règle de dérivation par rapport aux paramètres b et c.

En particulier, en prenant d'abord le cas de $n = 1$, on voit que la dérivée $\frac{\partial f}{\partial a}$ est fonction holomorphe de a, b, c, et cela dans tout système de domaines A′, B′, C′ obtenu en prenant A′ composé de points intérieurs à A, B′ de points intérieurs à B, C′ de points intérieurs à C. Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial b}$, $\frac{\partial f}{\partial c}$.

En résumé, chacune des dérivées du premier ordre de f est fonction holomorphe des variables a, b, c, elle a une dérivée par rapport à chacune de ces variables, ces dérivées sont elles-mêmes fonctions holomorphes de a, b, c, et ainsi indéfiniment, de sorte que si l'on considère les lettres a, b, c, qu'on effectue sur f des dérivations par rapport à a, b, c en nombre quelconque et dans un ordre quelconque, l'expression obtenue a un sens

Enfin, de même que pour les fonctions de variables réelles, *l'ordre des dérivations est indifférent.* Il suffit de le vérifier d'abord pour une fonction holomorphe de deux variables z, z' et pour les deux dérivées

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial z'}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z'\, \partial z}.$$

Posons

$$z = x + iy, \qquad z' = x' + iy', \qquad f = P + iQ.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial z'} = \frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial x'} + i \frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial x'}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z'\, \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial x'\, \partial x} + i \frac{\partial^2 Q}{\partial x'\, \partial x}.$$

On voit que $\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial z'}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z'\, \partial z}$ sont identiques à cause de l'identité de $\frac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial x'}$ avec $\frac{\partial^2 P}{\partial x'\, \partial x}$ et de $\frac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial x'}$ avec $\frac{\partial^2 Q}{\partial x'\, \partial x}$.

Comme pour les fonctions de variables réelles, on en conclut que d'une façon générale l'ordre des dérivations est indifférent.

La conclusion est la suivante : *Toute fonction $f(x, y, z)$, holomorphe par rapport aux variables complexes x, y, z, a des dérivées de tous les ordres par rapport à ces variables, l'ordre des dérivations étant indifférent, et cela pour tout système de points a, b, c intérieurs aux domaines d'holomorphie.*

229. *Fonctions harmoniques.* — Considérons une fonction d'une variable complexe

$$f(z) = P(x, y) + i\, Q(x, y).$$

Écrivons les relations d'holomorphie

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nous savons que les fonctions P et Q ont des dérivées de tous les ordres, en particulier des dérivées secondes. Dérivons la première relation par rapport à x, la seconde par rapport à y et ajoutons. Il vient

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Dérivons de même la première par rapport à y, la seconde par rapport à x et ajoutons-les après avoir multiplié la seconde par -1. Il vient

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0.$$

P et Q sont donc solutions d'une même équation aux dérivées partielles du second ordre qu'on appelle *équation de Laplace*. D'une façon générale, on appelle *fonction harmonique* toute fonction qui satisfait à cette équation.

IV. — Séries de nombres complexes.

230. Soit une série dont le terme général est le nombre complexe $a_n + i b_n$. Nous dirons que cette série est convergente si la somme des n premiers termes a une limite déterminée et finie quand n aug-

mente indéfiniment. La condition nécessaire et suffisante pour que cela soit est que les séries de termes généraux a_n et b_n soient convergentes.

Étant donnée une série de termes complexes, si la série des modules est convergente, la série donnée l'est aussi. En effet, soit $u_n = a_n + ib_n$ le terme général de la série donnée. On a

$$|a_n| \leq |u_n|, \qquad |b_n| \leq |u_n|.$$

Donc, si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, il en est de même des séries de termes généraux a_n et b_n.

Une série de termes complexes dont la série des modules est convergente est dite *absolument convergente*. Pour une telle série, comme la somme S_n des n premiers termes a un module inférieur ou égal à la somme des modules des n premiers termes, la somme de la série, qui est la limite de S_n, a un module inférieur ou égal à la somme de la série des modules.

Dans une série absolument convergente, on peut déplacer les termes d'une manière quelconque, la nouvelle série ainsi obtenue est équivalente à la première. Ce déplacement revient en effet à opérer simultanément le déplacement des termes correspondants dans les deux séries de termes généraux a_n et b_n. La somme de ces deux séries n'étant pas changée, il en est de même de la série de terme général $a_n + ib_n$.

Il en résulte que l'on peut aussi dans une telle série grouper les termes d'une manière quelconque, l'expression ayant le même sens que pour les séries de termes réels absolument convergentes.

231. *Séries doubles.* — Soit $u_{n,p}$ une quantité réelle ou complexe dépendant de deux indices qui peuvent prendre toutes les valeurs entières positives (certains systèmes de valeurs pouvant d'ailleurs être exclus). Disposons ces quantités en un Tableau T :

$$(\mathrm{T}) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} u_{1,1}, & u_{1,2}, & \ldots, & u_{1,n}, & \ldots, \\ u_{2,1}, & u_{2,2}, & \ldots, & u_{2,n}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ u_{p,1}, & u_{p,2}, & \ldots, & u_{p,n}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots \end{array} \right.$$

On peut toujours ranger ces quantités en une suite infinie unique; on procédera par exemple de la façon suivante. On écrit d'abord le terme $u_{1,1}$, pour lequel la somme des indices est égale à 2, puis les

termes $u_{2,1}$, $u_{1,2}$, pour lesquels la somme des indices est égale à 3, puis les termes $u_{3,1}$, $u_{2,2}$, $u_{1,3}$, pour lesquels la somme des indices est égale à 4, et ainsi de suite. On obtient bien de cette manière tous les termes du Tableau une fois et une fois seulement.

S'il arrive que toutes les séries A obtenues en disposant les termes de T en une suite unique sont convergentes et ont même somme S, nous dirons que T constitue une *série double convergente* de somme S.

Considérons d'abord le cas où les u sont des nombres réels positifs. Formons les sommes obtenues en prenant dans T d'une manière quelconque un nombre fini de termes. Elles ont une borne supérieure S finie ou infinie. Toute série A obtenue en disposant les termes du Tableau T en une suite infinie unique est telle que la borne supérieure des sommes d'un nombre fini de termes de A est égale à S.

Si S est *fini*, A est convergente et a pour somme S, et, d'après la définition, T est une série double convergente de somme S.

D'autre part, considérons les lignes horizontales du Tableau T; soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p, \ldots$ les sommes des séries constituées par ces lignes, chacun des nombres σ étant fini si la série correspondante est convergente, égal à $+\infty$ si cette série est divergente. Soit S' la borne supérieure des nombres $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p$ pour toutes les valeurs de p. Je dis que l'on a

$$S = S'.$$

D'abord, quel que soit p, on a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p \leqq S,$$

car les termes qui entrent dans les p premières lignes du Tableau T figurent dans la série A. Il en résulte que l'on a $S' \leqq S$.

Donnons-nous maintenant un nombre positif B inférieur à S. Nous pouvons, dans la série A, prendre au commencement un nombre q de termes, suffisant pour que la somme de ces termes surpasse B. Si p est assez grand, ces q termes figurent dans la somme $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p$, et l'on a $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p \geqq B$, d'où $S' \geqq B$. Comme cela a lieu quel que soit $B < S$, cela veut dire que l'on a

$$S' \geqq S,$$

d'où finalement

$$S' = S.$$

On voit donc que, quand S a une valeur finie, les lignes du Tableau forment des séries convergentes et les sommes de ces séries

forment elles-mêmes une série convergente qui a pour somme S. On peut aussi, au lieu de faire la somme des termes du Tableau T par lignes, la faire par colonnes. On obtient encore des séries convergentes dont les sommes forment elles-mêmes une série convergente de somme S.

Si S est égal à $+\infty$, on dit que les quantités $u_{n,p}$ forment une série double divergente.

Étant données deux séries doubles de termes généraux *positifs* $u_{n,p}$, $v_{n,p}$, si l'on a $v_{n,p} \leqq u_{n,p}$, et si la série u est convergente, il en est de même de la série v. On le reconnaît en considérant la série ordinaire A équivalente au Tableau.

Supposons maintenant les u réels et de signes quelconques. Posons

$$u_{n,p} = (u_{n,p} + |u_{n,p}|) - |u_{n,p}|;$$

$u_{n,p}$ apparaît ainsi comme la différence de deux quantités dont chacune est positive ou nulle et égale au plus en module à $2|u_{n,p}|$. Si la série double formée par les quantités $|u_{n,p}|$ est convergente, on peut former deux séries doubles T_1 et T_2 dont les termes généraux respectifs sont les deux termes de la différence précédente et qui sont toutes deux convergentes. A toute somme d'un nombre fini ou infini de termes de T correspond dans T_1 et T_2 une somme, et la première somme est la différence des deux dernières. On en déduit qu'une série A obtenue en disposant les termes de T en une suite unique est convergente et a une somme toujours la même si l'on déplace les termes de A; c'est aussi la somme obtenue en effectuant d'abord dans le Tableau T la sommation par lignes par exemple, puis en effectuant la somme de la série des nombres obtenus.

Enfin, si les quantités u sont des nombres complexes de la forme

$$u_{n,p} = a_{n,p} + ib_{n,p},$$

et si la série double de terme général $|u_{n,p}|$ est convergente, chacune des séries de terme général $a_{n,p}$, $b_{n,p}$ est convergente. Soient P, Q leurs sommes. Toute série A obtenue en écrivant les termes du Tableau en une suite unique a pour somme $P + iQ$. On dira que la série $u_{n,p}$ est *absolument convergente* et a pour somme $P + iQ$.

232. *Multiplication des séries.* — Soient deux séries à termes réels ou complexes de termes généraux u_n, v_n.

Si ces deux séries sont convergentes et ont respectivement pour sommes S et Σ, on peut former une série convergente de somme $S\Sigma$,

en prenant la série ayant pour terme général

$$S_{n+1}\Sigma_{n+1} - S_n\Sigma_n,$$

c'est-à-dire

$$(u_1 + \ldots + u_{n+1})(v_1 + \ldots + v_{n+1}) - (u_1 + \ldots + u_n)(v_1 + \ldots + v_n).$$

Supposons maintenant que les deux séries données soient absolument convergentes. Considérons tous les produits tels que $u_n v_p$, obtenus en multipliant un terme de la première par un terme de la seconde. Disposons ces quantités $u_n v_p$ en un Tableau (T) à double entrée :

$$(\mathrm{T})\quad \left\{\begin{array}{lllll} u_1 v_1, & u_1 v_2, & \ldots, & u_1 v_p, & \ldots, \\ u_2 v_1, & u_2 v_2, & \ldots, & u_2 v_p, & \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & \ldots, \\ u_n v_1, & u_n v_2, & \ldots, & u_n v_p, & \ldots, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots. \end{array}\right.$$

Je dis que ce Tableau constitue une série double absolument convergente.

Considérons en effet la série double T' des modules correspondante, c'est-à-dire le Tableau de terme général $|u_n|\,|v_p|$. Prenons une somme d'un nombre fini quelconque de termes du Tableau T', et soit q un nombre plus grand que les indices de lignes et de colonnes de ces termes. Ceux-ci sont compris dans le carré formé par les q premières lignes et les q premières colonnes. Or, la somme des termes de ce carré est

$$(|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_q|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_q|).$$

Comme ce produit est inférieur à $S'\Sigma'$, S' étant la somme de la série $|u_n|$, Σ' la somme de la série $|v_n|$, il en résulte que, dans le Tableau T' des modules, la somme d'un nombre fini de termes reste inférieure à un nombre déterminé. Donc la série double T' est convergente, et la série T, de terme général $u_n v_p$, est absolument convergente.

Cela posé, on peut faire la somme du Tableau T, soit par lignes, soit par colonnes, soit en disposant les termes d'une manière quelconque en une suite unique infinie. En particulier, on les dispose souvent de la façon suivante :

$$u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \ldots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_n v_1) + \ldots.$$

V. — Séries de fonctions réelles et complexes.

233. Nous considérerons des séries dont les termes sont fonctions, soit d'une ou plusieurs variables réelles, soit d'une ou plusieurs variables complexes, ces fonctions étant définies pour les systèmes de valeurs des variables appartenant, suivant les cas, à un intervalle, à un domaine, à un domaine dans le plan des z, ou enfin à plusieurs domaines s'il s'agit de plusieurs variables complexes. Soit, dans tous les cas, E l'ensemble des systèmes de valeurs des variables.

Convergence normale. — Soit une série

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

dont les termes sont fonctions de certaines variables réelles ou complexes, définies pour un ensemble E.

Nous dirons que *la série est normalement convergente pour l'ensemble* E *si*, α_n *étant la borne supérieure de* $|u_n|$ *dans cet ensemble, la série numérique à termes positifs*

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots$$

est convergente.

Remarquons que l'on peut affirmer qu'il en est ainsi si l'on connaît une série numérique à termes positifs, convergente,

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

telle que l'on ait en tout point de E

$$|u_n| \leqq a_n.$$

Si une série satisfait à la condition de l'énoncé, elle est convergente pour tout système de valeurs de E. De plus, donnons-nous un nombre positif ε. On peut trouver un entier p tel que, pour $n > p$, on ait

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots \leqq \varepsilon.$$

Dans ces conditions, le reste de la série donnée, arrêtée à son $n^{\text{ième}}$ terme, c'est-à-dire la quantité $R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, est, *en tout point de* E, au plus égale en module à ε.

C'est à cette propriété qu'on donne le nom de *convergence uniforme.*

234. Une série convergente

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

est dite *uniformément convergente* pour un ensemble E si, quel que soit le nombre positif ε, il y a un entier p tel que, pour $n > p$, et pour tout système de valeurs de l'ensemble E, on a

$$| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots | < \varepsilon,$$

ce qui s'écrit, avec les notations usuelles,

$$| S - S_n | < \varepsilon.$$

Nous allons montrer qu'*on peut ramener le cas de la convergence uniforme au cas de la convergence normale.* En effet, soit une série uniformément convergente. Donnons-nous une suite de nombres positifs décroissants et formant une série convergente

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots.$$

D'après l'hypothèse de la convergence uniforme, nous pouvons trouver un entier n_0 tel que l'on ait

$$| S_{n_0} - S | < \alpha_1,$$

puis un entier $n_1 > n_0$ tel que

$$| S_{n_1} - S | < \alpha_2,$$

et d'une manière générale un entier $n_i > n_{i-1}$ tel que

$$| S_{n_i} - S | < \alpha_{i+1}.$$

Posons

$$U_0 = S_{n_0}, \qquad U_1 = S_{n_1} - S_{n_0}, \qquad \ldots. \qquad U_i = S_{n_i} - S_{n_{i-1}}, \qquad \ldots;$$

on peut écrire, pour $i = 1, 2, \ldots,$

$$U_i = (S_{n_i} - S) - (S_{n_{i-1}} - S),$$

d'où résulte

$$| U_i | \leqq \alpha_i + \alpha_{i+1} < 2\alpha_i.$$

D'autre part, U_i est la somme d'un certain nombre de termes consécutifs de la série donnée. *On peut donc, par un certain groupement de termes consécutifs de la série donnée, obtenir une série normalement convergente*

$$U_0, \quad U_1, \quad \ldots, \quad U_i, \quad \ldots.$$

En effet, les termes U, à partir du second, sont respectivement plus petits en module que les termes de la série convergente

$$2\alpha_1, \quad 2\alpha_2, \quad \ldots, \quad 2\alpha_i, \quad \ldots.$$

235. *Variables réelles. — Une série dont les termes sont fonctions continues d'une ou plusieurs variables réelles $x, y, \ldots$ dans un domaine* D, *et qui est uniformément convergente dans ce domaine, a pour somme une fonction continue dans ce domaine.*

Considérons, en effet, une série remplissant ces conditions :

$$u_1(x, y, \ldots) + \ldots + u_n(x, y, \ldots) + \ldots.$$

Soit $f(x, y, \ldots)$ la somme de cette série. Donnons-nous un nombre positif ε. On peut déterminer un entier n tel que l'on ait

$$|R_n| = |u_{n+1} + \ldots| < \varepsilon.$$

On a, en appelant S_n la somme des n premiers termes de la série,

$$f = S_n + R_n.$$

Or, S_n étant la somme d'un nombre fini de fonctions continues, est elle-même fonction continue. Soit $(x_0, y_0, \ldots)$ un point du domaine D ; on peut trouver un nombre α tel que les conditions

$$|x - x_0| < \alpha, \qquad |y - y_0| < \alpha, \qquad \ldots$$

entraînent

$$|S_n(x, y, \ldots) - S_n(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon.$$

D'ailleurs, on a

$$|R_n(x, y, \ldots)| < \varepsilon, \qquad |R_n(x_0, y_0, \ldots)| < \varepsilon.$$

Cela posé, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots) = {} & S_n(x, y, \ldots) - S_n(x_0, y_0, \ldots) \\ & + R_n(x, y, \ldots) - R_n(x_0, y_0, \ldots). \end{aligned}$$

Le second membre est plus petit en module que 3ε, d'où

$$|f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)| < 3\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, il en résulte que la fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue.

Une série de fonctions continues peut être convergente pour tous les points d'un certain domaine sans que la somme de cette série soit

une fonction continue dans ce domaine. Prenons, par exemple, la série

$$x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{x}{(1+x)^n} + \ldots$$

Supposons que x soit positif. Nous avons une progression géométrique de raison $\frac{1}{1+x}$ dont la somme est

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{1+x}} = 1 + x.$$

Cette somme $(1+x)$ tend vers 1 quand x tend vers zéro. Mais, si l'on fait $x = 0$ dans la série proposée, on voit que tous ses termes sont nuls; donc sa somme est nulle. Si donc on donne à x des valeurs positives tendant vers zéro, la somme de la série tend vers 1 et non pas vers sa valeur pour $x = 0$.

236. *Dérivation.* — Considérons une série dont les termes sont des fonctions d'une variable réelle x ayant des dérivées, et qui est convergente pour toutes les valeurs d'un intervalle. Soit

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

cette série. Je dis que, *si la série des dérivées*

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

est normalement convergente dans l'intervalle, elle représente la dérivée de la série donnée.

D'après l'hypothèse, il y a une série numérique convergente α_1, α_2, ..., α_n, ... telle que l'on a

$$|u_n| < \alpha_n.$$

Donnons-nous un nombre positif ε, et prenons un entier n tel que l'on ait

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots < \varepsilon.$$

Soient $f(x)$ la somme de la série donnée, $\varphi(x)$ la somme de la série des dérivées. Si l'on désigne par S_n la somme des n premiers termes de la série donnée, la somme des n premiers termes de la série des dérivées est S'_n, de sorte qu'en désignant par x et $x + h$ deux

valeurs de l'intervalle, nous pouvons écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\varphi(x) = {} & \frac{S_n(x+h)-S_n(x)}{h}-S'_n(x) \\ & +\sum_{i=n+1,\ldots}\left[\frac{u_i(x+h)-u_i(x)}{h}-u'_i(x)\right]. \end{aligned}\right.$$

D'après la formule des accroissements finis, on a

$$\frac{u_i(x+h)-u_i(x)}{h}=u'_i(x+\theta h) \qquad (0<\theta<1).$$

Donc le terme relatif à l'indice i sous le signe Σ est plus petit en module que $2\alpha_i$. La somme des termes sous le signe Σ est inférieure en module à

$$2\alpha_{n+1}+2\alpha_{n+2}+\ldots$$

et, par suite, inférieure à 2ε.

Cela posé, si nous faisons tendre h vers zéro, la première différence du second membre de (1) tend vers zéro. Donc, quand $|h|$ est inférieur à un certain nombre, le second membre, et par suite le premier, est plus petit en module que 3ε. Comme ε est arbitraire, cela veut dire que, quand h tend vers zéro, le premier membre tend vers zéro. Donc $f(x)$ est continue et a pour dérivée $\varphi(x)$.

Ce résultat s'étend au cas où l'on suppose seulement que la série (u') des dérivées est uniformément convergente. En effet, opérons dans cette série un groupement de termes consécutifs de façon à obtenir une série (U') normalement convergente. En groupant de la même manière les termes de la série donnée, on obtient une série (U) telle que chaque terme de la série (U') est la dérivée du terme correspondant de la série (U). En appliquant aux nouvelles séries le théorème précédent, on voit que φ, somme de la série des dérivées, est la dérivée de f.

237. *Intégration.* — Soit une série

$$f(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots$$

uniformément convergente dans un intervalle (a, b) et dont les termes sont fonctions continues d'une variable x dans cet intervalle. Je dis qu'on peut l'intégrer terme à terme.

En effet, donnons-nous un nombre positif ε. On peut déterminer un entier p tel qu'en posant $f(x)=u_1+u_2+\ldots+u_n+R_n$, on ait,

pour $n > p$,

$$|R_n| < \varepsilon.$$

On a, en intégrant de a à b les deux membres de l'équation précédente,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b R_n\,dx.$$

La dernière intégrale du second membre est plus petite en module que $\varepsilon(b-a)$. Si donc on fait croître n indéfiniment, elle tend vers zéro.

Donc la série de terme général $\int_a^b u_n\,dx$ est convergente et a pour somme l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$.

On démontrerait de même qu'on peut prendre terme à terme l'intégrale double ou l'intégrale triple d'une série uniformément convergente de fonctions de deux ou trois variables réelles dans un domaine donné.

238. *Séries de fonctions de variables complexes. — Considérons une série*

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

dont les termes sont fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes $z, z', z'', \ldots$ *quand ces variables sont respectivement à l'intérieur de domaines* A, A′, A″, ... *de leurs plans. Supposons, en outre, que cette série soit normalement convergente.* Je dis que *sa somme* Σu_n *représente une fonction holomorphe des variables complexes* $z, z', z'', \ldots$ *pour tout système de valeurs de ces variables intérieures respectivement aux domaines* A, A′, A″, ... *et qu'on obtient les dérivées de cette fonction en dérivant terme à terme la série donnée.*

Donnons-nous un nombre positif r et considérons la région A du plan des z. Désignons par A_1 l'ensemble des points de cette région dont la distance à un point quelconque de la frontière C de la région A est plus grande que r, de telle sorte qu'un cercle γ de rayon r, ayant pour centre un tel point, est tout entier intérieur à A. Remarquons que si l'on choisit à l'avance un point intérieur à A, en prenant le nombre r suffisamment petit, on obtiendra une région A_1 contenant ce point.

Soient de même A'_1, A''_1, ... les ensembles de points des régions A', A'', ... jouissant de la même propriété relativement à ces régions.

Considérons un système de valeurs a, a', a'', ... attribuées à z, z', z'', ..., appartenant respectivement à A_1, A'_1, A''_1, ... Le cercle γ de centre a et de rayon r étant tout entier dans la région A, nous avons (nº 227, p. 22)

$$\frac{\partial u_n}{\partial a}(a, a', a'', \ldots) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{u_n(z, a', a'', \ldots)}{(z-a)^2}\,dz.$$

D'après l'hypothèse, α_n désignant la borne supérieure de $|u_n|$, la série de terme général α_n est convergente. D'autre part, sur le cercle γ, on a $|z-a| = r$, d'où

$$\left|\frac{u_n(z, a', a'', \ldots)}{(z-a)^2}\right| \leqq \frac{\alpha_n}{r^2},$$

et, par suite, la longueur de γ étant $2\pi r$,

$$\left|\int_\gamma \frac{u_n(z, a', a'', \ldots)\,dz}{(z-a)^2}\right| \leqq \frac{\alpha_n}{r^2}2\pi r = 2\pi\frac{\alpha_n}{r}.$$

On a donc

$$\left|\frac{\partial u_n(a, a', a'', \ldots)}{\partial a}\right| \leqq \frac{\alpha_n}{r}.$$

On a de même

$$\left|\frac{\partial u_n(a, a', a'', \ldots)}{\partial a'}\right| \leqq \frac{\alpha_n}{r}, \qquad \left|\frac{\partial u_n(a, a', a'', \ldots)}{\partial a''}\right| \leqq \frac{\alpha_n}{r}, \qquad \ldots.$$

Séparons les parties réelles et les coefficients de i en posant

$$a = x + iy, \qquad a' = x' + iy', \qquad \ldots, \qquad u_n = P_n + iQ_n.$$

On a alors

$$\frac{\partial u_n}{\partial a} = \frac{\partial P_n}{\partial x} + i\frac{\partial Q_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial y} - i\frac{\partial P_n}{\partial y}.$$

Par conséquent, les dérivées par rapport à x, y, x', y', ... des fonctions P_n et Q_n sont au plus égales en module à $\frac{\alpha_n}{r}$.

D'autre part, comme $|P_n| \leqq \alpha_n$, $|Q_n| \leqq \alpha_n$, les séries de fonctions de variables réelles ΣP_n, ΣQ_n sont normalement convergentes, donc représentent des fonctions continues : posons

$$P = \Sigma P_n, \qquad Q = \Sigma Q_n.$$

Considérons les séries

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial x}, \quad \sum \frac{\partial P_n}{\partial y}, \quad \ldots;$$

ces dernières séries, ayant leurs termes au plus égaux en module à ceux de la série convergente $\sum \frac{\alpha_n}{r}$, sont normalement convergentes. Elles représentent donc des fonctions continues qui sont les dérivées des séries ΣP_n, ΣQ_n. On a, par exemple,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \sum \frac{\partial P_n}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \sum \frac{\partial Q_n}{\partial x}, \qquad \ldots.$$

De plus, des relations d'holomorphie

$$\frac{\partial P_n}{\partial x} = \frac{\partial Q_n}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\frac{\partial Q_n}{\partial x},$$

on déduit les mêmes relations pour les séries correspondantes

$$\sum \frac{\partial P_n}{\partial x} = \sum \frac{\partial Q_n}{\partial y}, \qquad \sum \frac{\partial P_n}{\partial y} = -\sum \frac{\partial Q_n}{\partial x}.$$

Donc P et Q, en tant que fonctions de x, y, satisfont aux conditions d'holomorphie, et la dérivée de $P + iQ = \Sigma u_n$ par rapport à a est

$$\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \sum \frac{\partial P_n}{\partial x} + i\sum \frac{\partial Q_n}{\partial x} = \sum \frac{\partial u_n}{\partial a}.$$

En résumé, Σu_n *est une fonction holomorphe des variables complexes* a, a', a'', ..., *et sa dérivée par rapport à chacune des variables s'obtient en dérivant terme à terme la série donnée, le résultat étant établi pour tout système de valeurs* a, a', a'', ... *tel que* a *soit intérieur à la région* A, a' *intérieur à la région* A′, a'' *intérieur à la région* A″, *etc.*

La série $\sum \frac{\partial u_n}{\partial a}$, en vertu de ce que l'on a $\left|\frac{\partial u_n}{\partial a}\right| < \frac{\alpha_n}{r}$, est normalement convergente dans le système de régions A_1, A'_1, A''_1, ...

Je dis qu'*en tout point intérieur à* A, A′, A″, ..., *la dérivation terme à terme de la série donnée peut s'effectuer indéfiniment.* Admettons-le pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n; admettons aussi que les séries des dérivées d'ordre n sont normalement convergentes dans un système de régions A_1, A'_1, A''_1, ... Dans ces conditions, chaque série des dérivées d'ordre n peut être traitée comme la série Σu_n. Donc toute dérivée d'ordre $(n+1)$ s'obtiendra en déri-

vant terme à terme une des séries dérivées d'ordre n, le résultat étant valable pour tout système de valeurs a, a', a'', ... intérieures à A_1, A'_1, A''_1, ... De plus, les séries obtenues sont normalement convergentes dans un système A_2, A'_2, A''_2, ... situé par rapport à A_1, A'_1, A''_1, ... comme ce dernier est situé par rapport à A, A', A'', ... Le procédé de récurrence s'applique donc.

Enfin, si l'on choisit à l'avance un point intérieur à A, A', A'', ..., on peut faire en sorte que ce point soit intérieur à A_2, A'_2, A''_2, ... : cela achève d'établir la proposition.

Une série uniformément convergente de fonctions holomorphes de z, z', ... représente une fonction holomorphe, puisqu'elle peut, par groupement de termes, se transformer en une série normalement convergente.

239. *Intégration.* — Soit une série

$$f(z) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes sont fonctions holomorphes d'une variable complexe z dans un domaine A et qui est uniformément convergente dans ce domaine. $f(z)$ est, d'après ce qui précède, fonction holomorphe. Prenons à l'intérieur de A un chemin L allant d'un point z_0 à un point z. Considérons les intégrales le long de L des fonctions u_1, u_2, ..., u_n et f. Étant donné un nombre positif ε, il y a un entier p tel que l'on a, pour $n > p$, en désignant par R_n le reste de la série arrêtée au n^{ieme} terme,

$$|R_n| < \varepsilon,$$

et cela en tout point du domaine A. Nous pouvons écrire dans ces conditions, comme R_n est holomorphe,

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z} u_1\,dz + \ldots + \int_{z_0}^{z} u_n\,dz + \int_{z_0}^{z} R_n\,dz.$$

On a d'ailleurs

$$\left|\int_{z_0}^{z} R_n\,dz\right| < \varepsilon \text{ longueur de l'arc } L,$$

de sorte que, si n croît indéfiniment, cette intégrale tend vers zéro : la différence entre le premier membre de l'équation précédente et la somme des n premiers termes du second tend vers zéro. Par consé-

quent, la série dont le terme général est $\int_{z_0}^{z} u_n\,dz$ est convergente et a pour somme l'intégrale $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$. Cela revient à dire qu'on peut intégrer terme à terme la série donnée. Nous constatons, en outre, que la série des intégrales est elle-même uniformément convergente, et que, si la série donnée est normalement convergente, il en est de même de la série des intégrales.

VI. — Séries entières à une variable.

240. On appelle *série entière* par rapport à z une série de la forme

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{1}$$

les constantes a et la variable z étant des nombres complexes. Posons $a'_n = |a_n|$. Considérons la série auxiliaire à termes positifs

$$a'_0 + a'_1 \rho + a'_2 \rho^2 + \ldots + a'_n \rho^n + \ldots, \tag{2}$$

où ρ recevra des valeurs positives ou nulles.

Si la série (2) converge pour une valeur attribuée à ρ, elle converge pour toute valeur inférieure à celle-là. *Soit* R_0 *la borne supérieure des nombres* ρ *tels que la série* (2) *soit convergente;* R_0 peut être nul, égal à un nombre fini positif, ou à $+\infty$; la série (2) est convergente si $\rho < R_0$, divergente si $\rho > R_0$; désignons par C_0 le cercle de centre O et de rayon R_0 (dans le cas de R_0 fini).

Je dis que *la série* (1) *diverge en tout point* z *extérieur à* C_0. Supposons en effet pour un instant que la série (1) soit convergente pour une valeur z de module $R_1 > R_0$, alors le module du terme général de (1), soit $a'_n R_1^n$, tend vers o quand n croît indéfiniment; donc les nombres $a'_n R_1^n$ sont, quel que soit n, inférieurs à un nombre fini A.

Prenons R_2 tel que $R_0 < R_2 < R_1$: on a

$$a'_n R_2^n = a'_n R_1^n \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n \leqq A \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n.$$

Donc la série de terme général $a'_n R_2^n$ a ses termes au plus égaux à ceux de la série de terme général $A\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^n$, qui est une progression

géométrique décroissante; donc la série (2) converge pour le nombre R_2 supérieur à R_0, contrairement à la définition de R_0; la proposition est démontrée.

Soit maintenant (dans le cas de $R_0 > 0$) C un cercle de centre O et de rayon $R < R_0$; la série de terme général $a'_n R^n$ est convergente; quand le point z est dans C, on a $|z| \leqq R$, d'où $|a_n z^n| \leqq a'_n R^n$, la série (1) est donc normalement convergente dans C; d'ailleurs, chaque terme de (1) est fonction holomorphe de z, donc (n° 238) la série (1) représente une fonction $f(z)$ holomorphe en tout point intérieur à C, les dérivées s'obtenant en dérivant terme à terme la série (1). Comme on peut prendre R aussi voisin qu'on veut de R_0, le résultat est valable pour tout point intérieur à C_0, et l'on a l'énoncé suivant :

La série (1), *dans tout l'intérieur de* C_0, *est convergente et représente une fonction* $f(z)$ *holomorphe de* z *dont les dérivées s'obtiennent en dérivant* (1) *terme à terme. Elle diverge en tout point extérieur à* C_0.

Le cercle C_0 est dit *cercle de convergence* de la série entière (1), R_0 est le *rayon de convergence*. Pour les points du cercle de convergence, il y a doute en ce qui concerne la convergence de la série.

Quand $R_0 = +\infty$, la fonction $f(z)$ est holomorphe dans tout le plan.

Quand $R_0 = 0$, la série (1) n'est convergente que pour $z = 0$.

On peut intégrer la série (1) *terme à terme dans* C_0. Soit en effet z un point intérieur à C_0; intégrons le terme général $a_n z^n$ le long du rayon Oz; on a

$$\int_{Oz} a_n z^n \, dz = \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}.$$

La série (1) est normalement convergente dans tout cercle intérieur à C_0; on peut l'intégrer terme à terme le long de Oz (n° 239); cela montre que la série

$$a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{a_n z^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

est convergente en tout point intérieur à C_0, et représente une fonction primitive de $f(z)$.

241. Il résulte de ce qui précède que, si la série (1) admet pour

rayon de convergence R_0, la série dérivée, savoir

$$a_1 + 2a_2 z + \ldots + n a_n z^{n-1} + \ldots$$

a aussi pour rayon de convergence R_0. En effet, son rayon de convergence est au moins égal à R_0 : mais il ne peut lui être supérieur, car, en revenant à la première série par intégration de la seconde, on trouverait pour cette première série un rayon de convergence supérieur à R_0.

D'une manière générale, *une série entière et toutes ses séries dérivées ou intégrales ont même rayon de convergence.*

Étant donnée la série entière (1), je dis que *son rayon de convergence est égal à la plus petite limite de la suite*

$$(3) \qquad \frac{1}{a'_1}, \quad \frac{1}{\sqrt[2]{a'_2}}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{a'_n}}, \quad \ldots,$$

en convenant de remplacer dans cette suite par $+\infty$ un terme correspondant à un coefficient nul.

Soit en effet R la plus petite limite de cette suite. Supposons d'abord R fini et positif. Étant donné un nombre $\rho < R$, prenons λ tel que $\rho < \lambda < R$.

D'après une propriété de la plus petite limite, à partir d'un certain rang dans la suite (3), on a

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a'_n}} > \lambda \qquad \text{ou} \qquad a'_n < \frac{1}{\lambda^n},$$

par suite

$$a'_n \rho^n < \left(\frac{\rho}{\lambda}\right)^n.$$

$\frac{\rho}{\lambda}$ est plus petit que 1, donc les termes de (2) sont plus petits que les termes d'une progression géométrique décroissante. Par suite, la série (2) est convergente pour $\rho < R$.

Si, au contraire, nous nous donnons un nombre $\rho > R$, on peut, quel que soit l'entier p, trouver $n > p$ tel que

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a'_n}} < \rho \qquad \text{ou} \qquad a'_n \rho^n > 1.$$

Il y a donc, dans la suite (2), et cela indéfiniment, des termes plus grands que 1. Donc la série (2) est divergente pour $\rho > R$.

Par conséquent, la plus petite limite R de la suite (2) est égale au rayon de convergence de la série (1).

Si R est nul, on applique seulement la seconde partie du raisonnement. S'il est égal à $+\infty$, on applique la première partie.

242. Nous avons vu qu'une série entière peut en un point du cercle de convergence être convergente ou non. Je dis que, *si la série est convergente pour un point z_0 du cercle, et si un point z se déplace sur le rayon Oz_0 en restant à l'intérieur du cercle et en tendant vers z_0, on a*

$$\lim f(z) = f(z_0),$$

c'est-à-dire qu'*il y a continuité le long du rayon*. Pour établir cette propriété, nous allons d'abord établir le lemme suivant :

Lemme d'Abel. — *Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \ldots$ des quantités réelles ou complexes, en nombre fini ou infini, telles que toutes les sommes*

$$S_p = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$$

sont inférieures en module à un nombre A. Soient d'autre part des nombres positifs décroissants $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$. Je dis que l'on a

$$(4) \qquad |\varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_p\alpha_p| < \varepsilon_0 A.$$

En effet, nous avons

$$\alpha_0 = S_0, \qquad \alpha_1 = S_1 - S_0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_p = S_p - S_{p-1}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned}\varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_p\alpha_p &= \varepsilon_0 S_0 + \varepsilon_1(S_1 - S_0) + \ldots + \varepsilon_p(S_p - S_{p-1})\\ &= S_0(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) + S_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \ldots\\ &\quad + S_{p-1}(\varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p) + S_p\varepsilon_p.\end{aligned}$$

Par hypothèse, toutes les différences $\varepsilon_0 - \varepsilon_1, \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{p-1} - \varepsilon_p$ sont positives; elles sont multipliées par des nombres $S_0, S_1, \ldots, S_{p-1}, S_p$ inférieurs en module à A; on a donc

$$|\varepsilon_0\alpha_0 + \varepsilon_1\alpha_1 + \ldots + \varepsilon_p\alpha_p| < A(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_p) = A\varepsilon_0.$$

L'inégalité (4) est donc établie.

Cela étant, revenons à la série entière

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Formons $f(z_0)$ et $f(\lambda z_0)$, λ étant un nombre positif plus petit que 1, que nous ferons tendre vers 1. Dans ces conditions, λz_0 re-

présente bien un point variable tendant vers z_0 sur le rayon Oz_0 et restant à l'intérieur du cercle de convergence. On a

$$(5)\qquad f(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + \ldots + a_n z_0^n + \ldots,$$
$$(6)\qquad f(\lambda z_0) = a_0 + a_1 \lambda z_0 + \ldots + a_n \lambda^n z_0^n + \ldots.$$

La première série étant convergente, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un entier p tel que, pour $n > p$, le reste R_n de cette série soit plus petit en module que ε. Par suite, h étant un entier positif quelconque, on a, si $n > p$,

$$|R_{n+h} - R_n| < 2\varepsilon.$$

Ceci s'écrit

$$|a_{n+1} z_0^{n+1} + a_{n+2} z_0^{n+2} + \ldots + a_{n+h} z_0^{n+h}| < 2\varepsilon.$$

Appliquons le lemme précédent en remplaçant les quantités α_0, α_1, ..., α_p par

$$a_{n+1} z_0^{n+1},\quad a_{n+2} z_0^{n+2},\quad \ldots,\quad a_{n+h} z_0^{n+h},$$

et les quantités ε_0, ε_1, ..., ε_p par

$$\lambda^{n+1},\quad \lambda^{n+2},\quad \ldots,\quad \lambda^{n+h};$$

on a, par application du lemme, la quantité désignée par A étant ici 2ε,

$$|a_{n+1} \lambda^{n+1} z_0^{n+1} + \ldots + a_{n+h} \lambda^{n+h} z_0^{n+h}| < \lambda^{n+1}.2\varepsilon < 2\varepsilon.$$

Laissons n fixe et faisons croître h. Le premier membre de cette inégalité a une limite qui est le reste R_n de la seconde série (6). Cette limite est donc au plus égale à 2ε. Écrivons alors, en posant $f = S_n + R_n$,

$$f(\lambda z_0) - f(z_0) = S_n(\lambda z_0) - S_n(z_0) + R_n(\lambda z_0) - R_n(z_0).$$

On a, quel que soit $n > p$ et quel que soit λ,

$$|R_n(z_0)| < \varepsilon, \qquad |R_n(\lambda z_0)| < 2\varepsilon.$$

La différence $S_n(\lambda z_0) - S_n(z_0)$ est un polynome en λ qui tend vers 0 quand λ tend vers 1. Donc $|f(\lambda z_0) - f(z_0)|$ peut être rendu inférieur à 4ε, en prenant λ assez voisin de 1. Comme ε est arbitraire, cela montre que $f(\lambda z_0)$ tend vers $f(z_0)$ quand λ tend vers 1, ce qui établit la proposition.

243. *Séries entières réelles.* — Il y a lieu de considérer le cas où les coefficients a_0, a_1, ... et la variable z sont réels. On reconnaît

qu'une série entière de cette forme, qu'on appelle *série entière réelle*, a un intervalle de convergence déterminé $(-R_0, +R_0)$. Elle est convergente en tout point intérieur à cet intervalle, divergente en tout point extérieur; il y a doute pour les extrémités de l'intervalle.

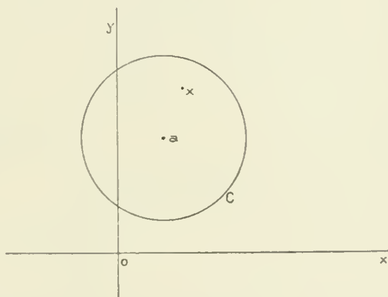
Une telle série représente dans son intervalle de convergence une fonction continue ayant des dérivées de tous les ordres qui s'obtiennent en la dérivant terme à terme.

244. L'étude des séries entières montre que ces séries représentent des fonctions holomorphes.

Nous allons maintenant démontrer que, réciproquement, toute fonction holomorphe est représentable par une série entière.

Série de Taylor. — Soit $f(z)$ une fonction d'une variable complexe z, dont on sait qu'elle est holomorphe dans un cercle C de centre a (contour compris) (*fig.* 21): x étant un point quelconque

Fig. 21.



intérieur au cercle C, on a la formule

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Écrivons

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a-(x-a)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{x-a}{z-a}}.$$

En tout point du cercle C, on a

$$\left|\frac{x-a}{z-a}\right| < 1,$$

de sorte que, en vertu de la théorie de la division étendue aux fonc-

tions de variables complexes, $\dfrac{1}{1-\dfrac{x-a}{z-a}}$ peut se remplacer par la progression géométrique décroissante

$$1+\frac{x-a}{z-a}+\ldots+\frac{(x-a)^n}{(z-a)^n}+\ldots,$$

d'où

$$\frac{f(z)}{z-x}=\sum_{n=0,1,\ldots}\frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^{n+1}}.$$

Considérons cette dernière relation. En tout point du cercle C, la série du second membre est normalement convergente. En effet, soient M une borne supérieure de $|f(z)|$, r le module de $x-a$, R le module de $z-a$, c'est-à-dire le rayon du cercle C.

Le terme général de cette série est en module plus petit que $\frac{r^n M}{R^{n+1}}$, qui est le terme général d'une progression géométrique décroissante. Donc la série peut être intégrée terme à terme sur le contour C, et l'on a

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0,1,\ldots}\int_C\frac{(x-a)^n f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Rappelons que nous avons trouvé (n° 227, p. 22)

$$f(a)=\frac{1}{2i\pi}\int_C\frac{f(z)\,dz}{z-a},\qquad f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2i\pi}\int_C\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

d'où, en substituant dans l'égalité précédente,

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots.$$

C'est la *série de Taylor*.

On voit que *toute fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur et sur le contour d'un cercle de centre a est représentable à l'intérieur par une série entière en $(z-a)$.*

245. *Série de Laurent.* — Supposons qu'une fonction $f(z)$ soit holomorphe dans la couronne comprise entre deux cercles C et C′ de centre a et de rayons R, R′ (R′ < R) (*fig.* 22).

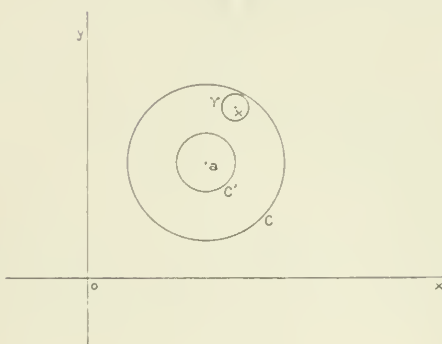
Étant donné un point x intérieur à la couronne, prenons un cercle γ de centre x intérieur lui aussi à la couronne; on sait que l'on a (n° 225)

$$(1)\qquad \int_C\frac{f(z)\,dz}{z-x}=\int_{C'}\frac{f(z)\,dz}{z-x}+\int_\gamma\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

les trois cercles C, C', γ étant parcourus dans le sens positif; or, l'intégrale de $\frac{f(z)}{z-x}$ le long de γ est égale à $2i\pi f(x)$. On déduit donc de (1)

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int_{C'} \frac{f(z)\,dz}{x-z}.$$

Fig. 22.



Développons séparément les deux intégrales du second membre. Pour la première, remplaçons $\frac{f(z)}{z-x}$ par la même somme que précédemment, c'est-à-dire par $\sum_{n=0,1,\ldots} \frac{(x-a)^n f(z)}{(z-a)^{n+1}}$, cette série étant encore normalement convergente. Pour la seconde intégrale, comme on a sur le cercle C'

$$\left|\frac{z-a}{x-a}\right| < 1,$$

nous écrirons

$$\frac{f(z)}{x-z} = \frac{f(z)}{x-a-(z-a)} = \frac{f(z)}{x-a}\,\frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}},$$

et, en développant en série convergente la quantité $\frac{1}{1-\frac{z-a}{x-a}}$, on obtient

$$\frac{f(z)}{x-z} = \sum_{p=0,1,\ldots} \frac{f(z)(z-a)^p}{(x-a)^{p+1}}.$$

Soit M la borne supérieure de $|f(z)|$ dans la couronne.

Le terme général de cette série est en module plus petit que $\left|\frac{MR'^p}{(x-a)^{p+1}}\right|$, qui est le terme général d'une progression géométrique décroissante. Donc la série est normalement convergente.

En intégrant terme à terme ces deux séries et en substituant dans l'équation qui donne $f(x)$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0,1,\ldots} \int_C \frac{(x-a)^n f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \frac{1}{2i\pi} \sum_{p=0,1,\ldots} \int_{C'} \frac{(z-a)^p f(z)\,dz}{(x-a)^{p+1}}.$$

On a ainsi pour $f(x)$ un développement de la forme

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \ldots + A_n(x-a)^n + \ldots$$
$$+ \frac{B_1}{x-a} + \ldots + \frac{B_p}{(x-a)^p} + \ldots,$$

les coefficients A et B étant définis par les relations

$$A_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}, \qquad B_p = \frac{1}{2i\pi} \int_{C'} (z-a)^{p-1} f(z)\,dz.$$

Pour tout point de la couronne où elle est holomorphe, $f(z)$ se présente ainsi comme la somme de deux séries, la première entière en $z-a$, la seconde entière en $\frac{1}{z-a}$. C'est la *série de Laurent.*

VII. — Fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$.

246. En appliquant la formule de Taylor (t. I, n° **121**, p. 117) à des *fonctions réelles,* on peut obtenir de ces fonctions des développements en séries entières. On a, sous certaines conditions, en appliquant la formule de Taylor au cas de $x = 0$ et mettant x au lieu de h, la formule de Maclaurin :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

S'il se trouve que, x étant fixé, le reste $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ tend vers zéro quand n croît indéfiniment, on en déduit que la série de terme général $\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$ est convergente et a pour somme $f(x)$; on a un développement de $f(x)$ en série entière.

Un cas dans lequel on est assuré que le reste tend vers zéro est celui où les valeurs des dérivées de tous les ordres sont inférieures en module à un nombre A. En effet, dans ces conditions, le reste R_n est en module plus petit que $A \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Or, $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ tend vers zéro, car c'est le terme général d'une série convergente $\left(\text{le rapport d'un terme au précédent, soit } \frac{x}{n+1}, \text{ tend vers zéro}\right)$.

Comme exemples de fonctions remplissant ces conditions, on peut citer les trois fonctions de variables réelles e^x, $\sin x$, $\cos x$. Pour $\sin x$ et $\cos x$, les dérivées de tous les ordres sont au plus égales en module à 1. Quant à e^x, les valeurs de toutes ses dérivées sont égales à e^x et forment par suite un ensemble borné.

Chacune de ces trois fonctions est donc représentable par une série entière; la formule de Maclaurin donne

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \ldots.$$

247. Soit maintenant z une variable complexe. Considérons les trois séries entières suivantes :

$$1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots,$$

$$\frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \ldots,$$

$$1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} + \ldots.$$

On reconnaît que ces trois séries sont convergentes quel que soit z, car le module du rapport d'un terme au précédent tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Chacune de ces séries représente donc une fonction de la variable complexe z qui est holomorphe dans tout le plan. Nous constatons de plus que, si z reçoit une valeur réelle x, les fonctions obtenues sont identiques respectivement à e^x, $\sin x$, $\cos x$. *Par définition, lorsque z est une variable complexe, nous désignerons ces trois fonctions par* e^z, $\sin z$, $\cos z$.

$\cos z$ est une fonction paire, $\sin z$ une fonction impaire.

En prenant les dérivées des trois séries, on trouve $(e^z)' = e^z$, $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$.

Je dis que l'on a

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'},$$

z et z' étant deux quantités complexes quelconques. En effet, les séries représentant e^z et $e^{z'}$ sont, quels que soient z et z', deux séries absolument convergentes. On peut leur appliquer le théorème de la multiplication des séries (n° 232, p. 28). Ordonnons les termes du

produit en groupant ensemble tous les termes de même degré h par rapport aux variables z et z'. Le terme général ainsi obtenu est

$$\frac{z^h}{h!} + \frac{z'}{1}\,\frac{z^{h-1}}{(h-1)!} + \frac{z'^2}{2!}\,\frac{z^{h-2}}{(h-2)!} + \ldots + \frac{z'^h}{h!},$$

ou encore

$$\frac{1}{h!}\left[z^h + \frac{h}{1}z'z^{h-1} + \frac{h(h-1)}{1.2}z'^2z^{h-2} + \ldots + z'^h\right],$$

ou

$$\frac{1}{h!}(z+z')^h.$$

On a donc

$$e^z e^{z'} = 1 + \sum_{h=1,2,\ldots} \frac{(z+z')^h}{h!} = e^{z+z'}.$$

248. Remplaçons z par iz dans le développement en série de e^z. Les termes de rang impair constituent le développement de $\cos z$, les termes de rang pair constituent le développement de $i\sin z$, d'où la relation

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z.$$

En remplaçant z par $-z$, on a

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z.$$

d'où, par addition et soustraction,

$$(1)\qquad \cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

En élevant au carré ces deux expressions et en ajoutant, on obtient

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

Il existe pour $\sin z$ et $\cos z$ des formules d'addition identiques aux formules relatives aux variables réelles. Pour établir ces formules, partons de la relation

$$e^{iz} e^{iz'} = e^{i(z+z')},$$

c'est-à-dire

$$(\cos z + i\sin z)(\cos z' + i\sin z') = \cos(z+z') + i\sin(z+z'),$$

ou, en développant le premier membre,

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos z\cos z' - \sin z\sin z' \\ \quad + i(\sin z\cos z' + \sin z'\cos z) = \cos(z+z') + i\sin(z+z'). \end{cases}$$

Récrivons la même formule en changeant z en $-z$ et z' en $-z'$; il vient

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos z \cos z' - \sin z \sin z' \\ \quad - i(\sin z \cos z' + \sin z' \cos z) = \cos(z+z') - i \sin(z+z').\end{array}\right.$$

Ajoutons et retranchons membre à membre les relations (2) et (3), il vient

$$\cos(z+z') = \cos z \cos z' - \sin z \sin z',$$
$$\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \sin z' \cos z.$$

Ce sont les mêmes relations que pour les variables réelles et, de même que pour les variables réelles, on en déduit toutes les relations qu'on obtient en trigonométrie.

On désigne par cos hyperbolique de z et sin hyperbolique de z, ce qu'on écrit $\operatorname{ch} z$ et $\operatorname{sh} z$, les fonctions suivantes :

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^{2p}}{2p!} + \ldots,$$
$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \ldots.$$

249. Considérons la fonction e^z, et mettons z sous la forme $x + iy$, x et y étant réels. Nous avons

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

La partie réelle de la fonction e^z est donc $e^x \cos y$, le coefficient de i est $e^x \sin y$. Comme e^x est positif, *le module de e^z est e^x, son argument est y à un multiple de 2π près.* Quand z augmente de $2i\pi$, le module de e^z ne change pas, son argument augmente de 2π. On exprime ce résultat en disant que e^z *admet la période* $2i\pi$.

On en déduit que e^{iz} et e^{-iz} admettent la période 2π; par suite, d'après (1), il en est de même de $\cos z$ et $\sin z$.

Cherchons d'une manière générale à résoudre l'équation

$$e^z = u,$$

u étant une quantité donnée. Distinguons deux cas.

1° $u \neq 0$. Posons

$$u = \rho(\cos\omega + i \sin\omega) = \rho\, e^{i\omega}.$$

Nous savons que, si z est de la forme $x + iy$, e^z a pour module e^x et pour argument y. Pour que les deux nombres complexes e^z et u soient égaux, il faut et il suffit que leurs modules soient égaux et que

leurs arguments diffèrent d'un multiple de 2π. On doit donc avoir

$$e^x = \rho, \qquad y = \omega + 2k\pi \qquad (k \text{ entier}).$$

La première équation détermine x et donne

$$x = \mathrm{L}\rho,$$

$\mathrm{L}\rho$ désignant le logarithme népérien (t. I, n° 73, p. 65); la seconde donne pour y une infinité de valeurs.

2° $u = 0$. Il n'y a pas alors de nombre réel x tel que l'on ait $e^x = 0$. Le problème est impossible.

250. Nous définirons les fonctions $\tan z$ et $\cot z$ par les formules

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

La première est définie pour toutes les valeurs de z, sauf celles pour lesquelles on a $\cos z = 0$, la seconde est définie pour toutes les valeurs de z, sauf celles pour lesquelles on a $\sin z = 0$; Or, on a $\cos z = 0$ quand on a

$$e^{iz} + e^{-iz} = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{2iz} = -1,$$

et l'on a $\sin z = 0$ quand on a

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{2iz} = 1.$$

D'ailleurs, en posant toujours $z = x + iy$, on a

$$e^{2iz} = e^{-2y}\, e^{2ix}.$$

Donc, pour ces points exceptionnels, on doit avoir $|e^{2iz}| = e^{-2y} = 1$, d'où $y = 0$, ce qui montre que z est *réel*.

Ainsi, les seules valeurs de z qui annulent $\cos z$ ou $\sin z$ sont les valeurs réelles de x qui annulent $\cos x$ ou $\sin x$, savoir $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $\cos z$ et $z = k\pi$ pour $\sin z$ (k entier).

On reconnaît que les fonctions $\operatorname{tang} z$ et $\cot z$ sont impaires et admettent la période π, d'après les propriétés de $\cos z$ et $\sin z$.

VIII. — Fonctions multiformes : $\operatorname{Log} z$, z^m, $\operatorname{arc\,tang} z$, $\operatorname{arc\,sin} z$.

251. Nous avons vu que l'équation

$$e^u = z = \rho\, e^{i\omega},$$

si $\rho \neq 0$, a une infinité de racines différant entre elles de multiples

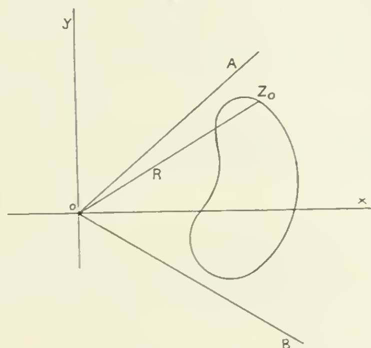
de $2i\pi$. Remarquons que, dans le cas de z réel et positif, une de ces racines est le nombre $L\rho$ (*cf.* t. I, nos 62 et 73).

D'une manière générale, chacune de ces racines est dite le *logarithme de* z. Nous désignerons l'ensemble de ces valeurs par $\text{Log}\, z$. D'après cela, on a

$$u = \text{Log}\, z = L\rho + i(\omega + 2k\pi).$$

Imaginons qu'on parte d'un point z_0 du plan, distinct de l'origine, par suite tel que le module ρ_0 de ce point soit différent de zéro. Choisissons pour $\text{Log}\, z_0$ une détermination en fixant l'argument, soit ω_0. Cela étant, si un point z se déplace dans le plan en partant de z_0 et en décrivant une courbe quelconque sans passer jamais par l'origine, la détermination de l'argument de z qui part de ω_0 varie d'une façon continue et a pour chaque point de la courbe une valeur déterminée. La détermination de $\text{Log}\, z$ qui part de la valeur $L\rho_0 + i\omega_0$ est donc pour chaque point bien déterminée et varie d'une manière continue.

Fig. 23.



Prenons deux demi-droites partant de O et considérons l'une des régions R du plan limitées par ces deux droites (*fig.* 23). Si z se déplace dans cette région et revient à son point de départ, la détermination de l'argument ω qui part de ω_0 reprend sa valeur initiale; en effet, la variation de cet argument est égale à un multiple de 2π; or, elle est plus petite que l'angle formé par les deux droites qui limitent la région R, angle qui est lui-même plus petit que 2π. Donc cette variation est nulle, et par suite la détermination de $\text{Log}\, z$ qui part de la valeur $L\rho_0 + i\omega_0$ reprend cette valeur quand z revient à son point de départ z_0.

Supposons maintenant que z décrive un contour simple fermé entourant l'origine. La détermination de l'argument de z, qui est égale

à ω_0 quand z est en z_0, devient égale à $\omega_0 + 2\pi$ quand z revient en z_0 après avoir parcouru une fois le contour dans le sens positif. Si z décrivait le contour dans le sens négatif, cette détermination deviendrait $\omega_0 - 2\pi$. Dans tous les cas, la détermination de l'argument varie de 2π, et la détermination choisie pour Log z varie de $2i\pi$.

On est conduit à considérer toutes les déterminations de Log z *comme les déterminations différentes d'une même fonction,* qu'on dit être une fonction *multiforme,* ces déterminations étant susceptibles de s'échanger entre elles quand z se déplace dans le plan d'une manière continue.

Le point o autour duquel se permutent les déterminations est dit *point critique* pour la fonction Log z.

Une détermination u de Log z est, dans la région R, dont on aura enlevé la partie contenue dans un cercle de centre o et de rayon ε, une fonction à détermination unique, autrement dit uniforme. C'est une fonction *inverse* (n° 218, p. 13) de $z = e^u$; c'est donc une fonction holomorphe de u et sa dérivée est

$$u'_z = \frac{1}{z'_u} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{z}.$$

252. Si z et z' sont deux valeurs de la variable z telles que

$$z = \rho e^{i\omega}, \qquad z' = \rho' e^{i\omega'},$$

on a

$$\text{Log}\, z + \text{Log}\, z' = \text{L}\rho\rho' + i[\omega + \omega' + 2(k + k')\pi].$$

Or, le produit zz' a pour module $\rho\rho'$ et pour argument $\omega + \omega'$. On a donc

$$\text{Log}\, zz' = \text{Log}\, z + \text{Log}\, z',$$

en entendant par là que la somme de deux déterminations quelconques de Log z et Log z' est une détermination de Log zz'.

253. Si l'on considère la fonction Log$(z - a)$, où a est un nombre complexe donné, en posant $z = a + z'$, on reconnaît que a joue pour cette fonction le rôle que joue o pour la fonction Log z.

Elle a une infinité de déterminations dont chacune est holomorphe dans une région obtenue en menant par a deux demi-droites quelconques, en prenant la portion du plan comprise entre ces deux demi-droites après en avoir retranché un cercle de centre a et de rayon ε. On en déduit, par exemple, que chacune de ces déterminations est holomorphe dans un cercle du plan ne contenant pas le point critique a.

En particulier, appliquons ce résultat au cas de $a = -1$. On voit que chaque détermination de $\text{Log}(1+z)$ est holomorphe dans tout cercle de centre O et de rayon plus petit que 1. Cette détermination est donc développable en série de Taylor, le développement étant valable pour tout point intérieur au cercle C de rayon 1. Prenons, par exemple, la détermination qui s'annule pour $z = 0$, et cherchons son développement. On a

$$f(z) = \text{Log}(1+z),$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z}, \quad f''(z) = -\frac{1}{(1+z)^2}, \quad \ldots, \quad f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+z)^n},$$

d'où

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

La formule de Taylor donne donc

$$\text{Log}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots,$$

le développement étant valable pour tous les points intérieurs au cercle C, réserve étant faite pour les points du cercle. En particulier, le développement est valable pour toutes les valeurs réelles de z inférieures à 1 en valeur absolue.

254. Nous allons faire maintenant l'étude de la série sur le cercle de convergence.

Deuxième lemme d'Abel. — *Soit $a_0, a_1, \ldots, a_p, \ldots$ une suite infinie de quantités telles que les sommes*

$$(1) \qquad S_p = a_0 + a_1 + \ldots + a_p$$

sont toutes inférieures en module à un nombre A. Soit d'autre part

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_p, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres positifs décroissants et tendant vers zéro. Je dis que la série

$$(2) \qquad a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_p\alpha_p + \ldots$$

est convergente.

En effet, la somme

$$a_{n+1} + \ldots + a_{n+h},$$

qui est égale à $S_{n+h} - S_n$, est en module plus petite que $2A$. Donc,

par application du premier lemme d'Abel (nº 242, p. 41), on a

$$| a_{n+1}\alpha_{n+1} + \ldots + a_{n+h}\alpha_{n+h} | < 2A\alpha_{n+1}.$$

Soit Σ_n la somme des $n+1$ premiers termes de la série (2). Cette inégalité s'écrit

$$| \Sigma_{n+h} - \Sigma_n | < 2A\alpha_{n+1}.$$

Quand n croît indéfiniment, $2A\alpha_{n+1}$ tend vers zéro. Donc la somme Σ_n satisfait aux conditions du théorème de Cauchy (nº 210, p. 4) et, par suite, a une limite; donc la série (2) est convergente.

255. Cela posé, étudions la série de terme général $(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}$ sur le cercle de rayon 1. On a sur ce cercle

$$z = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \qquad z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

θ désignant l'angle du rayon variable Oz avec Ox. Nous sommes conduits à étudier les séries

$$\cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \ldots,$$
$$\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \ldots.$$

En changeant θ en $\theta+\pi$, ces séries se changent, au signe près, en

$$\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} + \ldots,$$
$$\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots.$$

Nous allons montrer que les sommes suivantes :

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta,$$
$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta,$$

sont, quand n varie, bornées en module, quel que soit θ, excepté pour les valeurs de la forme $\theta = 2k\pi$.

Partons de l'identité

$$e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \ldots + e^{ni\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}}.$$

Dans le second membre, le numérateur est en module plus petit que 2. Le dénominateur est différent de zéro si $\theta \neq 2k\pi$. Donc, en écartant le cas de $\theta = 2k\pi$, on a

$$|e^{i\theta} + \ldots + e^{ni\theta}| < \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$$

et, en remplaçant θ par $-\theta$,

$$|e^{-i\theta}+\ldots+e^{-ni\theta}|<\frac{2}{|1-e^{-i\theta}|}.$$

Or, on a

$$\cos\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+\ldots+e^{ni\theta}+e^{-i\theta}+\ldots+e^{-ni\theta}),$$

$$\sin\theta+\ldots+\sin n\theta=\frac{1}{2i}(e^{i\theta}+\ldots+e^{ni\theta}-e^{-i\theta}-\ldots-e^{-ni\theta}).$$

Donc les deux sommes qui figurent dans les premiers membres de ces relations sont bornées quand n varie. On en déduit, par application du deuxième lemme d'Abel, la convergence des séries suivantes :

$$\cos\theta+\frac{\cos2\theta}{2}+\ldots+\frac{\cos n\theta}{n}+\ldots,$$

$$\sin\theta+\frac{\sin2\theta}{2}+\ldots+\frac{\sin n\theta}{n}+\ldots,$$

et, par suite (en remplaçant θ par $\theta+\pi$), la convergence, pour $\theta\neq(2k+1)\pi$, des séries

(1) $$\cos\theta-\frac{\cos2\theta}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\cos n\theta}{n}+\ldots,$$

(2) $$\sin\theta-\frac{\sin2\theta}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n}+\ldots.$$

Pour $\theta=(2k+1)\pi$, la série (2) a tous ses termes nuls, mais la série (1) est divergente (série harmonique).

Donc la série

$$\frac{z}{1}-\frac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots$$

est convergente sur son cercle de convergence, sauf pour $z=-1$.

On a vu (n° **242**, p. 41) que, si une série est convergente en un point du cercle de convergence et si un point variable tend vers ce point du cercle en se déplaçant à l'intérieur du cercle sur le rayon correspondant, la valeur de la fonction sur le cercle est la limite de ses valeurs sur le rayon à l'intérieur du cercle. D'autre part, la fonction $\operatorname{Log}(1+z)$ est continue quand z se déplace sur le rayon. Donc *il y a, en tous les points intérieurs au cercle et en tous les points du cercle, sauf au point* $z=-1$, égalité entre $\operatorname{Log}(1+z)$ et la série précédente, la détermination de $\operatorname{Log}z$ étant celle qui s'annule

en même temps que z. En résumé, on a, si $|z| \leqq 1$ et $z \neq -1$,

$$\operatorname{Log}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \ldots.$$

256. Quand z est égal à $e^{i\theta}$, on a

$$1 + z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Faisons varier θ entre $-\pi$ et $+\pi$, les valeurs extrêmes étant exclues. Dans ces conditions, $\cos\frac{\theta}{2}$ reste positif; donc on a

$$|1+z| = 2\cos\frac{\theta}{2}.$$

Quant à l'argument de $1+z$, c'est $\frac{\theta}{2}$. Par conséquent, $\operatorname{Log}(1+z)$ a pour partie réelle $L\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)$ et, pour coefficient de i, $\frac{\theta}{2} + 2k\pi$. Mais, d'après le développement en série de $\operatorname{Log}(1+z)$, la partie réelle de $\operatorname{Log}(1+z)$ est la série (1), le coefficient de i est la série (2). Nous avons donc, pour $-\pi < \theta < \pi$,

(3) $$L\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \ldots,$$

(4) $$\frac{\theta}{2} + 2k\pi = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \ldots.$$

Considérons la formule (3). Une valeur *quelconque* de θ, augmentée d'un multiple convenable de 2π, donne une valeur θ_0 comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, et qui, par suite, vérifie la relation (3); on a d'ailleurs

$$\cos n\theta = \cos n\theta_0, \qquad \left|\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\frac{\theta_0}{2}.$$

Donc, quel que soit $\theta \neq (2k+1)\pi$, on a

$$L\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right| = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \ldots.$$

Prenons maintenant la relation (4). Pour déterminer k, faisons $\theta = 0$. On trouve $k = 0$, de sorte que l'on a

$$\frac{\theta}{2} = \sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \ldots \qquad (-\pi < \theta < \pi).$$

Comme tous les termes du second membre ont pour période 2π, la

série du second membre est convergente quel que soit $\theta \neq (2k+1)\pi$. D'ailleurs, pour $\theta = (2k+1)\pi$, les termes de la série sont tous nuls. En résumé, *la série converge quel que soit* θ et représente une certaine fonction $f(\theta)$ jouissant des propriétés suivantes :

Pour $-\pi < \theta < \pi$, on a $f(\theta) = \frac{\theta}{2}\cdot$

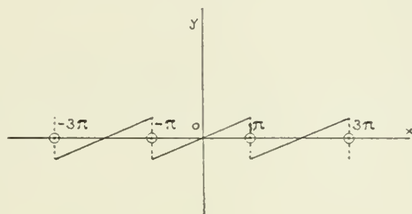
Pour $\theta = -\pi$ et $\theta = \pi$, on a $f(\theta) = 0$.

Par conséquent, si nous posons

$$\theta = x, \qquad f(\theta) = y,$$

$f(\theta)$ est représentée dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, les limites étant exclues, par un segment de droite ayant pour équation $y = \frac{x}{2}$ et par deux points isolés correspondant à ces limites (*fig.* 24).

Fig. 24.



Comme $f(\theta)$ est une fonction périodique et admet pour période 2π, on voit que, géométriquement, $f(\theta)$ sera représentée par une succession de segments de droites et de points isolés. Nous avons là un exemple de *fonction discontinue représentée par une série de fonctions continues.*

257. *Fonction* z^m. — z étant un nombre complexe quelconque différent de zéro, m un nombre complexe quelconque, nous poserons par définition

$$z^m = e^{m \operatorname{Log} z},$$

$\operatorname{Log} z$ étant l'une quelconque des déterminations de la fonction logarithmique définie précédemment. Remarquons que cette relation est bien vérifiée dans le cas où z est réel et positif, et m réel, $\operatorname{Log} z$ étant remplacé par $\mathrm{L}z$ (*cf.* t. I, nos 62 et 73). Dans le cas général, soit

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad m = p + iq.$$

On a alors

$$z^m = e^{(p+iq)[\mathrm{L}\rho+i(\varphi+2k\pi)]} = e^{p\,\mathrm{L}\rho - q(\varphi+2k\pi)}\,e^{i[q\,\mathrm{L}\rho+p(\varphi+2k\pi)]}.$$

Il y a pour z^m une infinité de déterminations. Dans toute région du plan où une détermination de $\mathrm{Log}\,z$ est fonction holomorphe de z, z^m est aussi fonction holomorphe de z.

Considérons en particulier le cas où m est réel; nous avons $q = 0$, d'où

$$z^p = e^{p\,\mathrm{L}\rho}\,e^{ip(\varphi+2k\pi)}.$$

Si p est entier, on voit qu'il y a pour z^p une seule détermination.

Si p est fractionnaire et égal à une fraction irréductible $\frac{r}{s}$, deux déterminations différentes de z^p diffèrent par le facteur $e^{ip2k\pi}$. Cette quantité peut prendre s valeurs distinctes. Il y a donc pour z^p s déterminations. Ces déterminations se permutent l'une dans l'autre quand z décrit un cercle de centre O, car, dans ce mouvement, l'argument de z augmente ou diminue de 2π.

Si p est irrationnel, il y a pour z^p une infinité de déterminations.

Sauf dans le cas où m est entier $\geqq 0$, le point $z = 0$ est critique.

Dans tous les cas, une détermination de z^m a une dérivée que nous allons calculer. On a, comme $z^m = e^{m\,\mathrm{Log}\,z}$,

$$(z^m)' = (e^{m\,\mathrm{Log}\,z})' = e^{m\,\mathrm{Log}\,z} \times \frac{m}{z} = m\,z^{m-1},$$

la détermination de z^{m-1} étant obtenue en prenant le même argument que dans la détermination choisie pour z^m.

258. Au lieu de z^m, considérons la fonction $(1+z)^m$. C'est le point $z = -1$ qui est point critique pour cette fonction, comme $z = 0$ l'est pour la fonction z^m. Dans tout cercle de centre O et de rayon plus petit que 1, $(1+z)^m$ est holomorphe. Il en résulte que le développement en série de Taylor est valable à l'intérieur du cercle de rayon 1. On a

$$\begin{aligned}
f(z) &= (1+z)^m,\\
f'(z) &= m(1+z)^{m-1},\\
f''(z) &= m(m-1)(1+z)^{m-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f^{(p)}(z) &= m(m-1)\ldots(m-p+1)(1+z)^{m-p}.
\end{aligned}$$

Prenons *la détermination de* $(1+z)^m$ *qui est égale à* 1 *pour*

$z = 0$. On voit que, pour $z = 0$, f, f', f'', ..., f^p prennent respectivement les valeurs 1, m, $m(m-1)$, ..., $m(m-1)\ldots(m-p+1)$, d'où

$$(1+z)^m = 1 + \frac{m}{1}z + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!}z^p + \ldots.$$

C'est la *série du binome;* elle est applicable pour $|z| < 1$.

259. La fonction z^m, quand m n'est pas entier, donne un exemple de fonction multiforme. Prenons, pour fixer les idées, la fonction

$$u = z^{\frac{1}{q}},$$

q étant entier positif. Avec les notations précédentes, nous aurons

$$z^{\frac{1}{q}} = \rho^{\frac{1}{q}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{q} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{q}\right).$$

Cette fonction a, comme nous l'avons vu, q déterminations qui s'obtiennent en donnant, à l'entier k, q valeurs entières consécutives, par exemple les valeurs $0, 1, 2, \ldots, q-1$. Une détermination de u correspondant à la valeur k se change, quand le point z décrit dans le sens positif un cercle de centre O, en la détermination correspondant à $k+1$. u est donc une fonction multiforme à q déterminations, ayant pour point critique l'origine.

260. Pour prendre un autre exemple, considérons la fonction u définie par l'équation suivante :

$$u^2 = (z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_p),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant des nombres complexes distincts. Quand z est distinct de $a_1, a_2, \ldots, a_p$, il y a deux valeurs distinctes de u satisfaisant à cette équation. Posons

$$z - a_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad \ldots, \quad z - a_p = r_p e^{i\theta_p}.$$

On a

$$u^2 = r_1 r_2 \ldots r_p\, e^{i(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_p)}.$$

u a donc toujours pour module $(r_1 r_2 \ldots r_p)^{\frac{1}{2}}$. Soit θ l'argument de u. 2θ est l'argument de u^2, mais u^2 a aussi pour argument

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p,$$

à un multiple de 2π près. On a donc

$$2\theta = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p + 2k\pi,$$

d'où

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_p}{2} + k\pi.$$

Suivant que k est pair ou impair, on a deux séries de valeurs pour θ et, par suite, deux déterminations opposées pour u. Quand z décrit un cercle de centre a_1 ne contenant aucun des points $a_2, \ldots, a_p$, l'argument θ_1 varie de 2π; donc θ varie de π, chacune des déterminations de u se change en l'autre. La fonction u est donc une fonction multiforme à deux déterminations, ayant pour points critiques les points $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

261. *Fonction* arc tang z. — Nous définissons la fonction

$$u = \operatorname{arc\,tang} z$$

par la relation

$$z = \operatorname{tang} u.$$

En remplaçant tang u par sa valeur (n° 250, p. 50), on obtient l'équation

$$z = \frac{1}{i}\frac{e^{iu} - e^{-iu}}{e^{iu} + e^{-iu}} = \frac{e^{2iu} - 1}{i(e^{2iu} + 1)},$$

qui, résolue par rapport à e^{2iu}, donne

$$e^{2iu} = \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i - z}{i + z},$$

d'où

$$u = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{i - z}{i + z}.$$

Nous prendrons donc par définition

$$\operatorname{arc\,tang} z = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{i - z}{i + z}.$$

arc tang z est ainsi une fonction multiforme. Cherchons ses points critiques.

Il y a point critique pour $\operatorname{Log}\frac{i - z}{i + z}$ et, par suite, pour arc tang z si l'on a

$$z = \pm i.$$

Dans un cercle qui ne contient aucun de ces points, toute déter-

mination du Log et, par suite, de arc tang z est holomorphe. Quand z décrit un petit cercle autour de l'un de ces points, la détermination choisie pour le Log augmente de $\pm 2i\pi$, la détermination correspondante de arc tang z augmente de $\pm\pi$. D'ailleurs, comme $z = \tang u$ admet la période π, il est sûr que u a une infinité de déterminations différentes entre elles de multiples de π.

Cherchons la dérivée de arc tang z. Nous avons

$$z'_u = 1 + \tang^2 u,$$

d'où

$$u'_z = \frac{1}{z'_u} = \frac{1}{1+z^2}.$$

Toute détermination de arc tang z est holomorphe à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1, puisque les seuls points critiques sont sur ce cercle. Pour avoir le développement en série entière de arc tang z, remarquons que nous avons immédiatement celui de la dérivée; on a, en effet, pour $|z| < 1$,

$$u'_z = \frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - \ldots,$$

d'où, par intégration,

$$\text{arc tang } z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots,$$

la détermination de arc tang z ainsi obtenue étant celle qui s'annule avec z, et le développement étant valable pour $|z| < 1$.

On arrive au même résultat en partant de la formule

$$\text{arc tang } z = \frac{1}{2i}[\operatorname{Log}(1+iz) - \operatorname{Log}(1-iz)]$$

et des développements

$$\operatorname{Log}(1+iz) = \sum \frac{(-1)^{n-1}(iz)^n}{n} \qquad (z \neq i),$$

$$\operatorname{Log}(1-iz) = \sum \frac{(-1)^{n-1}(-iz)^n}{n} \qquad (z \neq -i).$$

Cette méthode montre que *le développement de* arc tang z *est valable sur le cercle de convergence, sauf pour* $z = \pm i$.

En particulier, pour x réel et tel que $-1 \leq x \leq 1$, le développement représente la détermination de arc tang x qui s'annule avec x.

262. *Fonction* arc sin z. — Nous définirons la fonction

$$u = \text{arc sin } z$$

par la relation

$$z = \sin u = \frac{1}{2i}(e^{iu} - e^{-iu}) = \frac{e^{2ui} - 1}{2ie^{ui}}.$$

Posons $e^{ui} = t$; t est donné par la relation

$$2izt = t^2 - 1$$

ou

$$t^2 - 2izt - 1 = 0,$$

d'où, en résolvant cette équation du second degré.

$$t = iz \pm \sqrt{1 - z^2}.$$

On a donc

$$u = \frac{1}{i}\,\text{Log}\,t = \frac{1}{i}\,\text{Log}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

On voit qu'il y a pour u une infinité de déterminations se groupant en deux séries suivant le signe choisi devant le radical. D'ailleurs, la quantité dont on prend le Log ne s'annule jamais, car il faudrait pour cela que l'on eût

$$(iz)^2 = 1 - z^2, \qquad \text{d'où} \qquad 1 = 0.$$

Les seuls points critiques de u sont les points $z = \pm 1$, pour lesquels il y a échange de déterminations pour le radical.

Pour avoir la dérivée de u, appliquons le théorème des fonctions inverses: on trouve

$$u'_z = \frac{1}{z'_u} = \frac{1}{\cos u} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Toute détermination de arc sin z est holomorphe à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1, par suite, est développable en série entière dans ce cercle.

Pour avoir ce développement, cherchons le développement de la dérivée $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ par la série du binome. Le terme général est

$$\frac{(-1)^p(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2} - 1)\ldots(-\frac{1}{2} - p + 1)z^{2p}}{p!} = \frac{1.3\ldots(2p - 1)z^{2p}}{2^p p!}.$$

En intégrant la série $\sum \frac{1.3\ldots(2p - 1)z^{2p}}{2^p p!}$, on a le développement cherché :

$$\text{arc sin } z = \frac{z}{1} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2p - 1)}{2^p p!}\,\frac{z^{2p+1}}{2p + 1} + \ldots,$$

le développement étant valable à l'intérieur du cercle de rayon 1 et la détermination considérée étant la détermination de arc sin z qui s'annule avec z. En particulier, pour x réel et compris entre -1 et $+1$, le développement est valable et représente la fonction réelle arc sin x qui s'annule avec x. On constate, de plus, que la série est convergente pour $x = \pm 1$: le développement s'applique donc encore à ces valeurs, d'après un raisonnement déjà employé (n° 255, p. 55).

263. *Application à l'intégration des fractions rationnelles.* — Cette étude montre l'analogie qu'il y a, d'une part, entre la fonction logarithmique et les fonctions circulaires inverses, d'autre part, entre l'exponentielle et les fonctions trigonométriques.

Reprenons, au point de vue complexe, l'étude des fractions rationnelles : une telle expression est une somme d'éléments de la forme $\frac{A}{(z-a)^p}$. L'intégrale de cette expression est $\frac{1}{1-p}\frac{A}{(z-a)^{p-1}}$ si $p > 1$ et $A \operatorname{Log}(z-a)$ si $p = 1$.

Pour rattacher ces résultats à ceux qu'on a acquis dans le cas des variables réelles (t. I, n° 96, p. 83), supposons qu'on opère la décomposition d'une fraction rationnelle *à coefficients réels* en éléments simples, sans réunir ensuite les éléments correspondant aux racines imaginaires conjuguées. Soient, par exemple,

$$\frac{M_1+N_1 i}{x-\alpha-\beta i}+\frac{M_2+N_2 i}{(x-\alpha-\beta i)^2}+\ldots+\frac{M_h+N_h i}{(x-\alpha-\beta i)^h},$$
$$\frac{M_1-N_1 i}{x-\alpha+\beta i}+\frac{M_2-N_2 i}{(x-\alpha+\beta i)^2}+\ldots+\frac{M_h-N_h i}{(x-\alpha+\beta i)^h}$$

les termes correspondant à deux racines imaginaires conjuguées d'ordre h, $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$.

Nous avons, comme intégrale des termes dont le dénominateur est de degré $\lambda\,(\lambda \geqq 2)$, à un facteur numérique près,

$$\frac{M_\lambda+N_\lambda i}{(x-\alpha-\beta i)^{\lambda-1}}+\frac{M_\lambda-N_\lambda i}{(x-\alpha+\beta i)^{\lambda-1}}.$$

La somme de ces deux quantités est réelle.

Quant aux termes dont le dénominateur est de degré 1, ils donnent

$$(M_1+N_1 i)\operatorname{Log}(x-\alpha-\beta i)+(M_1-N_1 i)\operatorname{Log}(x-\alpha+\beta i).$$

Soient ρ le module et φ l'argument de la quantité $x-\alpha+\beta i$, on a

$$\rho=\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}, \qquad \varphi=\operatorname{arc\,tang}\frac{\beta}{x-\alpha},$$

et l'expression précédente devient

$$(M_1 + N_1 i)(L\rho - i\varphi) + (M_1 - N_1 i)(L\rho + i\varphi),$$

c'est-à-dire, après réduction,

$$2M_1 L\rho + 2N_1\varphi.$$

On retrouve les résultats précédemment établis.

Comme cas particulier, rappelons les formules suivantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = L(x + \sqrt{1+x^2}), \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x.$$

Au point de vue des variables complexes, ces deux formules n'en forment qu'une seule, à cause de l'identité de la fonction arc sin avec la fonction Log. On passe de l'une à l'autre en changeant x en ix.

IX. — Généralités sur les fonctions analytiques.

264. — On appelle *fonction analytique* une fonction d'une variable complexe z qui est holomorphe au moins dans une certaine région, sauf en certains points exceptionnels.

Un point a tel que la fonction analytique $f(z)$ est holomorphe dans un certain cercle de centre a est dit *point régulier* pour $f(z)$; on dit que $f(z)$ est *régulière* en a. On sait (nº 244) que dans un tel cercle $f(z)$ est représentable par une série entière en $(z-a)$.

On appelle *fonction entière* une fonction analytique qui est régulière en tout point du plan, c'est-à-dire holomorphe dans tout le plan.

Citons, comme exemple de fonctions entières, les fonctions e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\text{ch}\, z$, $\text{sh}\, z$, un polynome en z, ou encore toute série entière obtenue en multipliant les termes de la série e^z, par exemple, par des nombres arbitraires dont l'ensemble des modules est borné.

265. Théorème de Liouville. — *Une fonction entière dont le module est borné se réduit à une constante.*

En effet, soit $f(z)$ une fonction entière dont le module a pour borne supérieure un nombre fini A. Cette fonction est développable en série entière en z; le terme général du développement est $\frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0)$.

On a, pour $n \geqq 0$,

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}},$$

γ étant un cercle quelconque de centre O ; soit R le rayon de ce cercle. Évaluons une limite supérieure du module de $f^{(n)}(0)$. On a

$$\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right| \leq \frac{A}{R^{n+1}},$$

d'où

$$\left|\frac{f_0^{(n)}}{n!}\right| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{A}{R^{n+1}} = \frac{A}{R^n}.$$

Comme R peut être pris aussi grand que l'on veut, le second membre peut être rendu aussi petit que l'on veut ; donc, quel que soit n, $f^{(n)}(0)$ est nul. Par suite, dans le développement de Taylor,

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \ldots + \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots,$$

tous les termes sont nuls à partir du second : $f(z)$ se réduit à une constante.

266. Étant donnée une fonction analytique $f(z)$, tout point non régulier pour cette fonction est dit *point singulier*. Nous dirons que a est un *point singulier isolé* pour $f(z)$ si l'on peut trouver un cercle de centre a dans lequel n'existe pas d'autre point singulier que a.

Une première catégorie de points singuliers est constituée par les *pôles*. On dit que *a est un pôle d'ordre p* pour $f(z)$ si la fonction $(z-a)^p f(z)$, p étant un certain entier positif, admet a comme point régulier et tend vers une valeur différente de zéro quand z tend vers a. Dans cette hypothèse, la fonction $(z-a)^p f(z)$ est holomorphe dans un certain cercle de centre a ; on a donc un développement de la forme suivante :

$$(z-a)^p f(z) = B_0 + B_1(z-a) + \ldots + B_p(z-a)^p + B_{p+1}(z-a)^{p+1} + \ldots,$$

d'où

$$f(z) = \frac{B_0}{(z-a)^p} + \frac{B_1}{(z-a)^{p-1}} + \ldots + B_p + B_{p+1}(z-a) + \ldots.$$

A partir du $(p+1)^{\text{ième}}$ terme, on a une série entière en $z-a$, de sorte que la fonction $f(z)$ est représentée dans un certain cercle de centre a, en mettant à part le point a, par un développement qui comprend une série entière en $z-a$ et un nombre fini de fractions rationnelles. On voit que, quand z tend vers a, le module de f augmente indéfiniment.

On appelle *partie principale* du développement de $f(z)$ l'ensemble des termes fractionnaires.

267. Prenons comme exemple une fraction rationnelle irréductible $\frac{P(z)}{Q(z)}$. Elle a comme pôles toutes les valeurs de z qui annulent Q, l'ordre de chaque pôle étant le degré de multiplicité de ce point en tant que racine de Q. En effet, si a est racine d'ordre p de $Q(z)$, on peut poser

$$Q(z) = (z-a)^p R(z) \qquad [R(a) \neq 0],$$

de sorte que l'on a

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{(z-a)^p} \frac{P(z)}{R(z)}.$$

Dans un cercle de centre a et de rayon assez petit, $R(z)$ est différent de zéro; donc $\frac{P(z)}{R(z)}$ est fonction holomorphe dans ce cercle et a une valeur différente de zéro au point a. Donc ce point a est pôle d'ordre p pour $\frac{P}{Q}$.

Comme autre exemple, prenons la fonction

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

on reconnaît que l'on a

$$\sin z = z\psi(z),$$

$\psi(z)$ tendant vers 1 lorsque z tend vers zéro. Donc $z \cot z$ est fonction holomorphe de z au voisinage de l'origine. Par suite, $z = 0$ est un pôle d'ordre 1 pour $\cot z$.

268. *Un pôle, pour une fonction analytique, est un point singulier isolé.* — En effet, si a est pôle d'ordre p pour $f(z)$, cette fonction $f(z)$ est égale, dans un certain cercle C de centre a, à la somme d'une fonction holomorphe de z et de l'expression

$$\frac{B_0 + B_1(z-a) + \ldots + B_{p-1}(z-a)^{p-1}}{(z-a)^p},$$

laquelle est le quotient de deux fonctions qui sont holomorphes dans tout cercle C' contenu dans C et ne contenant pas a. Donc $f(z)$ est holomorphe dans les mêmes conditions. Il n'y a donc pas dans C de point singulier autre que a.

269. Une fonction analytique est dite *méromorphe* dans une certaine région si, dans cette région, elle n'a pas d'autres points singuliers que des pôles. Par exemple, une fraction rationnelle en z est fonction méromorphe dans tout le plan, car elle ne cesse d'être régulière qu'en un pôle.

Dans un domaine borné, les pôles d'une fonction méromorphe sont en nombre fini, car, si cela n'était pas, il y aurait (t. I, p. 42) un point A tel que tout cercle de centre A contiendrait une infinité de pôles; A ne serait donc ni un point régulier, ni un pôle (qui est nécessairement isolé).

Remarquons que, si $f(z)$ est analytique, son inverse $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ l'est aussi (nº 215, p. 9). En un point a où $f(z)$ est régulière et différente de zéro, $\varphi(z)$ est régulière. En un point a tel que

$$f(z) = (z-a)^p \psi(z),$$

p étant positif et $\psi(a)$ étant différent de zéro, on a

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z-a)^p} \frac{1}{\psi(z)},$$

a est donc un pôle d'ordre p pour φ; on dit que c'est un *zéro d'ordre p* pour f. Inversement, un pôle d'ordre p pour f est un zéro d'ordre p pour φ. Il résulte de là que *les zéros d'une fonction analytique, c'est-à-dire les points pour lesquels elle est nulle, sont des points isolés*, puisque ce sont les pôles d'une fonction analytique. On en déduit aussi que, *dans un domaine borné, une fonction méromorphe a un nombre fini de zéros.*

270. Tout point singulier d'une fonction analytique qui n'est pas pôle est dit *point singulier essentiel*. Il y a lieu d'étudier d'abord les *points singuliers essentiels isolés.*

Soit a un point singulier isolé. Traçons un cercle C de centre a ne contenant pas d'autre point singulier que a et un cercle C′ concentrique et intérieur à C. Dans la couronne comprise entre ces deux cercles, $f(z)$ est holomorphe et par suite développable en série de Laurent (nº 245, p. 46). Comme les coefficients du développement ne dépendent pas du rayon de C′, le développement est valable en tout point intérieur à C autre que a. Ainsi, *étant donné un point singulier isolé a, $f(z)$ est représentable en tout point intérieur à un certain cercle de centre a, sauf au point a, par un développe-*

ment de la forme suivante :

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + \ldots + \frac{B_1}{z-a} + \frac{B_2}{(z-a)^2} + \ldots$$

Si les termes fractionnaires de ce développement sont en nombre limité, a est un pôle et réciproquement. Il n'y a point singulier essentiel que si ces termes sont en nombre illimité.

Prenons, par exemple, la fonction $e^{\frac{1}{z}}$. On reconnaît que l'on a en tout point, l'origine étant mise à part,

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \ldots + \frac{1}{n!\,z^n} + \ldots$$

L'origine est un point singulier essentiel isolé pour cette fonction.

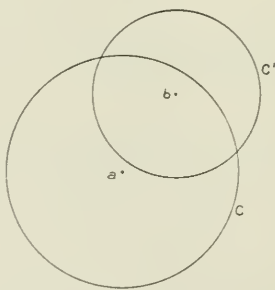
271. *Point à l'infini.* — Il peut y avoir lieu d'étudier une fonction analytique $f(z)$ quand z croît indéfiniment. On pose pour cela

$$z = \frac{1}{z'},$$

et l'on étudie la fonction $f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$ au voisinage du point $z' = 0$. Suivant que ce point est régulier ou singulier, zéro ou pôle pour $\varphi(z')$, on convient de dire que le *point à l'infini* du plan des z est pour $f(z)$ un point régulier ou singulier, un zéro ou un pôle.

272. *Prolongement analytique.* — Étant donnée une fonction analytique holomorphe dans un certain cercle C de centre a, soit b

Fig. 25.



un point intérieur à ce cercle (*fig.* 25). On sait que, dans C, la fonction est représentable par une série entière en $z-a$, soit $P(z-a)$.

Or, il existe un cercle de centre b tel que la fonction est aussi

holomorphe dans ce cercle, de sorte qu'il existe pour la fonction un développement en série entière en $z-b$, soit $Q(z-b)$. Il peut arriver que cette dernière série ait pour cercle de convergence un cercle C' renfermant une partie extérieure à C.

Les deux développements $P(z-a)$, $Q(z-b)$ représentent la même fonction $f(z)$ dans la partie commune à C et C'. On dit que ces deux séries sont le *prolongement analytique* l'une de l'autre, et que ce sont *deux éléments d'une même fonction analytique.*

Partant de C', on pourra répéter la même opération, et ainsi de suite. On peut ainsi définir une fonction analytique dans toute la région du plan dont les points sont intérieurs à l'un au moins des cercles d'une série C, C', C'', ..., deux cercles consécutifs ayant toujours une partie commune. L'opération que l'on effectue ainsi s'appelle le *prolongement analytique* de la fonction donnée.

X. — Résidus.

273. Soit a un point singulier isolé pour la fonction $f(z)$. Considérons (nº 245, p. 46) le coefficient B_1 de $\frac{1}{z-a}$ dans la série de Laurent qui représente $f(z)$ dans un cercle γ de centre a, ne contenant pas d'autre point singulier que a. On a

$$B_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)\,dz$$

ou encore

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi B_1.$$

Le nombre B_1 est dit le *résidu* de la fonction relatif au point singulier a.

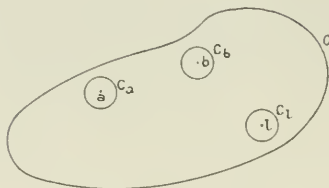
274. Théorème des résidus. — *Soit $f(z)$ une fonction analytique considérée dans une région* R *dont la frontière est un contour simple* C, *f étant régulière en tout point de* C *et ayant dans la région* R *un nombre fini de points singuliers, a, b, ..., l* (*fig.* 26).

Évaluons l'intégrale $\int_C f(z)\,dz$. Pour cela, de chacun des points singuliers a, b, ..., l comme centre, décrivons un cercle qui ne contienne pas d'autre point singulier que son centre. Soient C_a,

C_l, ..., C_l ces cercles. On a (n° 225, p. 19)

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_a} f(z)\,dz + \int_{C_b} f(z)\,dz + \ldots + \int_{C_l} f(z)\,dz,$$

Fig. 26.



car $f(z)$ est régulière en tout point de la région obtenue en enlevant de R ces différents cercles.

D'après le n° 273, en appelant A, B, ..., L les résidus de f relatifs à a, b, ..., l, la formule précédente donne

$$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi(A + B + \ldots + L).$$

Ainsi *l'intégrale de f prise dans le sens positif le long de* C *est égale au produit par* $2i\pi$ *de la somme des résidus relatifs aux différents points singuliers contenus dans* R. C'est le théorème général des résidus.

275. Considérons le résidu relatif à un pôle a d'ordre 1. Il y a dans le développement de f un seul terme fractionnaire; son coefficient, qui est le résidu, est donc certainement différent de zéro. C'est la limite, pour $z = a$, de l'expression $(z-a)f(z)$. Supposons, par exemple, que $f(z)$ puisse se mettre sous la forme d'une fraction $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, a étant zéro simple de Q et n'annulant pas P. On a, dans ces conditions,

$$Q(z) = (z-a)R(z), \qquad R(a) \neq 0.$$

Le résidu relatif à a est $\dfrac{P(a)}{R(a)}$. Or, on déduit de la relation précédente

$$Q'(z) = R(z) + (z-a)R'(z),$$

d'où, en faisant $z = a$,

$$Q'(a) = R(a),$$

de sorte que le résidu est égal à $\dfrac{P(a)}{Q'(a)}$.

Si a est pôle d'ordre $p > 1$ pour f, le résidu est le coefficient de $(z-a)^{p-1}$ dans le développement de la fonction holomorphe

$$(z-a)^p f(z).$$

Il convient de remarquer que, dans le cas d'un pôle d'ordre supérieur à 1 ou d'un point singulier essentiel, le résidu peut être différent de zéro ou nul.

276. Supposons que $f(z)$ soit méromorphe dans la région R, c'est-à-dire n'ait pas d'autres points singuliers que des pôles. Considérons l'intégrale $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$. La fonction $\frac{f'}{f}$ ne peut avoir pour points singuliers que les zéros et les pôles de f. Soit a un pôle ou zéro de f.

On peut poser, dans les deux cas,

$$f(z) = (z-a)^p \varphi(z),$$

$\varphi(a)$ étant fini et différent de zéro. Si $p < 0$, a est un pôle d'ordre égal à $-p$; si $p > 0$, a est un zéro d'ordre p.

On a, par dérivation logarithmique,

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{p}{z-a}.$$

La fonction $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est régulière au point a, de sorte que la fonction $\frac{f'}{f}$ admet a comme pôle simple, le résidu correspondant étant p. On en conclut que, si f possède dans la région R, limitée par le contour simple C, h pôles et k zéros, chaque zéro ou pôle étant compté avec son ordre de multiplicité, on a

$$\int_C \frac{f'(z)\, dz}{f(z)} = 2i\pi(k-h).$$

277. Le théorème des résidus a de nombreuses applications; il permet, par exemple, d'évaluer certaines intégrales définies réelles.

Prenons la fonction

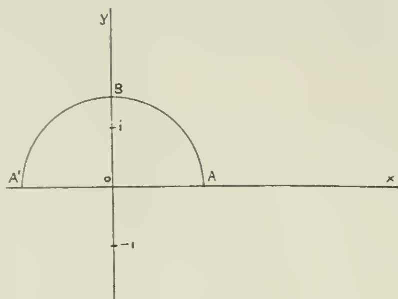
$$f(z) = \frac{e^{imz}}{z^2+1},$$

m étant un nombre positif. Cette fonction admet comme points singuliers les deux points i et $-i$. Considérons le contour formé par une demi-circonférence de rayon $R > 1$ et un diamètre A'A de cette

demi-circonférence (*fig.* 27); on a, d'après le théorème des résidus,

$$\int_{ABA'A} f(z)\,dz = 2i\pi R_i,$$

Fig. 27.



R_i étant le résidu relatif au point singulier $z = i$. Comme i est une racine simple de $1 + z^2$, on a

$$R_i = \lim_{z=i} (z - i) f(z) = \lim_{z=i} \frac{e^{imz}}{z + i},$$

d'où

$$R_i = \frac{e^{-m}}{2i}$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \int_{ABA'A} \frac{e^{imz}}{z^2 + 1} dz = \pi e^{-m}.$$

D'autre part, évaluons directement l'intégrale prise d'abord le long de la demi-circonférence ABA', puis le long du diamètre $A'A$. On a, sur le cercle,

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta),$$

d'où

$$e^{imz} = e^{mR(i\cos\theta - \sin\theta)},$$

$$|e^{imz}| = e^{-mR\sin\theta};$$

$m\sin\theta$ reste positif ou nul sur la demi-circonférence ABA', d'où

$$|e^{imz}| \leqq 1,$$

et, comme le module de la somme $z^2 + 1$ est supérieur ou égal à la différence des modules $R^2 - 1$, on a

$$\left|\frac{e^{imz}}{z^2 + 1}\right| \leqq \frac{1}{R^2 - 1},$$

d'où, la longueur de ABA' étant πR,

$$\left| \int_{ABA'} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz \right| \leqq \pi R \frac{1}{R^2-1}.$$

On voit que, quand R grandit indéfiniment, le module de l'intégrale prise le long de la demi-circonférence ABA' tend vers zéro. D'ailleurs, on a, d'après (1),

$$(2) \qquad \pi e^{-m} = \int_{ABA'A} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz = \int_{ABA'} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz + \int_{A'A} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz.$$

Sur le diamètre $A'A$, z est réel; donc

$$\int_{A'A} \frac{e^{imz}}{z^2+1}\, dz = \int_{-R}^{+R} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\, dx.$$

Si nous faisons grandir R indéfiniment, la relation (2) donne, à la limite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{imx}}{x^2+1}\, dx = \pi e^{-m}.$$

En séparant dans cette intégrale la partie réelle et le coefficient de i, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{x^2+1}\, dx = \pi e^{-m}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin mx}{x^2+1}\, dx = 0.$$

La seconde de ces relations est évidente si l'on remarque que la fonction que l'on intègre est impaire, et que, par suite, les deux parties de l'intégrale concernant les intervalles $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ ont une somme nulle.

La première relation donne la valeur d'une intégrale définie réelle.

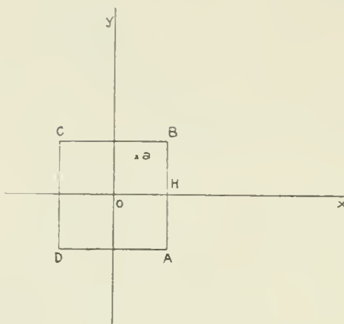
278. Comme autre application du calcul des résidus, considérons la fonction $\cot z$. Elle a pour singularités les zéros de $\sin z$, qui sont (n° 250, p. 50) les multiples de π: chacun d'eux est zéro simple pour $\sin z$. En effet, nous l'avons constaté pour $z = 0$, et la propriété en résulte pour les autres à cause de la périodicité de $\sin z$. Ainsi $\cot z$ *est une fonction méromorphe qui admet comme pôles simples tous les points* $z = k\pi$.

Soit a un point quelconque du plan distinct des points $k\pi$. Prenons un carré Γ de côtés parallèles aux axes et de centre O, qui contienne à son intérieur le point a et dont les intersections avec Ox

soient de la forme $x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$, m étant entier (*fig.* 28). Appliquons le théorème des résidus à l'intégrale

$$\int_\Gamma \frac{\cot z}{z-a}\,dz.$$

Fig. 28.



La fonction $\frac{\cot z}{z-a}$ a pour pôles les pôles de $\cot z$ et le point $z = a$. Les pôles de $\cot z$ contenus à l'intérieur de Γ sont les points $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, \pm m\pi$. Le résidu R_h relatif au point $z = h\pi$ est égal à

$$\lim_{z=h\pi} \frac{(z-h\pi)\cot z}{z-a}.$$

Posons $z = h\pi + z'$; on a

$$\lim_{z=h\pi} \frac{(z-h\pi)\cot z}{z-a} = \lim_{z'=0} \frac{z'\cot(h\pi+z')}{h\pi+z'-a}$$

ou encore

$$R_h = \lim_{z'=0} \frac{z'}{\sin z'}\,\frac{\cos z'}{h\pi+z'-a} = \frac{1}{h\pi-a}.$$

Pour le point $z = a$, le résidu est $\cot a$. Par conséquent, on a, par le théorème des résidus,

$$(1) \qquad \int_\Gamma \frac{\cot z}{z-a}\,dz = 2i\pi\left(\cot a + \sum_{h=0,\pm1,\ldots,\pm m} \frac{1}{h\pi-a}\right).$$

Cherchons maintenant à évaluer directement l'intégrale du premier membre. Écrivons

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} + \frac{a}{z^2\left(1-\frac{a}{z}\right)},$$

d'où

$$(2)\qquad \int_\Gamma \frac{\cot z}{z-a}\,dz = \int_\Gamma \frac{\cot z}{z}\,dz + a\int_\Gamma \frac{\cot z}{z^2\left(1-\frac{a}{z}\right)}\,dz.$$

La première intégrale du second membre est nulle; en effet, $\frac{\cot z}{z}$ est une fonction paire de z et le contour Γ est symétrique par rapport à l'origine. Donc deux éléments du contour symétriques par rapport à O donnent deux éléments d'intégrale dont la somme est nulle.

Étudions la seconde intégrale lorsque Γ s'éloigne indéfiniment. Évaluons le module de $\cot z$. On a

$$\cot z = i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}},$$

ou, en remplaçant z par $x+iy$,

$$\cot z = i\,\frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)},$$

$$\cot z = \frac{(e^{y}-e^{-y})\sin x + i(e^{y}+e^{-y})\cos x}{-(e^{y}-e^{-y})\cos x + i(e^{y}+e^{-y})\sin x},$$

d'où, en prenant le module du numérateur et le module du dénominateur,

$$|\cot z| = \sqrt{\frac{(e^{y}-e^{-y})^2\sin^2 x + (e^{y}+e^{-y})^2\cos^2 x}{(e^{y}-e^{-y})^2\cos^2 x + (e^{y}+e^{-y})^2\sin^2 x}},$$

$$(3)\qquad |\cot z| = \sqrt{\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}}.$$

Cela posé, considérons d'abord (*fig.* 28) les côtés AB et DC. Sur ces côtés, $2x$ est de la forme $(2m+1)\pi$, $\cos 2x$ est égal à -1; donc on a, d'après (3),

$$|\cot z| < 1.$$

Prenons maintenant les côtés BC et AD, et remarquons que l'on a toujours, en vertu de $-1 \leq \cos 2x \leq 1$,

$$|\cot z| \leq \sqrt{\frac{e^{2y}+e^{-2y}+2}{e^{2y}+e^{-2y}-2}}.$$

Sur BC et AD, cette limite supérieure du module est constante puisque y est constant. Quand y croît indéfiniment, elle tend vers 1. Par conséquent, en se donnant un nombre plus grand que 1, par exemple 2, il est possible de prendre m assez grand pour que l'on ait en tout point de Γ

$$|\cot z| < 2.$$

D'autre part, si m est assez grand, on a, pour tout point z de Γ,

$$\frac{a}{z} < \frac{1}{2}, \qquad 1 - \frac{a}{z} > \frac{1}{2}.$$

Supposons toutes ces conditions remplies, et évaluons alors une limite supérieure du module de la seconde intégrale du second membre de (2). On a (*fig.* 28), comme $|z| \geqq \mathrm{OH}$,

$$\left| \frac{\cot z}{z^2\left(1 - \frac{a}{z}\right)} \right| < \frac{2}{\mathrm{OH}^2 \frac{1}{2}},$$

d'où, la longueur du contour étant $8\,\mathrm{OH}$,

$$\left| \int_\Gamma \frac{\cot z}{z^2\left(1 - \frac{a}{z}\right)} dz \right| < 8\,\mathrm{OH}\,\frac{4}{\mathrm{OH}^2}.$$

Quand OH grandit indéfiniment, le module de cette intégrale tend donc vers 0, par suite aussi celui de $\int_\Gamma \frac{\cot z}{z - a} dz$. En nous reportant à l'équation (1) et faisant grandir m indéfiniment, on obtient

$$\lim_{m=\infty} \left(\cot a + \sum_{h=0, \pm 1, \ldots, \pm m} \frac{1}{h\pi - a} \right) = 0,$$

d'où, en mettant z au lieu de a, et en réunissant (pour $h \neq 0$) les deux termes $\frac{1}{z - h\pi}$, $\frac{1}{z + h\pi}$ en un seul, savoir $\frac{2z}{z^2 - h^2\pi^2}$,

$$\lim_{m=\infty} \left(\cot z - \frac{1}{z} - \sum_{h=1, \ldots, m} \frac{2z}{z^2 - h^2\pi^2} \right) = 0.$$

On en déduit le développement

$$\cot z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2 - \pi^2} + \ldots + \frac{2z}{z^2 - m^2\pi^2} + \ldots.$$

XI. — Séries entières à plusieurs variables.

279. On appelle *série entière à plusieurs variables* (trois, par exemple, x, y, z) une série de la forme

$$(1) \qquad \Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

les coefficients A et les variables x, y, z étant des nombres complexes.

Si l'on connaît un système de trois nombres positifs R, R', R'' tels que la série

$$(2) \qquad \Sigma |A_{\alpha,\beta,\gamma}| R^\alpha R'^\beta R''^\gamma$$

soit convergente, on reconnaît que, pour tout système de valeurs x, y, z des variables telles que

$$(3) \qquad |x| \leq R, \qquad |y| \leq R', \qquad |z| \leq R'',$$

la série (1) a ses termes au plus égaux en module à ceux de la série numérique convergente (2). Donc la série (1) est normalement convergente dans le système de cercles définis par les équations (3), et représente une fonction holomorphe de x, y, z quand x, y, z sont dans ces cercles. Par application des théorèmes généraux, cette fonction est dérivable terme à terme indéfiniment, en chaque point x, y, z, tel que $|x| < R$, $|y| < R'$, $|z| < R''$ (n° 238, p. 36).

De même, si l'on a une série de la forme

$$(4) \qquad \Sigma A_{\alpha,\beta,\gamma}(x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma,$$

et si l'on connaît des nombres R, R', R'' tels que la série (2) soit convergente, on en déduit que la série (3) représente une fonction holomorphe de x, y, z, lorsque x, y, z sont, dans leurs plans respectifs, à l'intérieur des cercles de centres x_0, y_0, z_0 et de rayons R, R', R''.

280. Réciproquement, soit une fonction $f(x, y, z)$ de plusieurs variables complexes, holomorphe par rapport à ces variables lorsque x, y, z font partie de certains cercles de centres x_0, y_0, z_0 dans leurs plans respectifs. Faisons d'abord un changement de variables de façon à prendre pour origine dans chaque plan les points x_0, y_0, z_0. Nous aurons alors à considérer, dans les plans x, y, z, des cercles C, C', C'' dont chacun a son centre à l'origine, et de rayons R, R', R''.

Soient x, y, z des valeurs des variables respectivement intérieures à ces cercles, et soit t une nouvelle variable. Si t reste inférieur en module aux quantités

$$\frac{R}{|x|}, \quad \frac{R'}{|y|}, \quad \frac{R''}{|z|}$$

(chacune de ces quantités devant être remplacée par $+\infty$ si son dénominateur est nul), les points tx, ty, tz sont respectivement à l'intérieur des cercles C, C', C''. Donc la fonction

$$\varphi(t) = f(tx, ty, tz)$$

est holomorphe de t dans le cercle $|t| < \rho$, si ρ est le plus petit des trois nombres $\frac{R}{|x|}$, $\frac{R'}{|y|}$, $\frac{R''}{|z|}$. Ces trois nombres étant supérieurs à 1, le point $t = 1$ est à l'intérieur de ce dernier cercle; par conséquent, la fonction $\varphi(t)$ est développable en série de Taylor pour la valeur $t = 1$, et l'on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{1}{1}\varphi'(0) + \ldots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \ldots.$$

Calculons les dérivées successives de $\varphi(t)$: on a

$$\varphi'(t) = x\frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + y\frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + z\frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}_{tx, ty, tz},$$

d'où

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)}_{0,0,0},$$

ou, en développant la puissance symbolique,

$$\varphi^{(n)}(0) = \sum \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_{0,0,0} x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

le signe Σ étant étendu à toutes les combinaisons des entiers positifs ou nuls α, β, γ telles que $\alpha + \beta + \gamma = n$.

En portant cette valeur de $\varphi^{(n)}(0)$ dans le développement de $\varphi(1)$, et revenant à la fonction f, on obtient

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x, y, z) &= f(0, 0, 0) + \ldots \\ &\quad + \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_{0,0,0} x^\alpha y^\beta z^\gamma + \ldots. \end{aligned} \right.$$

281. Dans la série (1), tous les termes en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ pour lesquels la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est la même sont réunis en un seul. *Je dis, en outre, que l'on peut séparer les différents termes en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ et les placer dans un ordre quelconque.* Il suffit pour cela de vérifier que la série ainsi obtenue, que nous désignerons par

$$(2)\qquad \sum \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(0, 0, 0)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\,\frac{x^\alpha\,y^\beta\,z^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!} \qquad (\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0),$$

est absolument convergente quels que soient x, y, z, pris à l'intérieur de C, C′, C″.

Pour faire cette vérification, nous allons d'abord calculer une limite supérieure du module des dérivées de f. Soit M une borne

supérieure de $|f|$ dans C, C', C''. Considérons une dérivée de la forme $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$. Supposons que y et z aient reçu des valeurs fixes; on a

$$\left(\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right)_{x=0} = \frac{\alpha!}{2i\pi}\int_C \frac{f(x, y, z)\,dx}{x^{\alpha+1}}.$$

Comme on a d'autre part

$$\left|\int_C \frac{f(x, y, z)\,dx}{x^{\alpha+1}}\right| \leq 2\pi R\,\frac{M}{R^{\alpha+1}},$$

il en résulte

$$\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}\right|_{x=0} \leq \frac{M\,\alpha!}{R^\alpha}.$$

Cela étant, fixons z, et considérons la dérivée $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}\right)_{x=0,\,y=0}$. On a

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}\right)_{x=0,\,y=0} = \frac{\beta!}{2i\pi}\int_{C'} \frac{\dfrac{\partial^\alpha f(0, y, z)}{\partial x^\alpha}}{y^{\beta+1}}\,dy,$$

et l'on en déduit de la même façon

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}\right|_{x=0,\,y=0} \leq \frac{M\,\alpha!\,\beta!}{R^\alpha R'^\beta}.$$

On a enfin

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right)_{x=0,\,y=0,\,z=0} = \frac{\gamma!}{2i\pi}\int_{C''} \frac{\dfrac{\partial^{\alpha+\beta} f(0, 0, z)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta}}{z^{\gamma+1}}\,dz,$$

d'où

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(0, 0, 0)}{\partial x^\alpha\,\partial y^\beta\,\partial z^\gamma}\right| \leq M\,\frac{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{R^\alpha R'^\beta R''^\gamma}.$$

Cela posé, considérons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left(1-\dfrac{y}{R'}\right)\left(1-\dfrac{z}{R''}\right)}.$$

En supposant $|x| < R$, $|y| < R'$, $|z| < R''$, on a

$$\frac{1}{1-\dfrac{x}{R}} = 1 + \frac{x}{R} + \frac{x^2}{R^2} + \ldots + \frac{x^\alpha}{R^\alpha} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{y}{R'}} = 1 + \frac{y}{R'} + \frac{y^2}{R'^2} + \ldots + \frac{y^\beta}{R'^\beta} + \ldots,$$

$$\frac{1}{1-\dfrac{z}{R''}} = 1 + \frac{z}{R''} + \frac{z^2}{R''^2} + \ldots + \frac{z^\gamma}{R''^\gamma} + \ldots.$$

Par multiplication des deux premières séries, qui sont absolument convergentes, on voit que la fonction $\frac{1}{\left(1-\frac{x}{R}\right)\left(1-\frac{y}{R'}\right)}$ a pour développement la série $\sum \frac{x^\alpha y^\beta}{R^\alpha R'^\beta}$; puis, en multipliant par la troisième, on reconnaît que φ est représentable par la série $\sum \frac{M x^\alpha y^\beta z^\gamma}{R^\alpha R'^\beta R''^\gamma}$, les termes de cette série étant écrits dans un ordre quelconque et le développement étant valable dès que l'on a $|x| < R$, $|y| < R'$, $|z| < R''$.

En comparant le coefficient du terme général de cette série en x, y, z avec la borne supérieure obtenue pour le module de la dérivée $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f(0,0,0)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$, on voit que dans le développement (1) de $f(x, y, z)$, le terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ a un coefficient moindre en module que le coefficient correspondant dans le développement de φ.

Comme le développement de φ forme une série convergente, on en conclut que la série (2), obtenue en écrivant les termes de (1) dans un ordre quelconque, est absolument convergente, ce qui établit la proposition.

282. En revenant au cas général où les cercles d'holomorphie C, C', C'' ont pour centres des points x_0, y_0, z_0, on a, pour $f(x, y, z)$, le développement suivant :

$$(4)\quad f(x,y,z) = \sum \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_{x_0, y_0, z_0} (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma,$$

α, β, γ prenant tous les systèmes de valeurs entières positives ou nulles.

Le développement est unique, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir pour une même fonction deux développements différents.

En effet, soit

$$(5)\qquad f = \sum A_{\alpha,\beta,\gamma} (x-x_0)^\alpha (y-y_0)^\beta (z-z_0)^\gamma$$

un autre développement. D'après le n° 279, p. 77, la série (5) est dérivable terme à terme. Si l'on prend α fois la dérivée par rapport à x, β fois la dérivée par rapport à y, γ fois la dérivée par rapport à z, et si l'on fait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, on obtient l'égalité

$$A_{\alpha,\beta,\gamma} = \frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} f}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}\right)_{x_0, y_0, z_0}.$$

Donc le second développement est identique au premier.

On dit qu'une fonction $f(x, y, z)$ est *régulière* pour le système de valeurs x_0, y_0, z_0 si elle est holomorphe quand x, y, z sont respectivement à l'intérieur de certains cercles de centres x_0, y_0, z_0. En tout point régulier d'une fonction, les résultats précédents sont applicables.

283. *Opérations sur les séries entières.* — Il arrive souvent que l'on peut, par application des théorèmes généraux, montrer qu'une fonction définie d'une certaine manière est holomorphe. Il en résulte, d'après ce qui précède, qu'elle est développable en série entière ; si l'on peut d'une façon quelconque former cette série, on sera d'avance assuré de sa convergence. On peut, en particulier, pour calculer ses coefficients, employer la méthode des coefficients indéterminés.

Soit, par exemple, une fonction holomorphe

$$y = a_0 + a_1 x + \dots$$

dont le développement est valable dans un certain cercle. Les fonctions y^2, y^3, ... sont fonctions holomorphes de x dans le même cercle. Chacune d'elles est donc représentable par une série entière. On obtiendra y^2 par la multiplication des séries

$$y^2 = (a_0 + a_1 x + \dots)(a_0 + a_1 x + \dots),$$
$$y^2 = a_0^2 + 2a_0 a_1 x + (a_1^2 + 2a_0 a_2)x^2 + \dots.$$

On peut trouver de même les développements de y^3, ...

Remarquons que le coefficient de x^p dans le développement d'une puissance quelconque de y dépend seulement de a_0, a_1, ..., a_p.

Un calcul analogue permet d'avoir l'expression du produit yz, y et z étant deux fonctions holomorphes de x données par leurs développements en séries entières.

On peut de même calculer le quotient de deux fonctions holomorphes et l'obtenir sous forme de série entière. Soient f et φ deux fonctions holomorphes dans certains cercles de centre O, φ ayant pour $x = 0$ une valeur différente de 0. Soient

$$f = a_0 + a_1 x + \dots, \qquad \varphi = b_0 + b_1 x + \dots \qquad (b_0 \neq 0).$$

Considérons le quotient

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots}{b_0 + b_1 x + \dots}.$$

Soit C un cercle d'holomorphie commun aux deux fonctions. Puisque

$b_0 \neq 0$, il y a un cercle C′ de centre O, contenu dans C, à l'intérieur duquel φ est différent de o. Dans le cercle C′, le quotient $\frac{f}{\varphi}$ est holomorphe.

En posant

$$\frac{f}{\varphi} = c_0 + c_1 x + \ldots,$$

nous devons avoir l'identité

$$a_0 + a_1 x + \ldots = (b_0 + b_1 x + \ldots)(c_0 + c_1 x + \ldots),$$

d'où

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0, \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0, \\ a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

b_0 étant différent de o, la première relation fournit c_0, la seconde c_1, la troisième c_2, et ainsi de suite. On a ainsi tous les coefficients de proche en proche.

On procéderait d'une manière identique s'il s'agissait de séries entières à plusieurs variables.

284. *Substitution d'une série entière dans d'autres séries entières.* — Soit

$$u = f(y, z, \ldots)$$

une fonction holomorphe des variables y, z, ..., qui sont elles-mêmes fonctions holomorphes de la variable complexe x. Considérons les développements en séries entières de ces différentes fonctions :

(1) $$u = A + By + Cz + Dy^2 + Eyz + Fz^2 + \ldots,$$

(2) $$y = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

(3) $$z = a' + b'x + c'x^2 + \ldots.$$

Supposons que les points $y = a$, $z = a'$ soient intérieurs aux cercles d'holomorphie relatifs à la fonction f. Dans ces conditions, on peut trouver des cercles γ, γ' de centres respectifs a, a', contenus respectivement dans les cercles d'holomorphie relatifs à f. Quand x reste dans un certain cercle Γ de centre O dans son plan, y et z restent dans γ et γ'; u est alors fonction holomorphe de x. Soit

(4) $$u = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$$

son développement. Le terme constant α est la valeur de u pour $x = 0$. On a donc

$$\alpha = A + Ba + Ca' + Da^2 + \ldots$$

Supposons qu'on remplace dans (1) y et z par leurs développements et qu'on calcule dans le nouveau développement obtenu le coefficient de x, ce coefficient sera égal à β, par identification avec (4). On peut ainsi, par identifications successives, obtenir tous les coefficients de (4). On reconnaît que l'on peut écrire (4) sous forme d'une série double, de la façon suivante :

$$\begin{array}{l} A + Ba \quad + Ca' \quad + \ldots \\ \quad + Bbx + Cb'x + \ldots \\ \quad + Bcx^2 + Cc'x^2 + \ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

En résumé, on voit que l'on peut effectuer la substitution de y et z par les séries qui les représentent, le nouveau développement obtenu étant valable dans un certain cercle Γ du plan des x.

285. *Fonctions implicites.* — Soit

$$f(x, y) = 0$$

une équation dans laquelle $f(x, y)$ est une fonction holomorphe de x, y dans certains cercles ayant pour centres les origines de leurs plans respectifs. On suppose, en outre, que l'on a

$$f(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \neq 0.$$

Dans ces conditions, il existe (n° 216, p. 11) pour y une fonction déterminée de x, holomorphe par rapport à x dans un certain domaine entourant l'origine du plan des x et satisfaisant à $f = 0$. Cette fonction holomorphe est représentable dans un certain domaine par une série entière. D'ailleurs, f est aussi représentable par une série entière, que nous pouvons considérer comme connue. Soit donc

$$f = Ax + By + Cx^2 + 2Dxy + Ey^2 + \ldots \qquad (B \neq 0),$$
$$y = ax + bx^2 + \ldots$$

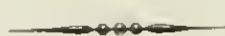
Remplaçons y par son développement dans f et écrivons que la fonction de x obtenue est identiquement nulle. On obtient les rela-

tions

$$A + Ba = 0, \qquad Bb + C + 2Da + Ea^2 = 0, \qquad \ldots.$$

B étant différent de o, la première détermine a, la seconde détermine b, et ainsi de suite de proche en proche.

Dans tous ces exemples, on voit que les coefficients inconnus se déterminent chacun par une équation linéaire. Par suite, si les coefficients des fonctions données sont tous réels, il en est de même pour les coefficients obtenus.



CHAPITRE V.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I. — Existence des solutions des systèmes différentiels.

286. On sait qu'on appelle *équation différentielle* une équation entre une variable, une fonction inconnue de cette variable et les dérivées de cette fonction jusqu'à un certain ordre. Dans l'étude des équations différentielles, il y a lieu de se placer à deux points de vue différents, suivant que les variables que l'on considère sont réelles ou complexes. Mais il est important de remarquer que les fonctions de variables réelles qu'on a le plus souvent occasion de rencontrer, étant représentables par des séries entières, rentrent dans la catégorie des fonctions analytiques. On conçoit donc que, même s'il s'agit de variables réelles, il peut y avoir avantage à se placer au point de vue des variables complexes.

Si l'on a plusieurs équations entre plusieurs fonctions inconnues y, z, ... d'une variable x et des dérivées de divers ordres de ces fonctions, on dit que l'on a un *système d'équations différentielles* ou un *système différentiel*. On peut toujours remplacer un tel système par un autre système où n'entrent que les dérivées premières des fonctions inconnues. En effet, si y par exemple entre par ses dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$, on introduit les fonctions auxiliaires suivantes :

$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \qquad y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \qquad \ldots, \qquad y_{n-1} = \frac{dy_{n-2}}{dx},$$

et l'on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{dy_{n-2}}{dx}, \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dy_{n-1}}{dx}.$$

Il suffit de remplacer $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., $\frac{d^n y}{dx^n}$ par ces valeurs dans les équa-

tions proposées pour avoir un nouveau système renfermant $n-1$ équations et $n-1$ inconnues en plus, mais dans lequel les seules dérivées des fonctions $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ qui interviennent sont les dérivées premières.

287. Cela posé, considérons un système de n équations différentielles de la forme suivante :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Nous allons démontrer que, *si les fonctions* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *des variables complexes* $x, y_1, \ldots, y_n$ *sont régulières au point* $x = a$, $y_1 = b_1, \ldots, y_n = b_n$, *il existe pour* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *un système de fonctions holomorphes de* x *dans un certain cercle de centre* a, *satisfaisant aux équations* (1) *et prenant respectivement les valeurs* $b_1, \ldots, b_n$ *lorsque* x *prend la valeur* a.

Pour simplifier l'écriture, faisons d'abord un changement de variables $x = a + X$, $y_1 = b_1 + Y_1, \ldots$ qui ramène le système a, $b_1, \ldots, b_n$ au système $0, 0, \ldots, 0$; il s'agit alors de trouver pour $y_1, \ldots, y_n$ des fonctions holomorphes de x satisfaisant aux équations (1) et s'annulant en même temps que x. De telles fonctions, si elles existent, sont représentables par des séries entières de la forme suivante :

$$(2)\qquad y_i = \alpha_i x + \beta_i x^2 + \gamma_i x^3 + \ldots.$$

En remplaçant dans les équations (1) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par ces séries, les deux membres de chaque équation doivent être des séries identiques. Les fonctions f_i sont régulières au point $0, 0, \ldots, 0$; soit, pour $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$f_i = A_i + B_i x + C_i y_1 + D_i y_2 + \ldots + E_i x^2 + \ldots;$$

on doit avoir (n° 284, p. 82)

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= \alpha_i + 2\beta_i x + \ldots \\ &= A_i + B_i x + C_i(\alpha_1 x + \beta_1 x^2 + \ldots) + D_i(\alpha_2 x + \beta_2 x^2 + \ldots) + \ldots. \end{aligned}$$

En égalant les termes constants dans les deux membres, on a la valeur de α_i; en égalant les coefficients de x, on a dans le premier membre β_i, dans le second une quantité qui est connue dès que les α sont connus; on en déduit β_i.

D'une manière générale, dans le second membre, le coefficient de x^p dépend des coefficients des f_i et des coefficients α, β, γ, ... relatifs à x, x^2, ..., x^p dans les développements des y; en l'égalant au coefficient de x^p dans le premier membre, qui dépend de la valeur du coefficient de x^{p+1} dans y_i, on aura ce dernier coefficient; on peut donc avoir de proche en proche tous les coefficients des séries y_i. On exprime ce résultat en disant qu'*on peut trouver, pour les y_i, des séries entières* (2) *satisfaisant formellement aux équations* (1).

S'il y a un système de fonctions holomorphes, solutions de (1), ce système est nécessairement donné par les séries (2), et ces séries constituent effectivement un système de solutions de (1) si elles sont convergentes. Nous sommes donc ramenés à démontrer que les séries (2) sont convergentes dans un certain cercle.

288. Soit M une borne supérieure pour les modules des f_i quand x, y_1, ..., y_n restent dans leurs cercles de convergence respectifs, et soit ρ le rayon minimum de ces cercles. Considérons la fonction

$$\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\rho}\right)\left(1-\frac{y_1}{\rho}\right)\cdots\left(1-\frac{y_n}{\rho}\right)}$$

et le système auxiliaire

$$(4) \qquad \frac{dy_i}{dx} = \varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On sait que la fonction φ est développable en série entière par rapport à x, y_1, ..., y_n et que chacune des fonctions f_i, développée en série entière, a des termes au plus égaux en module aux termes correspondants du développement de φ (n° 281, p. 80).

Appliquons la méthode du numéro précédent au système d'équations (4). Les coefficients A_i, B_i, ... qui figurent dans f_i sont remplacés par des nombres positifs qui leur sont supérieurs ou égaux en module. Si l'on calcule, pour le système (4), les coefficients α, on obtient des valeurs positives au moins égales en module aux valeurs obtenues pour le système (1). Quant aux coefficients β, γ, ... que l'on calcule successivement, chacun d'eux est défini comme une certaine

combinaison linéaire à coefficients positifs portant d'une part sur les quantités A_i, B_i, ... qui figurent dans f_i, d'autre part sur les coefficients α, β, ... déjà obtenus. Il résulte de là que les coefficients β pour le système (4) sont des nombres positifs, supérieurs ou égaux en module aux coefficients β pour le système (1); de même pour les coefficients γ, ... On voit finalement que la méthode de détermination des coefficients, appliquée à (4), donne pour y_1, ..., y_n des séries entières (S) à coefficients positifs, au moins égaux aux modules des coefficients correspondants des séries (2). Par conséquent, si les séries (S) sont convergentes, les séries (2) le seront *a fortiori*.

Pour montrer que les séries (S) sont convergentes, il suffit de montrer directement qu'il existe pour (4) des intégrales holomorphes dans un certain cercle et s'annulant avec x. En effet, s'il existe de telles intégrales, elles sont représentables par des séries entières qui sont identiques aux séries (S) (n° 287).

Dans le système (4), les n équations ont des seconds membres identiques; les fonctions y_1, ..., y_n ont même dérivée et sont toutes égales à 0 pour $x = 0$; elles doivent donc être identiques à une même fonction Y. Nous sommes ramenés à intégrer la seule équation

$$\frac{dY}{dx} = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)^n},$$

ou

$$M\frac{dx}{1 - \frac{x}{\rho}} = \left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)^n dY.$$

Supposons $|x| < \rho$; le premier membre est la différentielle de $-M\rho \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)$, en prenant la détermination du Log qui est nulle avec x; le second membre étant la différentielle de $-\frac{\rho}{n+1}\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)^{n+1}$, l'équation intégrée est

$$-\frac{\rho}{n+1}\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)^{n+1} = -M\rho \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right) + c,$$

c étant une constante; en faisant $x = Y = 0$, on obtient $c = -\frac{\rho}{n+1}$, et l'équation précédente devient

$$\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)^{n+1} = 1 + (n+1) M \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x}{\rho}\right).$$

Quand x tend vers 0, le second membre de cette équation tend

vers 1. Il résulte de la théorie des équations binomes qu'il y a une racine $(n+1)^{\text{ième}}$ du second membre qui tend vers 1 quand x tend vers 0; désignons cette racine par $\sqrt[n+1]{}$, nous aurons

$$Y = \rho\left[1 - \sqrt[n+1]{1+(n+1)\mathrm{M}\,\mathrm{Log}\left(1-\frac{x}{\rho}\right)}\right].$$

Cette fonction est bien holomorphe dans un certain cercle de centre O, c'est-à-dire que (4) a un système d'intégrales holomorphes représentables par des séries entières. La convergence des séries relatives au système (1) en résulte.

Donc le système (1) admet une solution dans les conditions indiquées.

289. Remarquons que, dans le cas particulièrement important où les coefficients des f_i sont *réels*, l'application de la méthode conduit à des coefficients à valeur réelle; les séries (2) sont des séries entières à coefficients réels.

II. — Équations différentielles du premier ordre.

290. Une équation différentielle du premier ordre, résolue par rapport à la dérivée, est de la forme

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Par application du théorème précédent, si la fonction f des deux variables x, y est régulière en un point (x_0, y_0), il existe pour y une fonction holomorphe de x dans un certain cercle de centre x_0, satisfaisant à l'équation donnée et prenant, pour $x = x_0$, la valeur y_0. On reconnaît ainsi que la solution générale obtenue par ce procédé renferme une constante arbitraire, savoir la valeur de la fonction correspondant à une valeur donnée de la variable.

Rappelons que la solution de l'équation différentielle

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

est

$$(3)\qquad y = \int f(x)\,dx.$$

L'opération qui consiste à déduire de (2) l'équation (3) est dite une *quadrature*.

291. Il y a souvent avantage à donner à une équation différentielle au lieu de la forme (1), la forme plus symétrique

$$X\,dx + Y\,dy = 0, \tag{4}$$

X et Y pouvant être fonctions de x, y. On ne spécifie pas ainsi quelle est la variable indépendante. On peut choisir comme variable indépendante soit x, soit y, ou bien chercher à exprimer x et y en fonction d'une troisième variable indépendante, ou encore chercher à établir entre x, y une relation $\varphi(x, y) = 0$, telle que, lorsque x, y sont liés par cette relation, l'équation différentielle proposée soit vérifiée.

Dans le cas où X dépend seulement de x et Y de y, le premier membre de l'équation (4) est la différentielle exacte de l'expression

$$\int X\,dx + \int Y\,dy,$$

et, comme cette différentielle est nulle, c'est que l'on a

$$\int X\,dx + \int Y\,dy = c,$$

c étant une constante arbitraire. On obtient ainsi une relation entre x, y dépendant d'une constante arbitraire et qui constitue la solution générale de l'équation différentielle donnée. On dit, dans ce cas, que dans l'équation donnée les *variables sont séparées;* une telle équation s'intègre par quadratures.

292. Étant donnée une équation différentielle

$$X\,dx + Y\,dy = 0,$$

proposons-nous d'obtenir une fonction $\mu(x, y)$, appelée *facteur intégrant,* telle que l'expression

$$\mu(x, y)(X\,dx + Y\,dy)$$

soit la différentielle d'une certaine fonction $\varphi(x, y)$.

Si nous supposons le problème résolu, la solution générale de l'équation différentielle sera constituée par la relation

$$\varphi(x, y) = c.$$

Pour que $\mu X\,dx + \mu Y\,dy$ soit la différentielle totale de φ, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial(\mu X)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Y)}{\partial x},$$

c'est-à-dire

$$X\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial X}{\partial y} = Y\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

On a ainsi, pour déterminer μ, une équation aux dérivées partielles. Sauf dans les cas où l'on aperçoit immédiatement un facteur intégrant, sa recherche conduit en général à un problème plus difficile que le problème de l'intégration de l'équation proposée.

293. Indiquons quelques types d'équations du premier ordre que l'on peut intégrer.

Équations homogènes. — On appelle *équation homogène* une équation qui peut être mise sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$y = ux.$$

Nous avons

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = f(u),$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}.$$

On voit que l'on arrive à une équation différentielle où les variables sont séparées. On peut intégrer cette équation par quadratures, puis revenir aux variables primitives x et y.

Toute équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

dans laquelle f est le quotient de deux polynomes homogènes et de même degré par rapport à x, y, rentre dans ce cas. On voit de plus que l'on sera ramené à des intégrations de fractions rationnelles.

On peut aussi ramener à ce cas les équations de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right).$$

En effet, posons

$$x = X - \alpha, \qquad y = Y + \beta,$$

α et β étant des constantes actuellement indéterminées. $\frac{dy}{dx}$ se transforme en $\frac{dY}{dX}$, en même temps que l'on a

$$\begin{aligned} ax + by + c &= aX + bY + a\alpha + b\beta + c, \\ a'x + b'y + c' &= a'X + b'Y + a'\alpha + b'\beta + c'. \end{aligned}$$

Déterminons α et β de manière que

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \qquad a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Il est possible de le faire si $ab' - ba' \neq 0$, et l'on a alors

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a'X + b'Y}\right),$$

équation qui est homogène.

Si $ab' - ba' = 0$, en posant

$$u = ax + by + c,$$

on a, λ et μ étant certaines constantes,

$$a'x + b'y + c' = \lambda u + \mu,$$

de sorte que le second membre de l'équation donnée est une fonction de u. On a d'ailleurs

$$du = a\,dx + b\,dy,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{du}{dx} - \frac{a}{b},$$

de sorte que l'équation donnée est de la forme

$$\frac{du}{dx} = \varphi(u),$$

équation dans laquelle les variables sont séparées.

294. *Équations linéaires.* — On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre* une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x) = 0,$$

P et Q étant des fonctions données de x.

On dit que l'équation est *linéaire et homogène* si Q est nul, c'est-

à-dire si l'équation est de la forme

(2) $$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}(x)y = 0.$$

Intégrons cette équation (2), qu'on appelle encore *équation sans second membre*. On peut séparer les variables en l'écrivant

$$\frac{dy}{y} + \mathrm{P}(x)\,dx = 0,$$

d'où, en remarquant que $\frac{1}{y}$, $\mathrm{P}(x)$ sont les dérivées logarithmiques de y et $e^{\int \mathrm{P}\,dx}$,

$$ye^{\int \mathrm{P}(x)\,dx} = \text{const.}$$

La solution générale de l'équation (2) est donc

$$y = ce^{-\int \mathrm{P}\,dx}.$$

On voit qu'elle renferme en facteur une constante arbitraire. Deux solutions différentes de l'équation (2) sont donc dans un rapport constant.

295. Considérons maintenant l'équation (1). Pour l'intégrer, désignons par u une solution de l'équation sans second membre (2); cherchons à vérifier (1) par une fonction y de la forme

$$y = uz,$$

u satisfaisant, comme il vient d'être dit, à l'équation

(3) $$\frac{du}{dx} + \mathrm{P}u = 0.$$

En remplaçant y par uz dans l'équation (1), on obtient

$$z\frac{du}{dx} + u\frac{dz}{dx} + \mathrm{P}(x)\,u\,z + \mathrm{Q}(x) = 0,$$

ou, en tenant compte de (3),

$$u\frac{dz}{dx} + \mathrm{Q}(x) = 0,$$

équation en $\frac{dz}{dx}$ qui fournit z par une quadrature :

$$z = -\int \frac{\mathrm{Q}(x)}{u(x)}\,dx + c.$$

On peut prendre pour $u(x)$ la fonction $e^{-\int P\,dx}$, et l'on a

$$z = -\int Q(x) e^{\int P\,dx}\,dx + c$$

et, par suite,

$$y = -e^{-\int P\,dx}\left[\int Q(x) e^{\int P\,dx}\,dx + c\right].$$

La solution générale se présente donc sous la forme

$$y = u(z_0 + c) = y_0 + uc,$$

u étant l'une des solutions de l'équation sans second membre, z_0 l'une des intégrales de l'équation en z, y_0 l'une des solutions de (1). Par conséquent, *la constante arbitraire entre linéairement dans la solution générale.*

296. *Équation de Bernoulli.* — On appelle *équation de Bernoulli* une équation de la forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^n = 0,$$

P et Q étant des fonctions données de x. Si $n = 0$, on a l'équation linéaire : si $n = 1$, on a l'équation linéaire homogène. Supposons n différent de 0 et de 1, et divisons les deux membres de l'équation par y^n. Il vient

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{y^n} + \frac{P}{y^{n-1}} + Q = 0.$$

Prenons comme nouvelle fonction inconnue $u = \frac{1}{y^{n-1}}$; k étant un certain facteur numérique, on a

$$du = \frac{1}{k}\frac{dy}{y^n},$$

de sorte que l'équation précédente s'écrit

$$k\frac{du}{dx} + Pu + Q = 0.$$

On obtient ainsi pour déterminer u une équation linéaire avec second membre ; u étant connu, on en déduit y.

297. *Équation de Riccati.* — On appelle *équation de Riccati*

une équation de la forme suivante :

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y^2 + P_1(x)y + P_2(x) = 0,$$

P, P_1, P_2 étant des fonctions données de x.

En général, on ne sait pas intégrer cette équation. Mais, si l'on en connaît une solution particulière y_1, on peut trouver la solution générale. Posons

$$y = y_1 + z.$$

L'équation donnée se transforme en

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dz}{dx} + P(x)(y_1 + z)^2 + P_1(x)(y_1 + z) + P_2(x) = 0,$$

ou, en tenant compte de ce que y_1 est une solution particulière,

$$\frac{dz}{dx} + z[2P(x)y_1 + P_1(x)] + z^2 P(x) = 0.$$

On voit que z doit satisfaire à une équation de Bernoulli, que nous savons intégrer. On pose $u = \frac{1}{z}$; u est donné par une équation linéaire.

Soit u_0 une solution particulière de cette équation linéaire ; u est de la forme $u = u_0 + cv$, v étant une certaine fonction. On a

$$z = \frac{1}{u_0 + cv},$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u_0 + cv} = \frac{\alpha + c\beta}{\gamma + c\delta},$$

α, β, γ, δ étant certaines fonctions déterminées. *La solution générale de l'équation de Riccati est donc, par rapport à la constante arbitraire, une fraction du premier degré.* Soient alors y_1, y_2, y_3, y_4 quatre solutions différentes de l'équation de Riccati ; elles sont comprises dans la formule générale et correspondent respectivement aux valeurs c_1, c_2, c_3, c_4 de la constante c. D'après la propriété connue des fractions du premier degré, pour une valeur donnée de x, le rapport anharmonique de ces quatre fonctions est égal au rapport anharmonique des quatre constantes correspondantes :

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (c_1, c_2, c_3, c_4).$$

Le rapport anharmonique de quatre solutions données de l'équation de Riccati reste donc constant quand x varie.

298. Étant donnée une équation différentielle entre x et y, si l'on peut opérer sur x, y un changement de variables qui transforme l'équation en une équation rentrant dans un des types précédents, on en déduit la solution générale de l'équation donnée.

299. Les équations que nous avons étudiées étaient toutes résolues par rapport à $\frac{dy}{dx}\cdot$ Considérons maintenant une équation mise sous la forme

$$F(x, y, y') = 0.$$

On peut chercher à résoudre cette équation par rapport à y' de façon à être ramené au cas précédent. Toutefois, il existe certains cas où l'on peut se dispenser d'effectuer cette résolution et intégrer directement l'équation non résolue. Donnons-en un exemple.

Équation de Lagrange. — On appelle *équation de Lagrange* une équation de la forme suivante :

$$(1) \qquad y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

φ et ψ étant des fonctions données. On voit qu'une équation de Lagrange est une *équation linéaire par rapport à x et y.*

Dérivons les deux membres de cette équation, x étant variable indépendante. On obtient

$$(2) \qquad y' = \varphi(y') + x\varphi'(y')y'' + \psi'(y')y''.$$

Dans cette équation, prenons y' comme fonction inconnue et posons $y' = p$. L'équation s'écrit

$$(3) \qquad p - \varphi(p) = \frac{dp}{dx}[x\varphi'(p) + \psi'(p)].$$

Sous cette forme, c'est une équation différentielle entre p et x, résolue par rapport à $\frac{dp}{dx}\cdot$ Elle peut se mettre sous la forme d'une équation linéaire par rapport à x et $\frac{dx}{dp}$, en l'écrivant

$$(4) \qquad \frac{dx}{dp}[p - \varphi(p)] = x\varphi'(p) + \psi'(p),$$

de sorte que, si l'on considère x comme fonction inconnue de p, on peut intégrer cette équation. On obtient ainsi x en fonction de p. Si

l'on peut de cette relation tirer p en fonction de x, en portant la valeur de p dans l'équation

$$(5) \qquad y = x\varphi(p) + \psi(p),$$

on aura, pour l'équation donnée, la solution générale y en fonction de x.

On peut aussi conserver l'expression de x en fonction de p et porter cette valeur dans l'expression (5) de y. On aura ainsi y en fonction de p. En résumé, on voit que l'on exprime x et y en fonction d'un paramètre p, $\frac{dy}{dx}$ étant égal à p et les différentielles de x et y dans ces conditions étant liées par la relation (1).

La méthode employée s'appelle la méthode d'*intégration par dérivation*.

300. Appliquons cette méthode à un exemple. Soit l'équation différentielle

$$4y'^3 - 6y'^2 + 9(y - x) = 0.$$

Posons $y' = p$ et dérivons cette équation :

$$12p^2\frac{dp}{dx} - 12p\frac{dp}{dx} + 9(p-1) = 0,$$

ou

$$(p-1)\left(4p\frac{dp}{dx} + 3\right).$$

L'équation obtenue est vérifiée de deux manières : une première solution est $p = 1$, une seconde solution est celle qui donne lieu à l'équation différentielle

$$4p\frac{dp}{dx} + 3 = 0.$$

Pour cette seconde solution, on a, en intégrant cette équation,

$$2p^2 + 3x = c;$$

d'où

$$x = \frac{c - 2p^2}{3}.$$

Portons cette valeur dans l'équation donnée, il vient

$$y = x - \frac{4p^3 - 6p^2}{9} = \frac{3c - 4p^3}{9}.$$

Nous avons ainsi une solution de l'équation donnée, constituée par les deux fonctions de p

$$x = \frac{c - 2p^2}{3}, \qquad y = \frac{3c - 4p^3}{9}.$$

En langage géométrique, on obtient une certaine famille de courbes unicursales dépendant d'une constante arbitraire, le paramètre p en fonction duquel varient les coordonnées d'un point de la courbe étant le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point.

Considérons maintenant l'autre solution. De $p = 1$ résulte

$$y = x + c.$$

Pour qu'une fonction de cette forme vérifie l'équation donnée, il faut que l'on ait

$$4 - 6 + 9c = 0;$$

d'où

$$c = \frac{2}{9}.$$

La fonction $y = x + \frac{2}{9}$ est une intégrale de l'équation donnée. Nous trouvons ainsi pour cette équation deux espèces de solutions différentes : l'une renfermant une constante arbitraire, l'autre entièrement déterminée et ne rentrant pas dans la famille précédente.

301. Un cas particulier de l'équation de Lagrange est l'équation de Clairaut

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

On obtient ici, en appliquant la méthode précédente,

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

$$\frac{dp}{dx}[x + \psi'(p)] = 0.$$

Cette équation peut être vérifiée de deux manières différentes, suivant que l'on prend

$$\frac{dp}{dx} = 0$$

ou

$$x + \psi'(p) = 0$$

La seconde solution donne

$$x = -\psi'(p)$$

et, en portant cette valeur de x dans l'équation donnée,

$$y = -p\psi'(p) + \psi(p).$$

On a ainsi des fonctions x et y de p qui satisfont à l'équation donnée et ne renferment pas de constante arbitraire.

En prenant la solution $\frac{dp}{dx} = 0$, on obtient

$$p = a,$$

d'où, en remplaçant dans l'équation donnée,

$$y = ax + \psi(a).$$

On obtient ainsi pour y une intégrale de l'équation donnée dépendant d'une constante arbitraire a. On dira, en langage géométrique, que l'on a une famille de droites satisfaisant à cette équation.

302. *Solutions singulières.* — En résumé, étant donnée une équation différentielle non résolue

$$(1) \qquad F(x, y, y') = 0,$$

on peut dans certains cas l'intégrer directement et il peut y avoir :

1° Une famille de solutions dépendant d'une constante, c'est-à-dire une famille de courbes dépendant d'un paramètre;

2° Des solutions non comprises dans cette famille et ne renfermant pas de constante arbitraire.

Supposons que F soit fonction analytique des trois variables x, y, y', et que, pour un système déterminé de valeurs x_0, y_0, y'_0 attribuées aux trois variables, considérées actuellement comme indépendantes, on ait

$$(2) \qquad F(x_0, y_0, y'_0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0.$$

D'après la théorie des fonctions implicites, nous pouvons, au voisinage du système de valeurs x_0, y_0, y'_0, résoudre l'équation (1) par rapport à y', c'est-à-dire trouver pour y' une fonction déterminée de x, y vérifiant l'équation (1) et prenant la valeur y'_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$. On est ainsi ramené au cas d'une équation différentielle résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Cette équation a une intégrale qui, pour $x = x_0$, se réduit à y_0. En résumé, on trouve pour y une fonction bien déterminée de x vérifiant l'équation (1), prenant pour x_0 la

valeur y_0 et dont la dérivée prend en même temps la valeur y'_0. Supposons maintenant que nous fassions varier x_0, y_0 dans un domaine avoisinant ce point. Les conditions (2) seront encore réalisées et y'_0, en tant que solution de la première équation (2), est fonction continue de x_0, y_0. On peut donc dire que, x_0 étant fixé, on obtient par le procédé indiqué une solution de l'équation (1) renfermant une constante arbitraire, à savoir y_0. Ainsi se trouve établi le fait suivant : *au voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0, y'_0 vérifiant* (2), *toute solution de* (1) *rentre dans une famille dépendant d'une constante arbitraire.*

Examinons maintenant le cas d'un système de valeurs x_0, y_0, y'_0 vérifiant l'équation (1) et l'équation (3)

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0. \tag{3}$$

Éliminons y' entre (1) et (3), et soit

$$Q(x, y) = 0 \tag{4}$$

le résultat de l'élimination. Il peut arriver que cette équation définisse pour y une fonction de x satisfaisant à (1). Cette solution, qui est d'une nature différente des précédentes, sera dite une *solution singulière* de l'équation (1). Dans l'équation de Lagrange donnée comme exemple (p. 98), $y = x + \frac{2}{9}$ est une solution singulière. Dans l'équation de Clairaut, la solution

$$x = -\psi'(p), \qquad y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

est aussi une solution singulière.

303. Remarquons qu'en général il n'y a pas, pour une équation différentielle donnée, de solution singulière. En effet, si nous remplaçons l'équation donnée (1) par l'équation

$$F(x, y, y' + \alpha) = 0, \tag{5}$$

en opérant sur cette équation (5) comme sur l'équation (1), nous obtiendrons la même équation (4). Or, une fonction y de x satisfaisant à l'équation (4) donne, pour y', une fonction bien déterminée qui ne peut évidemment satisfaire à toutes les équations telles que (5). Cela n'aura lieu que par exception et pour des valeurs particulières de α.

304. Examinons maintenant le cas où l'équation (1) est obtenue par élimination d'un paramètre c entre des équations de la forme (*cf.* t. I, p. 130)

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y, c) = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0. \end{cases}$$

A tout système de valeurs x_0, y_0, y'_0 satisfaisant à (1) on peut alors adjoindre une valeur c_0 du paramètre c, telle que le système x_0, y_0, y'_0, c_0 satisfasse aux équations (6). Cette valeur c_0, qui est déterminée quand x_0, y_0, y'_0 le sont, peut être considérée comme une fonction de x, de sorte qu'il y a, pour y et c, deux fonctions de x telles que, y' étant la dérivée de y, les équations (6) sont vérifiées par ces deux fonctions. Dans ces conditions, en dérivant par rapport à x la première des équations (6), on obtient

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} = 0,$$

ou, en tenant compte de la seconde équation (6),

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c}\frac{dc}{dx} = 0.$$

Cette équation peut être vérifiée de deux manières. Si l'on a $\dfrac{dc}{dx} = 0$, on en déduit

$$c = \text{const.}$$

Les intégrales correspondantes de (1) sont des fonctions y dépendant d'une constante arbitraire : on retrouve les familles de courbes dont on est parti pour obtenir F. Ce sont les solutions ordinaires de (1).

L'autre solution de l'équation précédente est $\dfrac{\partial\varphi}{\partial c} = 0$. Cela montre que l'équation (1) est vérifiée aussi pour les systèmes de solutions vérifiant

$$\varphi = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial c} = 0.$$

En éliminant c entre ces deux équations, on obtient une certaine équation $\psi(x, y) = 0$ qui définit y en fonction de x. Cette fonction y de x est solution de (1).

D'ailleurs, F étant le résultat de l'élimination de c entre les équations (6), on peut poser

$$F(x, y, y') = \varphi(x, y, c),$$

à condition de considérer c comme la fonction définie par la seconde équation (6); d'où, en dérivant par rapport à y',

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial \varphi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y'}.$$

Donc tout système de valeurs qui annule $\frac{\partial \varphi}{\partial c}$ annule aussi $\frac{\partial F}{\partial y'}$; par suite, la solution y que nous venons d'obtenir et qui correspond à $\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$ est la solution singulière de (1).

On voit, en résumé, que si l'équation (1) est obtenue par élimination de c entre deux équations telles que (6), cette équation a des solutions ordinaires et une solution singulière; les solutions ordinaires s'obtiennent en résolvant (1) par rapport à y' et intégrant l'équation obtenue; elles correspondent à la famille de courbes à un paramètre ayant pour équation $\varphi = 0$. La solution singulière correspond à $\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0$. En langage géométrique, elle est constituée par l'*enveloppe* de la famille de courbes ayant pour équation $\varphi = 0$.

D'ailleurs, il est évident *a priori* que, si une famille de courbes satisfait à une équation différentielle et a une enveloppe, cette enveloppe satisfait aussi à l'équation différentielle. En effet, une équation différentielle n'est autre qu'une relation entre les coordonnées d'un point d'une courbe et le coefficient angulaire de la tangente à la courbe en ce point. Or, en tout point commun à l'enveloppe et à l'enveloppée, les tangentes à ces deux courbes sont confondues.

III. — Équations différentielles d'ordre n.

305. Une équation différentielle d'ordre n, résolue par rapport à la dérivée d'ordre n, est de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Pour étudier les conditions d'existence de ses intégrales, ramenons cette équation au système auxiliaire (n° 286, p. 85) :

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \qquad \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \qquad \ldots, \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \qquad \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}). \end{cases}$$

(2) est un système de n équations différentielles du premier ordre

qui est équivalent à l'équation proposée. Soit a, b_0, b_1, ..., b_{n-1} un système de valeurs tel que la fonction de $(n+1)$ variables $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ soit régulière pour le point a, b_0, b_1, ..., b_{n-1}.

Le théorème d'existence des intégrales est applicable au système (2), en prenant pour valeurs initiales de x, y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ respectivement a, b_0, b_1, ..., b_{n-1}.

On constate ainsi que l'on peut se donner comme constantes arbitraires les valeurs de la fonction et de ses $(n-1)$ premières dérivées pour une valeur donnée de x ; la solution de l'équation (1) dépend donc de n constantes arbitraires.

Nous allons indiquer un certain nombre de cas où l'on peut abaisser l'ordre de l'équation ou la ramener à un type connu.

306. Soit l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Elle s'intègre par n quadratures qui donnent successivement $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, ..., $\frac{dy}{dx}$. Chaque quadrature introduit une constante additive qui, dans la quadrature suivante, se multiplie par x, de sorte qu'on trouve pour y une fonction déterminée de x, plus un polynome arbitraire d'ordre $n-1$.

307. *La fonction y n'entre dans l'équation que par ses dérivées à partir d'un certain ordre k.* — On prend comme nouvelle inconnue la dérivée d'ordre k ; on obtient ainsi une équation d'ordre $n-k$. En supposant cette équation intégrée, on est ramené au cas précédent. On obtient y par k quadratures successives.

308. *x n'entre pas explicitement dans l'équation différentielle.* — Celle-ci est alors de la forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Faisons un changement de variable en prenant y comme variable et x comme fonction inconnue de y. D'après la théorie du changement de variables, les dérivées $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... s'expriment rationnellement

au moyen des nouvelles dérivées x'_y, x''_{y^2}, ..., de sorte que l'équation donnée se transforme en une nouvelle équation dans laquelle x n'entre que par ses dérivées à partir du premier ordre. En prenant x'_y comme nouvelle fonction inconnue, l'équation n'est plus que d'ordre $n-1$.

Pour faire le changement de variable, on peut procéder de la manière suivante. Posons

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

et cherchons ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans le changement de variable. C'est la dérivée de p par rapport à x ; si l'on remarque que l'on a, quelle que soit la fonction f,

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} p,$$

on voit que l'on doit remplacer $\frac{d^2y}{dx^2}$ par $\frac{dp}{dy} p$.

De même, $\frac{d^3y}{dx^2}$, qui est la dérivée par rapport à x de $\frac{d^2y}{dx^2}$, doit être remplacé par $\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)p$, c'est-à-dire par $\left[\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 + p\frac{d^2p}{dy^2}\right]p$, et ainsi de suite.

Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = y.$$

C'est une équation différentielle du second ordre par rapport à y, ne contenant pas explicitement la variable x. En prenant y comme variable indépendante et posant $\frac{dy}{dx} = p$, l'équation se transforme en la suivante :

$$\frac{p\frac{dp}{dy}}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = y$$

ou

$$\frac{p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = y\,dy,$$

équation du premier ordre dans laquelle les variables sont séparées.

On peut intégrer cette équation et en déduire une relation entre p et y. En portant dans

$$\frac{dy}{dx} = p$$

ou

$$dx = \frac{dy}{p},$$

on aura x par une quadrature.

309. *L'équation donnée est homogène par rapport à y et ses dérivées jusqu'à l'ordre n.*

Une telle équation est de la forme

$$f\left(\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0.$$

Posons

$$y = e^z$$

et prenons z comme nouvelle fonction inconnue. On a

$$y' = e^z z', \qquad y'' = e^z(z'^2 + z''), \qquad \ldots.$$

D'une façon générale, on reconnaît que $y^{(k)}$ est égal à e^z multiplié par un polynome contenant les dérivées de z par rapport à x jusqu'à l'ordre k inclusivement, de sorte que les rapports $\frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}$ s'expriment par des polynomes en $z', z'', \ldots, z^{(n)}$ et, par cette transformation, l'équation prend la forme

$$\varphi(z', z'', \ldots, z^{(n)}) = 0;$$

c'est une équation d'ordre n ne renfermant la fonction inconnue z que par ses dérivées à partir de l'ordre 1. En prenant z' comme fonction inconnue, l'équation n'est plus que d'ordre $n - 1$.

310. *L'équation donnée est homogène par rapport aux quantités $x, y, dx, dy, d^2y, \ldots, d^ny$.*

Un exemple d'une telle équation est l'équation

$$\frac{dy}{dx} - f\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Le premier membre est homogène et de degré 0 par rapport aux quatre quantités x, y, dx, dy, car il ne change pas quand on multiplie x, y, dx, dy par λ.

D'une manière générale, la condition de l'énoncé étant réalisée, si l'on remplace x, y par λx, λy, le premier membre de l'équation sera multiplié par une certaine puissance de λ, soit λ^m.

Posons

$$y = ux,$$

et soit

$$\varphi(x, u, dx, du, \ldots) = 0$$

l'équation transformée. Quand on remplace x par λx, sans changer u, le premier membre de cette équation doit être multiplié par λ^m. Transformons l'équation $\varphi = 0$ en prenant x comme fonction de u, changement que nous avons étudié sur d'autres exemples. La nouvelle équation obtenue est telle que, si l'on multiplie la fonction inconnue x, et par suite toutes ses dérivées, par λ, sans changer la variable u, le premier membre de l'équation est multiplié par λ^m. Ce premier membre est donc une fonction homogène et de degré m de x et de ses dérivées par rapport à u. C'est le cas précédent.

311. Considérons une équation de la forme

$$y'' = f(y).$$

Multiplions les deux membres par $2y'$. On a

$$2y'y'' = 2f(y)y'.$$

Sous cette forme, le premier membre est la dérivée par rapport à x de y'^2. On a donc, en intégrant,

$$y'^2 = 2\int f(y)\,dy + C.$$

On est ramené à une équation du premier ordre

$$y'^2 = F(y).$$

Cette méthode peut s'appliquer, par exemple, à l'équation

$$y'' = y;$$

mais cette équation rentre aussi dans le type des équations linéaires, que nous allons étudier maintenant.

IV. — Équations différentielles linéaires.

312. On appelle *équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n* une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0,$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ étant des fonctions données de x. En général, nous supposerons que ce sont des fonctions analytiques.

On appelle *équation différentielle linéaire d'ordre n non homogène*, ou *avec second membre*, une équation de la forme

$$(2) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = f(x),$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n$ et f étant des fonctions données de x, qu'on suppose en général analytiques. L'équation (2) comprend comme cas particulier l'équation (1).

L'équation (1) appartient aussi au type des équations homogènes par rapport à y et ses dérivées. En posant $y = e^z$, elle se transforme en une équation d'ordre $n-1$ en z'. Mais cette nouvelle équation n'est plus linéaire, de sorte que la transformation n'est pas, en général, avantageuse. Pour le montrer sur un exemple, prenons l'équation linéaire et homogène du second ordre

$$y'' + Py' + Qy = 0.$$

En posant $y = e^z$, on a

$$y' = e^z z', \qquad y'' = e^z(z'^2 + z'').$$

L'équation devient, après avoir divisé par e^z,

$$z'' + z'^2 + Pz' + Q = 0$$

ou, en posant $z' = u$,

$$u' + u^2 + Pu + Q = 0;$$

on voit que u dépend d'une équation de Riccati.

313. Revenons au cas général et faisons quelques remarques concernant les équations linéaires.

Supposons qu'on connaisse une solution y_1 de l'équation (1). Posons

$$y = y_1 z.$$

On a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} z + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + y_1 \frac{d^2 z}{dx^2}, \qquad \cdots$$

Formons la combinaison

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y,$$

c'est-à-dire le premier membre de (1). On reconnaît que dans cette fonction le coefficient de z est nul, car c'est l'expression

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y_1.$$

Ainsi, l'équation transformée est linéaire et d'ordre $n-1$ en $\frac{dz}{dx}$. On peut dire que la connaissance d'une solution particulière de (1) permet d'abaisser l'ordre d'une unité. Ce résultat a son analogue dans la théorie des équations algébriques.

314. A cause de la forme de (1), on voit que, si $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sont solutions, la fonction $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k$, où $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sont des constantes, est aussi solution. En effet, en remplaçant dans (1) y par cette fonction, on voit que les coefficients de c_1, $c_2, \ldots, c_k$ sont tous nuls.

Étant données k fonctions de x, $y_1, y_2, \ldots, y_k$, on dit qu'elles sont *linéairement indépendantes* si aucune d'elles n'est égale à une combinaison linéaire et homogène des autres. Je dis que si, parmi les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_k$, l'une est fonction linéaire et homogène des autres, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_k \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_k}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d^{k-1} y_1}{dx^{k-1}} & \frac{d^{k-1} y_2}{dx^{k-1}} & \cdots & \frac{d^{k-1} y_k}{dx^{k-1}} \end{vmatrix}$$

est nul. En effet, supposons que y_k, par exemple, soit combinaison linéaire des autres fonctions. On a une relation de la forme

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \ldots + \lambda_{k-1} y_{k-1} + y_k = 0.$$

Par dérivation, cette relation entraîne les $k-1$ suivantes :

$$\lambda_1 \frac{dy_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \lambda_{k-1} \frac{dy_{k-1}}{dx} + \frac{dy_k}{dx} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\lambda_1 \frac{d^{k-1} y_1}{dx^{k-1}} + \lambda_2 \frac{d^{k-1} y_2}{dx^{k-1}} + \ldots + \lambda_{k-1} \frac{d^{k-1} y_{k-1}}{dx^{k-1}} + \frac{d^{k-1} y_k}{dx^{k-1}} = 0.$$

Pour chaque valeur de x, on a k relations homogènes entre les k quantités non toutes nulles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}, 1$. Donc, le déterminant des coefficients de ces k quantités, qui est D, est nul.

Il résulte de là que si, étant données k fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_k$, on a

$$D \neq 0,$$

il est impossible que l'une soit combinaison linéaire des autres; en d'autres termes, les k fonctions sont linéairement indépendantes.

315. Cela posé, nous allons montrer que, *si l'on connaît, pour l'équation différentielle homogène* (1), *un système de n solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linéairement indépendantes, on peut avoir la solution la plus générale de l'équation non homogène* (2) *par des quadratures.*

Puisque $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont linéairement indépendantes, on a

$$D = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_n}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Nous allons chercher une solution y de l'équation (2) de la forme

$$(3) \qquad y = z_1 y_1 + z_2 y_2 + \ldots + z_n y_n,$$

les z étant des fonctions inconnues auxiliaires entre lesquelles nous établissons $n-1$ relations, savoir celles que l'on obtiendrait par dérivation de (3) si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ étaient des constantes; nous avons ainsi les relations

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z_1 \dfrac{dy_1}{dx} + z_2 \dfrac{dy_2}{dx} + \ldots + z_n \dfrac{dy_n}{dx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = z_1 \dfrac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + z_2 \dfrac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + z_n \dfrac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}. \end{cases}$$

Nous avons $n+1$ fonctions inconnues y, z_1, ..., z_n qui doivent satisfaire aux $n+1$ équations (2), (3) et (4). Au moyen des équations (3), (4), formons la combinaison qui figure dans le premier membre de (2). Pour cela, multiplions l'équation (3) par P_n, la première des équations (4) par P_{n-1}, la seconde par P_{n-2}, la dernière par P_1 et ajoutons membre à membre. Le premier membre de la relation obtenue est égal, en tenant compte de (2), à $f(x) - \frac{d^n y}{dx^n}$. Dans le second membre, le coefficient de z_i, en tenant compte de ce que y_i est solution de (1), est $-\frac{d^n y_i}{dx^n}$. Donc on a

$$f(x) = \frac{d^n y}{dx^n} - \left(z_1 \frac{d^n y_1}{dx^n} + z_2 \frac{d^n y_2}{dx^n} + \ldots + z^n \frac{d^n y_n}{dx^n}\right). \tag{5}$$

Dérivons chacune des n équations (3) et (4), en tenant compte pour chaque équation de l'équation suivante et, pour la dernière équation (4), de l'équation (5). Nous obtenons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= z'_1 \; y_1 + z'_2 \; y_2 + \ldots + z'_n y_n, \\ 0 &= z'_1 \frac{dy_1}{dx} + z'_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + z'_n \frac{dy_n}{dx}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 &= z'_1 \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} + z'_2 \frac{d^{n-2} y_2}{dx^{n-2}} + \ldots + z'_n \frac{d^{n-2} y_n}{dx^{n-2}}, \\ f(x) &= z'_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + z'_2 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + z'_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}. \end{aligned}\right.$$

Ce système (6) est un système de n équations linéaires par rapport à z'_1, z'_2, ..., z'_n.

Le déterminant des coefficients de ces inconnues est le déterminant D qui est différent de 0, par hypothèse. Ces équations peuvent donc être résolues par rapport aux z'_i et donnent pour ces quantités un système de fonctions bien déterminées. De chacune de ces fonctions z'_i on déduit la fonction z_i correspondante par une quadrature. La solution la plus générale de (2) est alors fournie par la relation (3).

Cette méthode est dite la méthode de *variation des constantes*.

Tout système de solutions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ formé de fonctions indépendantes est dit un *système fondamental d'intégrales* de l'équation (1).

316. Considérons le cas particulier de l'équation homogène (1). Pour avoir les fonctions z'_i correspondantes, faisons $f(x) = 0$ dans (6).

Ce système devient un système d'équations linéaires et homogènes dont le déterminant D est différent de o et qui, par suite, n'admet que la solution

$$z'_1 = z'_2 = \ldots = z'_n = 0.$$

Les fonctions z_1, z_2, ..., z_n se réduisent dans ce cas à des constantes. On a donc le résultat suivant relatif à l'équation linéaire et homogène : $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *étant n solutions particulières de l'équation* (1), *constituant des fonctions indépendantes, la solution générale de l'équation* (1) *est donnée par la combinaison linéaire la plus générale des fonctions* $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

Proposons-nous de trouver une intégrale y de (1) qui, pour la valeur x_0 de la variable, prenne une valeur donnée y_0, les dérivées de y jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement prenant également des valeurs données $y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$.

La solution cherchée est de la forme

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n.$$

On a, en dérivant $n - 1$ fois,

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + \ldots + c_n \frac{dy_n}{dx},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = c_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + c_n \frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}.$$

Donnons à x la valeur x_0; soient $(y_1)_0$, ..., $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0$, ..., $\left(\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}\right)_0$, ... les valeurs que prennent alors y_1, ..., $\frac{dy_1}{dx}$, ..., $\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$, ... On a les n relations

$$\begin{aligned} y_0 &= c_1 (y_1)_0 + \ldots + c_n (y_n)_0, \\ y'_0 &= c_1 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + \ldots + c_n \left(\frac{dy_n}{dx}\right)_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_0^{(n-1)} &= c_1 \left(\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}\right)_0 + \ldots + c_n \left(\frac{d^{n-1} y_n}{dx^{n-1}}\right)_0. \end{aligned}$$

C'est un système de n équations linéaires à n inconnues c_1, c_2, ..., c_n. Le déterminant des coefficients de ces inconnues est le déterminant D, pris pour la valeur x_0. Donc, en tout point x_0 pour lequel

$D \neq 0$, on peut trouver une intégrale de (1) qui prenne en ce point une valeur donnée, ses $n-1$ premières dérivées prenant aussi des valeurs données.

317. Remarquons qu'une équation linéaire et homogène conserve la même forme si l'on change de variable indépendante. Soit, en effet, le changement de variable défini par

$$x = f(t).$$

On reconnaît (*cf.* t. I, p. 124) que chaque dérivée de y par rapport à t s'exprime en fonction linéaire et homogène des dérivées de y par rapport à x. Inversement, on peut exprimer les anciennes dérivées par des combinaisons linéaires et homogènes des nouvelles. Le premier membre de (1) se transforme donc par ce changement de variable en une expression de même forme par rapport à $\frac{dy}{dt}, \cdots$

318. *Équations linéaires et homogènes à coefficients constants.* — Supposons que $P_1, P_2, \ldots, P_n$ soient des nombres donnés. Nous allons chercher à satisfaire à l'équation (1) par une fonction de la forme

$$(7) \qquad y = e^{rx},$$

r étant une constante à déterminer. On déduit de (7)

$$\frac{dy}{dx} = r\,e^{rx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2\,e^{rx}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^hy}{dx^h} = r^h\,e^{rx}.$$

En portant ces valeurs de y et de ses dérivées dans l'équation (1) et divisant par e^{rx} qui est en facteur, on obtient l'équation

$$(8) \qquad \varphi(r) = r^n + P_1 r^{n-1} + \ldots + P_n = 0.$$

C'est une équation en r, algébrique et de degré n. On l'appelle l'*équation caractéristique* relative à l'équation (1). Si r_1 est une racine de cette équation, e^{r_1x} est une solution particulière de (1). Par conséquent, si (8) a n racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_n$, on connaît pour (1) les n solutions particulières suivantes :

$$e^{r_1x}, \quad e^{r_2x}, \quad \ldots, \quad e^{r_nx}.$$

Je dis qu'*elles forment un système de fonctions indépendantes.*

En effet, formons pour ces fonctions le déterminant D de la théorie générale. On a

$$D = \begin{vmatrix} e^{r_1x} & \dots & e^{r_nx} \\ r_1 e^{r_1x} & \dots & r_n e^{r_nx} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ r_1^{n-1} e^{r_1x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_nx} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2+\dots+r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ r_1 & \cdot & r_n \\ \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ce second déterminant (de Vandermonde) est égal au produit des différences deux à deux des n quantités $r_1, r_2, \dots, r_n$. Il est donc différent de zéro si ces quantités sont distinctes. Dans ce cas, les n solutions particulières obtenues forment un système fondamental et la solution la plus générale de (1) est

$$c_1 e^{r_1x} + \dots + c_n e^{r_nx}.$$

319. Prenons comme exemple l'équation

$$y'' - y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 1 = 0.$$

Elle a deux racines distinctes qui sont ± 1 : à l'une correspond e^x, à l'autre correspond e^{-x}. La solution générale de l'équation est

$$y = Ae^x + Be^{-x}.$$

Prenons maintenant l'équation

$$y'' + y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 1 = 0;$$

elle a pour racines $\pm i$, d'où les deux intégrales particulières e^{ix}, e^{-ix} et, par suite, la solution générale

$$y = Ae^{ix} + Be^{-ix} = (A + B)\cos x + i(A - B)\sin x,$$

ou encore

$$y = a\cos x + b\sin x.$$

Considérons enfin l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^4 - 1 = 0;$$

elle a pour racines $1, -1, i, -i$. La solution générale de l'équation est donc

$$y = Ae^x + Be^{-x} + Ce^{ix} + De^{-ix} = Ae^x + Be^{-x} + A'\cos x + B'\sin x.$$

320. Examinons maintenant le cas où l'équation caractéristique a des racines multiples.

r étant un nombre quelconque, considérons la fonction obtenue en remplaçant y par e^{rx} dans le premier membre de (1). On a

$$(9) \qquad \frac{d^n(e^{rx})}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}(e^{rx})}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n e^{rx} = e^{rx}\varphi(r).$$

Dérivons cette relation par rapport à r en intervertissant, dans chaque terme du premier membre, l'ordre des dérivations, ce qui revient à écrire

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^k e^{rx}}{dx^k}\right) = \frac{d^k}{dx^k}(xe^{rx}).$$

On obtient la relation

$$\frac{d^n}{dx^n}(xe^{rx}) + P_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(xe^{rx}) + \ldots + P_n xe^{rx} = e^{rx}[x\varphi(r) + \varphi'(r)].$$

Si r est racine d'ordre supérieur ou égal à 2 de l'équation caractéristique, $\varphi(r)$ et $\varphi'(r)$ sont nuls; par suite, le second membre est nul. Cela montre que xe^{rx} est une intégrale de l'équation (1).

D'une façon générale, dérivons $h-1$ fois par rapport à r la relation (9) en intervertissant, pour chaque terme du premier membre, l'ordre des dérivations par rapport à x et par rapport à r. Si l'on remarque que l'on a

$$\frac{d^{h-1}}{dr^{h-1}}\left(\frac{d^k e^{rx}}{dx^k}\right) = \frac{d^k}{dx^k}(x^{h-1}e^{rx}),$$

on reconnaît que l'on obtient dans le premier membre l'expression

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{h-1}e^{rx}) + P_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^{h-1}e^{rx}) + \ldots + P_n x^{h-1}e^{rx}.$$

Quant au second membre, il est égal à e^{rx} multiplié par un polynome linéaire par rapport à $\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(h-1)}$. Si r est racine d'ordre h de l'équation caractéristique, il annule toutes ces fonctions et, par

suite, le second membre. Donc $x^{h-1}e^{rx}$ est une intégrale de l'équation (1). En résumé, *si r est racine d'ordre h de l'équation caractéristique, les h fonctions e^{rx}, xe^{rx}, x^2e^{rx}, ..., $x^{h-1}e^{rx}$ sont solutions de* (1).

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ les racines distinctes de l'équation caractéristique; $h_1, h_2, \ldots, h_\lambda$ leurs ordres de multiplicité respectifs. Nous avons comme solutions particulières de (1) $h_1 + h_2 + \ldots + h_\lambda = n$ fonctions, savoir :

$$(10)\qquad \begin{cases} e^{r_1x}, & xe^{r_1x}, & \ldots, & x^{h_1-1}e^{r_1x}, \\ e^{r_2x}, & xe^{r_2x}, & \ldots, & x^{h_2-1}e^{r_2x}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ e^{r_\lambda x}, & xe^{r_\lambda x}, & \ldots, & x^{h_\lambda-1}e^{r_\lambda x}. \end{cases}$$

On obtient une solution en prenant

$$y = e^{r_1x}\text{H}_1(x) + \ldots + e^{r_\lambda x}\text{H}_\lambda(x),$$

$\text{H}_1, \ldots, \text{H}_\lambda$ étant des polynomes arbitraires de degrés respectifs $h_1 - 1, \ldots, h_\lambda - 1$. Je dis que c'est là la solution la plus générale de (1). Il suffit, pour le faire voir, de vérifier que les n fonctions (10) sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas entre ces fonctions de relation linéaire et homogène à coefficients constants non tous nuls. Cela revient à montrer qu'on ne peut avoir de relation de la forme

$$0 = e^{r_1x}\text{P}_1(x) + \ldots + e^{r_\lambda x}\text{P}_\lambda(x),$$

$\text{P}_1, \ldots, \text{P}_\lambda$ étant des polynomes non tous nuls. En divisant par e^{r_1x} on aurait

$$0 = \text{P}_1(x) + \ldots + e^{(r_\lambda - r_1)x}\text{P}_\lambda(x),$$

les différences $r_2 - r_1, \ldots, r_\lambda - r_1$ étant toutes différentes de zéro. On peut dériver cette relation un nombre suffisant de fois pour faire disparaître les termes de $\text{P}_1(x)$. On aurait alors une relation analogue contenant un terme de moins, les polynomes qui remplacent $\text{P}_1, \ldots$ n'étant pas tous nuls. En opérant sur cette relation comme sur la précédente et en continuant ainsi, on arriverait à

$$0 = e^{sx}\text{T}(x),$$

s étant différent de zéro et T n'étant pas identiquement nul. Une telle relation est impossible; par suite, les n fonctions (10) sont linéairement indépendantes, et la solution la plus générale de (1) a la forme indiquée.

321. Considérons le cas où l'équation différentielle donnée a ses coefficients réels. L'équation caractéristique a ses racines réelles ou imaginaires conjuguées deux à deux. Aux racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$ correspondent les solutions suivantes :

$$e^{(\alpha+\beta i)x}, \quad xe^{(\alpha+\beta i)x}, \quad \ldots,$$
$$e^{(\alpha-\beta i)x}, \quad xe^{(\alpha-\beta i)x}, \quad \ldots.$$

ou

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad xe^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad \ldots,$$
$$e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x), \quad xe^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x), \quad \ldots.$$

La partie de l'intégrale générale correspondant à ces racines peut se mettre sous la forme

$$e^{\alpha x}\cos\beta x\,P_1(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\,Q_1(x),$$

P_1 et Q_1 étant des polynomes.

322. *Exemple.* — Prenons l'équation

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 2r + 1 = 0;$$

elle admet la racine double $r = -1$, d'où l'on déduit les deux solutions particulières e^{-x}, xe^{-x} et, par suite, la solution générale

$$y = e^{-x}(A + Bx).$$

323. On peut ramener aux équations linéaires et homogènes à coefficients constants les *équations d'Euler*, qui sont de la forme

$$x^n\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}x\frac{dy}{dx} + p_n y = 0,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des constantes.

Posons

$$x = e^t,$$

d'où

$$x'_t = e^t = x.$$

Évaluons les dérivées de y par rapport à la nouvelle variable t. On a

$$y'_t = y'_x x'_t = xy'_x, \qquad y''_{t^2} = xy'_x + x^2 y''_{x^2}, \qquad \ldots.$$

D'une façon générale, $y^{(p)}_{t^p}$ est une combinaison linéaire de xy', x^2y'', $\ldots$, $x^p y^{(p)}$.

En effet, admettons-le jusqu'à l'ordre p inclusivement ; en dérivant de nouveau, le terme $x^\alpha y^\alpha_{x^\alpha}$ donne $\alpha x^\alpha y^{(\alpha)} + x^{\alpha+1} y^{(\alpha+1)}$.

La dérivée d'ordre $p+1$ est donc bien de la forme indiquée. Inversement, en résolvant les équations obtenues par rapport à xy', x^2y'', ..., $x^n y^{(n)}$, on obtient, pour ces quantités, des expressions qui sont des combinaisons linéaires et homogènes de y'_t, y''_{t^2}, ..., $y^{(n)}_{t^n}$. En portant ces valeurs dans l'équation donnée, celle-ci se transforme en une équation linéaire et homogène, t étant la variable indépendante. Cette équation a des solutions de la forme

$$e^{rt}, \quad te^{rt}, \quad t^2 e^{rt}, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire, en revenant à la variable x,

$$x^r, \quad x^r \mathrm{L}x, \quad x^r(\mathrm{L}x)^2, \quad \ldots.$$

On est alors conduit, pour intégrer l'équation donnée, à poser

$$y = x^r,$$

r étant indéterminé. En écrivant que l'équation est satisfaite pour une fonction y de cette forme, on obtient une équation dans laquelle x^r est facteur d'un certain polynome en r. En annulant ce polynome on a une équation en r, dite *équation caractéristique*. A toute racine r_0 d'ordre h de cette équation correspondent les h intégrales particulières x^{r_0}, $x^{r_0}\mathrm{L}x$, ..., $x^{r_0}(\mathrm{L}x)^{h-1}$.

324. *Équations avec second membre.* — Considérons l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + \mathrm{P}_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + \mathrm{P}_n y = f(x);$$

soient y_1 une intégrale particulière de cette équation, y l'intégrale générale. En posant

$$y = y_1 + z,$$

on voit que z est la solution générale de l'équation précédente où l'on fait $f = 0$, c'est-à-dire de l'équation sans second membre.

D'autre part, nous avons vu que, si l'on connaît la solution générale de l'équation sans second membre, la méthode de la variation des constantes permet d'obtenir l'intégrale générale de (2) par des quadratures.

Remarquons que si le second membre de (2) est de la forme $\varphi + \psi + \chi$, si y_1 est une solution de l'équation dont le second membre est φ, y_2 une solution de l'équation dont le second membre

est ψ, y_3 une solution de l'équation dont le second membre est χ, $y_1 + y_2 + y_3$ est solution de (2).

Nous allons montrer comment, dans le cas où $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont constants, on peut trouver simplement des intégrales particulières lorsque $f(x)$ est un polynome par rapport à x et à des expressions de la forme $e^{\alpha x}$.

325. En premier lieu, supposons que le second membre de (2) soit un polynome $R(x)$ de degré μ

$$A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_{\mu-1} x + A_\mu.$$

Je dis que l'on peut trouver une intégrale de (2) constituée par un polynome de degré μ, soit

$$y = \alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu.$$

En effet, cherchons à satisfaire à (2) par une fonction de cette forme. Nous sommes conduits à identifier l'expression

$$P_n(\alpha_0 x^\mu + \ldots + \alpha_\mu) + P_{n-1}(\mu\alpha_0 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_{\mu-1}) + \ldots$$

avec $R(x)$. En égalant les coefficients de x^μ, on a

$$P_n \alpha_0 = A_0.$$

Si $P_n \neq 0$, on tire de là α_0. En égalant ensuite les coefficients de $x^{\mu-1}$, on a

$$P_n \alpha_1 + P_{n-1} \mu\alpha_0 = A_1,$$

relation qui détermine α_1. On détermine ainsi successivement les $\mu + 1$ coefficients de y. Donc il y a, dans le cas de $P_n \neq 0$, un polynome de degré μ qui est solution de (2).

Supposons P_n nul, ainsi que $P_{n-1}, \ldots, P_{n-k+1}$; alors la dérivée d'ordre minimum qui figure dans (2) est $\dfrac{d^k y}{dx^k}$.

On peut considérer l'équation comme étant d'ordre $n - k$ par rapport à cette dérivée, qu'on prendra comme fonction inconnue. Cette nouvelle équation rentre dans les conditions précédentes. On y satisfait en prenant pour $\dfrac{d^k y}{dx^k}$ un polynome de degré μ. Par k quadratures, on en déduit pour y un polynome de degré $\mu + k$ qui satisfait à (2).

326. Supposons maintenant que le second membre de l'équation donnée soit $e^{gx} R(x)$, g étant un nombre constant, R un polynome.

Posons

$$y = ze^{gx},$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = e^{gx}\left(\frac{dz}{dx} + gz\right), \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{gx}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + 2g\frac{dz}{dx} + g^2z\right), \qquad \ldots.$$

D'une façon générale, $\frac{d^ky}{dx^k}$ est égal à e^{gx} multiplié par une combinaison linéaire de z, $\frac{dz}{dx}$, ..., $\frac{d^kz}{dx^k}$. En portant ces valeurs dans (2), on voit que e^{gx} est en facteur dans les deux membres. En supprimant ce facteur, on obtient en z une équation différentielle linéaire d'ordre n, dans laquelle le second membre est un polynome. Cette équation rentre donc dans le cas précédent et admet pour intégrale un polynome.

327. Supposons que le second membre soit de la forme $\Sigma e^{gx}\,\mathrm{P}(x)$. On cherche séparément une intégrale pour chaque équation obtenue en prenant dans le second membre un seul des termes $e^{gx}\,\mathrm{P}(x)$. On prend ensuite la somme de ces intégrales particulières. C'est une intégrale particulière de l'équation donnée.

La méthode exposée s'applique au cas où le second membre est un polynome en x, e^{gx}, ..., $\cos\alpha x$, $\sin\alpha x$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$, ..., en exprimant les fonctions trigonométriques au moyen d'exponentielles.

328. *Systèmes d'équations linéaires.* — Considérons le système de n équations différentielles linéaires à n fonctions inconnues

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + \mathrm{P}_1 y + \mathrm{Q}_1 z + \ldots + \mathrm{R}_1 t = \mathrm{V}_1, \\ \dfrac{dz}{dx} + \mathrm{P}_2 y + \mathrm{Q}_2 z + \ldots + \mathrm{R}_2 t = \mathrm{V}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dt}{dx} + \mathrm{P}_n y + \mathrm{Q}_n z + \ldots + \mathrm{R}_n t = \mathrm{V}_n, \end{cases}$$

les P, Q, R, ..., V étant des fonctions données de x.

Le problème de l'intégration de ce système peut se ramener aux problèmes précédents par des opérations algébriques. En effet, dérivons $n-1$ fois chacune des équations (1). Nous obtenons ainsi n^2 équations entre lesquelles nous pouvons éliminer les fonctions z, ..., t et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n, soit donc en tout $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ fonctions, qui d'ailleurs entrent linéairement

dans les équations. Le résultat de l'élimination est une équation linéaire entre y et ses dérivées jusqu'à l'ordre n.

Nous allons étudier directement le système (1).

329. Étant donnés plusieurs systèmes de fonctions

$$\begin{array}{cccc} y_1, & z_1, & \ldots, & t_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ y_h, & z_h, & \ldots, & t_h, \end{array}$$

nous appellerons *combinaison linéaire et homogène de ces systèmes* le système suivant, où les λ sont constants :

$$\begin{aligned} y &= \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_h y_h, \\ z &= \lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_h z_h, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t &= \lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_h t_h. \end{aligned}$$

Étant donnés plusieurs systèmes, si aucun d'eux ne se réduit à une combinaison linéaire et homogène des autres, nous dirons que ces systèmes sont *indépendants*.

330. Supposons qu'on ait n systèmes de solutions des équations (1) où l'on fait $V_1 = V_2 = \ldots = V_n = 0$, c'est-à-dire des équations (1) sans seconds membres, soit

$$\begin{array}{cccc} y_1, & z_1, & \ldots, & t_1, \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, \\ y_n, & z_n, & \ldots, & t_n \end{array}$$

et que le déterminant de ces n^2 fonctions ne soit pas identiquement nul. Il en résulte que ces n systèmes sont indépendants au sens précédent. En effet, si l'on avait, par exemple,

$$\begin{aligned} y_n &= k_1 y_1 + \ldots + k_{n-1} y_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t_n &= k_1 t_1 + \ldots + k_{n-1} t_{n-1}, \end{aligned}$$

le déterminant serait identiquement nul.

Nous allons chercher, en partant de là, la solution générale des équations (1) avec ou sans seconds membres. Cherchons à satisfaire

à ces équations par des fonctions de la forme

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n, \\ z &= c_1 z_1 + \ldots + c_n z_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ t &= c_1 t_1 + \ldots + c_n t_n, \end{aligned}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ étant certaines fonctions de x qu'il s'agit de déterminer. Portons ces expressions dans les équations (1) et cherchons par exemple le coefficient de c_1 dans le premier membre de la première équation. On a

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + \ldots + c'_1 y_1 + \ldots;$$

on voit que le coefficient de c_1 est la fonction

$$\frac{dy_1}{dx} + P_1 y_1 + \ldots + R_1 t_1,$$

qui est nulle par hypothèse. De même, les coefficients de $c_2, \ldots, c_n$ sont nuls. Les équations (1) sont donc remplacées par

$$\begin{aligned} c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \ldots + c'_n y_n &= V_1, \\ c'_1 z_1 + c'_2 z_2 + \ldots + c'_n z_n &= V_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ c'_1 t_1 + c'_2 t_2 + \ldots + c'_n t_n &= V_n. \end{aligned}$$

On a ainsi n équations linéaires entre $c'_1, c'_2, \ldots, c'_n$. Le déterminant de ces équations est différent de o, du fait que les systèmes de solutions sont indépendants. Elles permettent donc de calculer c'_1, $c'_2, \ldots, c'_n$. Par des quadratures, on en déduira $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

331. Si les V sont nuls, la solution de ce système est

$$c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0.$$

Cela montre que la solution générale du système sans seconds membres est une combinaison linéaire et homogène des premières solutions.

332. Dans le cas où les P, Q, ..., R sont constants et où les V sont nuls, en utilisant les résultats obtenus (n° 318), on reconnaît que l'on doit trouver pour y une solution de la forme αe^{rx}; de là résulte que z, qui est une combinaison linéaire et homogène de y et de ses dérivées, est aussi de la forme βe^{rx}; il en est de même pour les autres

fonctions. On est alors conduit à chercher directement pour (1) des solutions de cette forme.

Prenons, pour fixer les idées, le système de trois équations suivant :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + ay + bz + cu = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + a'y + b'z + c'u = 0, \\ \dfrac{du}{dx} + a''y + b''z + c''u = 0, \end{cases}$$

a, b, ... étant des nombres donnés.

Cherchons un système de solutions de la forme

$$y = \alpha e^{rx}, \qquad z = \beta e^{rx}, \qquad u = \gamma e^{rx};$$

on est conduit à résoudre les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} (a+r)\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \\ a'\alpha + (b'+r)\beta + c'\gamma = 0, \\ a''\alpha + b''\beta + (c''+r)\gamma = 0. \end{cases}$$

Ce sont trois équations homogènes en α, β, γ qui doivent avoir en α, β, γ des solutions non toutes nulles. Il faut donc que l'on ait

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a+r & b & c \\ a' & b'+r & c' \\ a'' & b'' & c''+r \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation en r est l'équation caractéristique du système (1); si r_0 en est une racine simple, pour $r = r_0$ les équations (2) sont compatibles en α, β, γ et déterminent α, β, γ. Il en résulte, pour (1), un système d'intégrales. Si r_0 est une racine double de (3), l'équation en y a pour intégrales correspondantes $e^{r_0 x}$ et $xe^{r_0 x}$. On cherche alors à satisfaire à (1) par des fonctions de la forme

$$\begin{aligned} y &= e^{r_0 x}(A + Bx), \\ z &= e^{r_0 x}(A' + B'x), \\ u &= e^{r_0 x}(A'' + B''x), \end{aligned}$$

A, B, A', B', A'', B'' étant des coefficients constants que l'on détermine comme on a déterminé α, β, γ.

Prenons par exemple le système suivant :

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 3y + z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y + z = 0. \end{cases}$$

Posons

$$y = \alpha e^{rx}, \qquad z = \beta e^{rx},$$

α, β, r étant des constantes à déterminer; en substituant ces expressions dans (4), on a, en divisant par e^{rx},

$$r\alpha - 3\alpha + \beta = 0, \qquad r\beta - 4\alpha + \beta = 0,$$

ou

$$(r-3)\alpha + \beta = 0, \qquad -4\alpha + (r+1)\beta = 0.$$

L'équation caractéristique est

$$(r-3)(r+1) - 4 = 0,$$

ou

$$r^2 - 2r + 1 = 0.$$

Elle admet la racine double $r = 1$. Nous sommes conduits à chercher des solutions de la forme

$$y = e^x(A + Bx), \qquad z = e^x(A' + B'x).$$

En faisant de nouveau la substitution, on obtient en divisant par e^x

$$\begin{cases} A + Bx + B - 3(A + Bx) + A' + B'x = 0, \\ A' + B'x + B' - 4(A + Bx) + A' + B'x = 0. \end{cases}$$

Ces équations devant être vérifiées quel que soit x, il faut que l'on ait

$$-2A + B + A' = 0, \qquad -2B + B' = 0,$$
$$2A' + B' - 4A = 0, \qquad -4B + 2B' = 0.$$

La deuxième et la quatrième sont identiques et donnent

$$B' = 2B;$$

de même la première et la troisième donnent toutes deux

$$A' = 2A - B.$$

Nous avons ainsi les quatre coefficients en fonction de deux d'entre eux, d'où la solution générale en fonction de deux constantes arbitraires

$$y = e^x(A + Bx), \qquad z = e^x(2A - B + 2Bx).$$

V. — Systèmes différentiels et équations linéaires aux dérivées partielles.

333. Considérons un système d'équations différentielles contenant autant de fonctions inconnues que d'équations, résolu par rapport aux dérivées, soit

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1 \ldots y_n).$$

On peut encore l'écrire

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \ldots = \frac{dy_n}{f_n}.$$

Nous modifierons les notations de façon à introduire la symétrie entre la variable et les fonctions et nous considérerons un système d'équations différentielles mis sous la forme

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

les X étant des fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. De cette manière, on ne spécifie pas quelle est, parmi les variables x_1, $x_2 \ldots x_n$, la variable indépendante. Si, dans un certain domaine de variation pour $x_1, x_2, \ldots x_n$, la fonction X_i par exemple reste différente de o, le système pourra se mettre sous la forme suivante

$$\frac{dx_k}{dx_i} = \frac{X_k}{X_i}, \qquad k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n;$$

on a $n-1$ équations différentielles ordinaires, la variable indépendante étant x_i et les fonctions inconnues étant $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$.

On peut encore procéder autrement, en introduisant une nouvelle variable t et écrivant

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt.$$

On considère alors $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme fonctions de la variable indépendante t.

334. Dans tous les cas, on sait que, sous certaines conditions qui

ont été précisées dans le théorème d'existence, le système (1) admet un système d'intégrales dépendant de $n-1$ constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$. Si x_1 par exemple est la variable indépendante, on aura une solution de la forme

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi_2(x_1, c_1, \ldots, c_{n-1}), \\ x_3 &= \varphi_3(x_1, c_1, \ldots, c_{n-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n &= \varphi_n(x_1, c_1, \ldots, c_{n-1}). \end{aligned}$$

Supposons qu'on puisse résoudre ces équations par rapport à c_1, $c_2, \ldots, c_{n-1}$. On obtiendra $n-1$ relations de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} f_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1, \\ f_2\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_{n-1}. \end{cases}$$

Étudions les propriétés de ces fonctions f. L'une quelconque d'entre elles reste constante lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient de manière à satisfaire aux équations (1), de sorte que l'on a, dans ces conditions,

$$df = 0.$$

Or, on a toujours

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

En tenant compte des équations (1), on doit donc avoir la relation

$$(3) \qquad X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

cette relation étant vérifiée pour toute fonction f qui reste constante lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient de façon à satisfaire aux équations (1). Or, dans les intégrales de (1), mises sous la forme (2), par exemple, on peut prendre arbitrairement la valeur initiale $(x_1)_0$ de x_1, puis les valeurs initiales $(x_2)_0, \ldots, (x_n)_0$ correspondant à $(x_1)_0$; par conséquent, (3) doit être vérifiée pour tout système de valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire doit avoir lieu identiquement, avec la seule réserve que les systèmes de valeurs considérés sont compris dans le domaine où les conditions d'existence et d'holomorphie sont réalisées.

La relation (3) est une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles. On voit que toute fonction f du système (2) satisfait à cette équation.

Réciproquement, étant donnée une fonction f satisfaisant à l'équation (3), si les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varient en fonction d'un paramètre de manière que leurs différentielles satisfassent aux relations (1), on reconnaît que la différentielle df correspondante est nulle. Donc, dans ces conditions, f reste constant.

Toute fonction f satisfaisant à (3), c'est-à-dire toute intégrale de (3), est dite une *intégrale première* du système (1).

335. Soient $f_1, f_2, \ldots, f_h$, h intégrales de (3). Je dis que toute fonction

$$F = \varphi(f_1, f_2, \ldots, f_h),$$

constituée en prenant une fonction arbitraire de $f_1, f_2, \ldots, f_h$, est une intégrale de (3). En effet, nous avons

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial f_h}\frac{\partial f_h}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Formons la combinaison

$$X_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots + X_n\frac{\partial F}{\partial x_n}.$$

Le coefficient de $\frac{\partial \varphi}{\partial f_1}$ est $X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}$, c'est-à-dire o par hypothèse; il en est de même pour les coefficients de $\frac{\partial \varphi}{\partial f_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial f_h}$. La fonction F vérifie donc la relation (3).

Je dis que, *si l'on connaît* $n-1$ *intégrales de* (3), $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$, *constituant un système de fonctions indépendantes, toute autre intégrale de* (3) *est une fonction des* $n-1$ *premières.*

$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ étant des fonctions indépendantes, si l'on considère le Tableau des dérivées

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

les déterminants d'ordre $n-1$ issus de ce Tableau ne sont pas tous nuls. Soit f une intégrale de (3); remplaçons successivement dans (3) la fonction inconnue par $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}, f$. On a ainsi n relations linéaires et homogènes entre les fonctions non toutes nulles X_1, $X_2, \ldots, X_n$. On en déduit que le déterminant correspondant est nul,

c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme les déterminants d'ordre $n-1$ issus des $n-1$ premières lignes ne sont pas tous nuls par hypothèse, la théorie des fonctions dépendantes montre que f est fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ (*cf.* t. I, n° 115, p. 109).

En résumé, *la solution générale de* (3) *est de la forme* $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$, φ *étant une fonction arbitraire et* $f_1, f_2, \ldots,$ f_{n-1} *étant* $n-1$ *solutions particulières de* (3) *formant un système de fonctions indépendantes.*

336. Nous allons étudier ce que deviennent, par un changement des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, d'une part le système (1), d'autre part l'équation (3).

Soit le changement de variables défini par les relations

$$(4) \qquad x_1 = \varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \qquad \ldots, \qquad x_n = \varphi_n(y_1, \ldots, y_n).$$

On suppose que cette substitution est réversible, c'est-à-dire que l'on a

$$\Delta = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)} \neq 0.$$

Effectuons d'abord le changement de variables défini par (4) dans les équations (1). Soit λ la valeur commune des rapports $\frac{dx_i}{X_i}$; ces équations s'écrivent :

$$(5) \qquad dx_i = \lambda X_i.$$

Partons des formules

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n} dx_n.$$

En tenant compte de (5), elles deviennent

$$dy_1 = \lambda\left(X_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$dy_n = \lambda\left(X_1\frac{\partial y_n}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right).$$

On voit donc que si l'on pose

$$Y_k = X_1\frac{\partial y_k}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial y_k}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial y_k}{\partial x_n},$$

le système (1) se transforme en un système qui peut se mettre sous la forme

$$(6)\qquad \frac{dy_1}{Y_1}=\frac{dy_2}{Y_2}=\ldots=\frac{dy_n}{Y_n}.$$

Effectuons maintenant le même changement de variables dans l'équation (3).

Étant donnée une fonction quelconque $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, désignons par $F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ce que devient cette fonction par le changement de variables considéré. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_i}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_i}.$$

Formons, avec ces expressions, la combinaison

$$X_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

c'est-à-dire le premier membre de (3). On reconnaît que le coefficient de $\frac{\partial F}{\partial y_k}$ est

$$X_1\frac{\partial y_k}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial y_k}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial y_k}{\partial x_n},$$

c'est-à-dire Y_k.

L'équation (3) se transforme donc en l'équation suivante :

$$(7)\qquad Y_1\frac{\partial F}{\partial y_1}+Y_2\frac{\partial F}{\partial y_2}+\ldots+Y_n\frac{\partial F}{\partial y_n}=0.$$

Ainsi, en effectuant le même changement de variables, d'une part sur les équations (1), d'autre part sur l'équation (3), on obtient

les équations (6) et (7), la relation entre (6) et (7) étant la même qu'entre (1) et (3).

D'après cela, si f est une intégrale de (3), la fonction F transformée de f est une intégrale de (7), et réciproquement. Un système de h intégrales indépendantes de l'une des équations (3) ou (7) se transforme en un système de h intégrales indépendantes de l'autre.

337. En ce qui concerne l'intégration du système (1), si l'on connaît $n-1$ intégrales indépendantes de l'équation (3), soient f_1, $f_2, \ldots, f_{n-1}$, en les égalant à des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, on a des équations que l'on peut résoudre par rapport à $n-1$ des variables et qui fournissent la solution générale du système (1); on peut disposer des constantes pour faire correspondre à une valeur donnée de x_1, $n-1$ valeurs données pour $x_2, \ldots, x_n$.

338. Supposons que l'on connaisse p $(p < n-1)$ intégrales premières de (1), constituant p intégrales indépendantes de (3). Cherchons à tirer parti de la connaissance de ces intégrales pour faciliter la résolution du problème.

Soit donc $f_1, f_2, \ldots, f_p$ un système de p intégrales indépendantes de (3). L'un au moins des déterminants fonctionnels de $f_1, f_2, \ldots, f_p$ par rapport aux x est différent de 0. Supposons que ce soit $\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)}$. Faisons un changement de variables en introduisant des variables y définies de la façon suivante.

Nous posons

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_p, \\ x_{p+1} = y_{p+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_n = y_n. \end{array}\right.$$

Ce système d'équations peut être résolu par rapport aux x. Il suffit pour cela de faire l'inversion des p premières relations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$, ce qui est possible d'après l'hypothèse

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_p)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_p)} \neq 0.$$

On peut donc définir le changement de variables par des équations

de la forme suivante :

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = \psi_1(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_p = \psi_p(y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}, \ldots, y_n), \\ x_{p+1} = y_{p+1}, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ x_n \quad = y_n. \end{cases}$$

Par le changement de variables (9), le système (1) et l'équation (3) se transforment respectivement en un système (6) et une équation (7). Cette équation (7) doit être vérifiée par les fonctions F qui sont les transformées de f_1, f_2, ..., f_p, c'est-à-dire par les fonctions y_1, y_2, ... y_p.

Or, pour $F = y_1$, par exemple, on a

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2} = \ldots = \frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Pour que (7) soit vérifiée par cette fonction, il faut que l'on ait

$$Y_1 = 0.$$

On reconnaît de même que l'on doit avoir

$$Y_2 = \ldots = Y_p = 0,$$

de sorte que l'équation (7) a la forme suivante :

$$Y_{p+1} \frac{\partial F}{\partial y_{p+1}} + \ldots + Y_n \frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Le système (6) est le suivant :

$$\frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_p}{0} = \frac{dy_{p+1}}{Y_{p+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n};$$

il conduit aux équations

$$dy_1 = dy_2 = \ldots = dy_p = 0$$

et

$$\frac{dy_{p+1}}{Y_{p+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n}.$$

Des p premières équations résulte

$$y_1 = c_1, \qquad y_2 = c_2, \qquad \ldots, \qquad y_p = c_p,$$

c_1, c_2, ..., c_p étant des constantes arbitraires. Il reste à intégrer un

système contenant $n-p$ variables $y_{p+1}, \ldots, y_n$ liées par $n-p-1$ relations différentielles.

Pratiquement, on peut appliquer cette méthode en mettant dans les équations (8), à la place de $y_1, y_2, \ldots y_p$, des constantes $c_1, c_2, \ldots, c_p$. On peut donc énoncer la règle pratique suivante :

Si l'on connaît p intégrales premières indépendantes de (1), *on les égale à des constantes* $c_1, c_2, \ldots, c_p$, *on résout les p équations ainsi obtenues par rapport à* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *qui se trouvent exprimées en fonction de* $x_{p+1}, \ldots, x_n$ *et de* $c_1, c_2, \ldots, c_p$. *On porte ces fonctions dans le système* (1), *qui se réduit alors à un système d'équations différentielles comprenant p fonctions et p équations de moins.*

Il résulte de tout l'ensemble de la théorie que le problème de la recherche de la solution générale du système (1) et celui de l'intégration de (3) sont deux problèmes équivalents.

339. Donnons quelques applications de cette théorie.

Soit le système

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}=ry-qz,\qquad \frac{dy}{dt}=pz-rx,\qquad \frac{dz}{dt}=qx-py,$$

p, q, r étant des fonctions données de t. Formons la combinaison $x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}$; le second membre est identiquement nul, et, comme le premier est la différentielle de $x^2+y^2+z^2$, on en déduit

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=c.$$

La fonction $x^2+y^2+z^2$ est une intégrale première du système donné. La combinaison que l'on a formée pour l'obtenir est dite une *combinaison intégrable* des équations données.

On peut de la relation obtenue tirer, par exemple, z en fonction de x, y, c, puis, porter dans les équations (1) qui se réduisent alors à deux. On a

$$z=\sqrt{c-x^2-y^2},$$

et les deux équations

$$\frac{dx}{dt}=ry-q\sqrt{c-x^2-y^2},$$

$$\frac{dy}{dt}=p\sqrt{c-x^2-y^2}-rx.$$

On peut vérifier que la troisième équation est satisfaite d'elle-même. On a, en effet, d'après l'équation (2),

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-x\frac{dx}{dt} - y\frac{dy}{dt}}{\sqrt{c - x^2 - y^2}},$$

ou, en remplaçant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ par leurs valeurs,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(qx - py)\sqrt{c - x^2 - y^2}}{\sqrt{c - x^2 - y^2}} = qx - py.$$

La connaissance d'une intégrale première nous permet donc, comme la théorie générale nous l'avait appris, de diminuer d'une unité le nombre des équations et des fonctions inconnues.

340. Soit le système

$$\frac{dx}{dt} = yz, \qquad \frac{dy}{dt} = zx, \qquad \frac{dz}{dt} = xy.$$

ou encore, en supprimant la variable t,

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}.$$

En égalant le premier et le second rapport, puis le premier et le troisième, on a

$$x\,dx - y\,dy = 0, \qquad x\,dx - z\,dz = 0,$$

d'où

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad x^2 - z^2 = c_2.$$

On a ainsi deux intégrales premières. On pourrait, en égalant le second et le troisième rapport, en avoir une troisième $y^2 - z^2 = c_3$; mais elle n'est pas indépendante des deux premières.

On déduit des deux relations précédentes

$$y = \sqrt{x^2 - c_1}, \qquad z = \sqrt{x^2 - c_2}.$$

On a ainsi y et z en fonction de x. Pour avoir x en fonction de t, portons ces valeurs dans la première équation. On a

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{(x^2 - c_1)(x^2 - c_2)}.$$

Si l'on peut intégrer cette équation, on aura la solution du système donné.

341. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'étudier une équation linéaire et homogène aux dérivées partielles. Soit l'équation

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

D'après la théorie générale, on doit former le système d'équations différentielles auxiliaire

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c}.$$

En égalant le premier et le second rapport, puis le premier et le troisième, on obtient des équations différentielles dans lesquelles les variables sont séparées et d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{y-b}{x-a} = c_1, \qquad \frac{z-c}{x-a} = c_2.$$

Donc la solution générale de l'équation donnée est la fonction

$$\varphi\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right),$$

φ étant une fonction arbitraire. On sait qu'en l'égalant à o, on a l'équation générale des cônes de sommets a, b, c.

342. Soit à intégrer l'équation

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x} - 2xy\frac{\partial f}{\partial y} - (2x^2 + xz + 8y^2)\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Considérons le système auxiliaire

$$\frac{dx}{x^2} = -\frac{dy}{2xy} = -\frac{dz}{2x^2 + xz + 8y^2}.$$

En prenant les deux premiers rapports, on obtient l'intégrale première

$$x^2 y = \lambda.$$

Pour simplifier l'étude du système, tirons de cette équation y en fonction de λ et de x, et portons cette valeur dans le troisième rapport, que nous égalons au premier.

Il vient

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dz}{-\left(2x^2 + xz + \frac{8\lambda^2}{x^4}\right)}$$

ou

$$\left(2x^2 + xz + \frac{8\lambda^2}{x^4}\right)dx + x^2\,dz = 0.$$

ou, en divisant par x,

$$\left(2x + z + \frac{8\lambda^2}{x^5}\right)dx + x\,dz = 0.$$

En remarquant que $z\,dx + x\,dz$ est la différentielle de xz, on voit que le premier membre de cette relation est une différentielle exacte. On déduit de là

$$x^2 + xz - \frac{2\lambda^2}{x^4} = \mu.$$

On a finalement les deux intégrales premières

$$x^2 y = \lambda, \qquad x^2 + xz - 2y^2 = \mu.$$

Par suite, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles donnée est

$$\varphi(x^2 y,\ x^2 + xz - 2y^2).$$

343. *Équations aux dérivées partielles linéaires non homogènes.* — Considérons l'équation

$$(1)\qquad \mathrm{P}_1\frac{\partial z}{\partial x_1} + \mathrm{P}_2\frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + \mathrm{P}_n\frac{\partial z}{\partial x_n} - \mathrm{R} = 0,$$

z étant une fonction inconnue des variables x_1, x_2, ..., x_n ; P_1, P_2, ..., P_n, R étant des fonctions analytiques données de x_1, ..., x_n, z.

Nous poserons, d'une façon générale,

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$(1)\qquad \mathrm{P}_1 p_1 + \ldots + \mathrm{P}_n p_n - \mathrm{R} = 0.$$

Cherchons à déterminer une fonction V de x_1, x_2, ..., x_n, z telle que l'équation

$$(2)\qquad \mathrm{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0,$$

résolue par rapport à z, définisse pour z une fonction de x_1, x_2, ... x_n qui soit solution de (1). Cherchons à quelles conditions doit satisfaire V. z étant défini par (2), dérivons cette équation (2) par rap-

port à x_i; on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} p_i = 0,$$

d'où

$$p_i = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial z}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En portant cette valeur de p_i dans l'équation (1), celle-ci prend la forme

$$(3) \qquad P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

C'est, par rapport à la fonction inconnue V, une équation homogène à $n+1$ variables. Si l'on a une solution de l'équation (3), en égalant à 0 cette solution, on définit une certaine fonction implicite z de $x_1, \ldots, x_n$ qui vérifie l'équation (1). Mais nous ne savons pas si l'on obtient par ce procédé toutes les solutions de (1).

344. Supposons qu'on connaisse la solution générale de (3), ce qui suppose qu'on a déterminé n solutions indépendantes $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de cette équation. Toute intégrale de (3) est de la forme $\Phi(V_1, V_2, \ldots, V_n)$. Nous allons chercher si toute intégrale de (1) satisfait à une relation de la forme $\Phi = 0$.

Partons d'une intégrale déterminée de (1). Dans $V_1, V_2, \ldots, V_n$, remplaçons z par cette fonction et posons d'une façon générale

$$U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_i(z, x_1, \ldots x_n) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Formons le déterminant fonctionnel Δ des U par rapport aux x. On a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial U_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial U_n}{\partial x_1} & \frac{\partial U_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial U_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_k} = \frac{\partial V_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_k} + \frac{\partial V_i}{\partial x_k},$$

d'où

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial z} p_1 & \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_1}{\partial z} p_2 & \ldots & \frac{\partial V_1}{\partial x_n} + \frac{\partial V_1}{\partial z} p_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial V_n}{\partial x_1} + \frac{\partial V_n}{\partial z} p_1 & \frac{\partial V_n}{\partial x_2} + \frac{\partial V_n}{\partial z} p_2 & \ldots & \frac{\partial V_n}{\partial x_n} + \frac{\partial V_n}{\partial z} p_n \end{vmatrix}.$$

En décomposant ce déterminant par la méthode habituelle, on obtient une somme de 2^n déterminants partiels. Tout déterminant partiel contenant deux colonnes renfermant les quantités p est nul, comme ayant deux colonnes proportionnelles. Δ est donc égal au déterminant partiel ne contenant aucune quantité p, c'est-à-dire à $\dfrac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, plus la somme de p déterminants dans chacun desquels une colonne contient en facteur p_i. On a donc

$$(4) \qquad \Delta = \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} + \sum p_i \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)}.$$

D'autre part, les V étant solutions de l'équation (3), on a les n relations suivantes :

$$(5) \qquad P_1 \frac{\partial V_i}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots + P_n \frac{\partial V_i}{\partial x_n} = -R \frac{\partial V_i}{\partial z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système (5), considéré comme un système d'équations linéaires homogènes par rapport aux quantités $P_1, P_2, \ldots, P_n, R$, les définit à un facteur de proportionnalité près, car, si l'on pose

$$D_0 = \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \qquad D_i = \frac{D(V_1, V_2, \ldots, V_n)}{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)},$$

les déterminants $D_0, D_1, \ldots, D_n$ ne sont pas tous nuls, du fait que $V_1, V_2, \ldots, V_n$ sont intégrales indépendantes de (3).

En résolvant les équations (5) par la règle de Cramer, on obtient, M étant un certain facteur,

$$(6) \qquad P_i = M D_i, \qquad R = -M D_0.$$

Remarquons que, les D n'étant pas tous nuls, on peut, d'une au moins des relations (6), tirer M, qui peut donc être considéré comme connu.

Cela posé, l'équation (4) s'écrit

$$\Delta = D_0 + \Sigma p_i D_i,$$

d'où l'on déduit, d'après (6), en multipliant par M,

$$(7) \qquad \Delta M = \Sigma P_i p_i - R.$$

Or, lorsque z est intégrale de (1), le second membre est nul; donc on a alors

$$\Delta M = 0,$$

ce qui exige soit $\Delta = 0$, soit $M = 0$.

Si $\Delta = 0$, c'est que les fonctions U sont liées par une relation

$$\Phi(U_1, U_2, \ldots, U_n) = 0,$$

ce qui revient à dire que z, considéré comme solution de (1), satisfait à l'équation

$$\Phi(V_1, V_2, \ldots, V_n) = 0$$

et est défini par cette équation. Donc, dans le cas de $\Delta = 0$, la solution z de l'équation (1) est fournie par la méthode indiquée.

Il reste comme intégrales pouvant n'être pas données par cette méthode celles qui satisfont à l'équation

$$M = 0.$$

Ce sont des intégrales qu'on peut appeler *intégrales singulières;* elles annulent $P_1, P_2, \ldots, P_n$, R, et ne contiennent ni constantes, ni fonctions arbitraires.

Si l'on cherche seulement les solutions de (1) contenant des fonctions arbitraires, on a la règle pratique suivante :

Étant donnée l'équation (1), *pour l'intégrer, on forme le système d'équations différentielles*

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R}.$$

Supposons qu'on ait la solution générale de ce système, c'est-à-dire qu'on en connaisse n intégrales premières indépendantes,

$$f_1 = c_1, \qquad \ldots, \qquad f_n = c_n;$$

on établit entre ces intégrales premières une relation arbitraire

$$\Phi(f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0.$$

La solution générale de (1) *est la fonction z de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ définie par cette équation.*

345. Donnons des exemples d'application de cette méthode. Soit l'équation

$$x_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \ldots + x_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = pz,$$

où p est une constante donnée. Nous devons considérer le système d'équations différentielles suivant :

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \ldots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{dz}{pz}.$$

Cherchons des intégrales premières de ce système. En égalant le premier rapport successivement à chacun des autres, on a des équations que l'on peut intégrer et qui donnent

$$\frac{x_2}{x_1} = c_1, \quad \frac{x_3}{x_1} = c_2, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{x_1} = c_{n-1}, \quad \frac{z}{x_1^p} = c_n.$$

D'ailleurs, toutes ces intégrales premières sont indépendantes. La solution générale de l'équation donnée s'obtient en établissant une relation arbitraire entre ces fonctions, soit

$$F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}, \frac{z}{x_1^p}\right) = 0,$$

ou, en résolvant par rapport à z,

$$z = x_1^p \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

On voit que z est une fonction homogène et de degré p des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$.

346. Soit l'équation

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

a et b étant des constantes, z une fonction inconnue de x, y. Le système auxiliaire est

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

d'où les intégrales premières

$$x - az = c_1, \qquad y - bz = c_2.$$

La solution générale en z est définie par l'équation

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

C'est l'équation générale des cylindres parallèles à la direction de paramètres a, b, 1.

347. Soit l'équation

$$bx - ay + (bz - cy)\frac{\partial z}{\partial x} + (cx - az)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Le système auxiliaire est

$$\frac{dx}{bz - cy} = \frac{dy}{cx - az} = \frac{dz}{ay - bx}.$$

Cherchons à former des combinaisons intégrables de ces équations, c'est-à-dire des combinaisons donnant lieu à différentielles exactes. Multiplions les deux termes du premier rapport par a, les deux termes du second par b, les deux termes du troisième par c, et ajoutons. Le dénominateur obtenu est identiquement nul; donc on doit avoir

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

d'où l'intégrale première

$$ax + by + cz = c_1.$$

En multipliant de même par x, y, z et ajoutant terme à terme, on obtient

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

d'où l'intégrale première

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_2.$$

On a deux intégrales premières qui sont d'ailleurs indépendantes. Il en résulte que la solution générale de l'équation est donnée par

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2,\ ax + by + cz) = 0.$$

C'est l'équation générale des surfaces de révolution ayant pour axe la droite passant par l'origine et ayant pour paramètres a, b, 1.

348. *Interprétation géométrique de la méthode d'intégration.* — Prenons d'abord le cas d'une fonction z de deux variables indépendantes x, y, et posons

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad Pp + Qq = R,$$

P, Q, R étant des fonctions données de x, y, z. Il s'agit de trouver une fonction $z = \varphi(x, y)$ vérifiant (1).

Considérons la surface représentée en coordonnées cartésiennes

rectangulaires par l'équation

$$z = \varphi(x, y). \tag{2}$$

Nous dirons que c'est une *surface intégrale* pour (1). Le plan tangent à cette surface au point (x, y, z) a pour équation

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0. \tag{3}$$

Convenons de faire correspondre à tout point (x, y, z) de l'espace la droite D ayant pour équations

$$\frac{X - x}{P(x, y, z)} = \frac{Y - y}{Q(x, y, z)} = \frac{Z - z}{R(x, y, z)}. \tag{4}$$

D'après cela, et en vertu de l'équation (1), *si* $z = \varphi(x, y)$ *est une surface intégrale pour* (1), *en tout point* (x, y, z) *de cette surface, le plan tangent contient la droite* D *correspondante.*

Nous appellerons *courbe caractéristique* une courbe définie par la condition d'être, en chacun de ses points, tangente à la droite D correspondant à ce point. Or, on sait qu'en un point x, y, z d'une courbe, les coefficients directeurs de la tangente sont proportionnels à dx, dy, dz. On doit donc avoir en tout point d'une courbe caractéristique

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \tag{5}$$

Réciproquement, toute courbe vérifiant ces relations est une courbe caractéristique.

Ce système (5) est le système auxiliaire que nous avons introduit pour intégrer (1). Soient

$$\psi(x, y, z) = \lambda, \qquad \psi_1(x, y, z) = \mu \tag{6}$$

deux intégrales premières de ce système; ce seront les équations des courbes caractéristiques. Elles dépendent de deux paramètres.

D'autre part, la solution générale de (1) est obtenue en introduisant une relation arbitraire entre ψ et ψ_1, soit

$$F(\psi, \psi_1) = 0.$$

D'après la théorie de la génération des surfaces, cette équation est l'équation générale des surfaces engendrées par une courbe de la famille

$$\psi = \lambda, \qquad \psi_1 = \mu,$$

se déplaçant en fonction d'un paramètre. Donc, *pour obtenir les surfaces intégrales de* (1), *on considère les courbes caractéristiques dont les équations* (6) *s'obtiennent en intégrant le système* (5). *On assujettit les deux paramètres* λ, μ *dont dépendent ces courbes à une relation* $F(\lambda, \mu) = 0$. *Elles varient alors en fonction d'un paramètre et engendrent des surfaces qui sont surfaces intégrales pour* (1).

Dans l'exemple du n° 346,

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

les courbes caractéristiques ont pour équations

$$x - az = \lambda, \qquad y - bz = \mu.$$

Ce sont des droites parallèles à la direction de paramètres a, b, 1. Les surfaces intégrales sont des cylindres ayant ces droites pour génératrices.

Dans l'exemple du n° 347, les caractéristiques ont pour équations

$$ax + by + cz = \lambda, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \mu.$$

Ce sont des cercles ayant pour axe la droite d'équations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Les surfaces engendrées par ces cercles, c'est-à-dire les surfaces intégrales, sont des surfaces de révolution.

On sait que le mouvement d'une courbe dépendant de deux paramètres est défini si l'on assujettit cette courbe à rencontrer une courbe fixe. La courbe mobile engendre une certaine surface qui contient la courbe fixe. En appliquant ceci aux courbes caractéristiques, on voit qu'étant donnée une courbe fixe, on peut trouver une surface intégrale contenant cette courbe fixe.

349. Dans le cas de n variables indépendantes ($n > 2$), on peut interpréter les résultats en un langage géométrique conventionnel. Nous dirons qu'une relation

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

définit une surface dans l'espace à $n + 1$ dimensions, et qu'un système de relations où $x_1, x_2, \ldots, x_n$, z sont fonctions de t définit une courbe dans cet espace.

Cela posé, étant donnés l'équation aux dérivées partielles

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n = R$$

et le système auxiliaire qui lui est associé,

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{R},$$

si la solution générale de ce système est

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n, z) = c_1, \quad \ldots, \quad \psi_n(x_1, \ldots x_n, z) = c_n,$$

nous dirons encore que ces équations représentent une famille de courbes caractéristiques. Ces courbes dépendent de n paramètres; en établissant une relation arbitraire entre ces paramètres, c'est-à-dire en faisant varier les caractéristiques en fonction de $n - 1$ paramètres, on obtient des surfaces intégrales.

VI. — Équations aux différentielles totales.

350. Considérons la relation suivante :

$$(1) \qquad dz = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + \ldots + f_n\, dx_n,$$

dans laquelle z est une fonction inconnue des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions données de $z, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous nous proposons de voir si l'on peut déterminer une fonction z des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que sa différentielle satisfasse à (1). Cette équation (1) est équivalente au système de n équations

$$(2) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous sommes ramenés à un système de n équations aux dérivées partielles. S'il existe une fonction z vérifiant (2), nous pouvons exprimer une dérivée de cette fonction telle que $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k}$ de deux manières différentes, en dérivant l'équation (2) de rang i par rapport à x_k et l'équation de rang k par rapport à x_i. En égalant les deux expressions obtenues, on a

$$(3) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z} f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial f_k}{\partial z} f_i.$$

En considérant tous les différents couples de nombres i, k, on a

$\frac{n(n-1)}{2}$ relations que nous appellerons *conditions d'intégrabilité*. Deux cas sont à distinguer :

1° Les équations (3) ne sont pas toutes vérifiées identiquement, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs données à $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Celles qui ne le sont pas constituent des équations de condition auxquelles doit satisfaire z. Il y a lieu de voir s'il existe une fonction z satisfaisant à ces conditions et à la relation (1). Les fonctions z qu'on peut obtenir ainsi sont déterminées et ne contiennent pas de constantes arbitraires.

2° Les équations (3) se réduisent à des identités, c'est-à-dire sont vérifiées, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$. Nous allons montrer que, dans ce cas, on peut trouver une fonction z dépendant d'une constante arbitraire et vérifiant (1). Nous dirons alors que l'équation (1) ou le système (2) est *complètement intégrable*.

351. Partons de la première des équations (2),

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, z).$$

Si l'on fixe $x_2, \ldots, x_n$, cette équation est une équation différentielle ordinaire. Elle a en z une intégrale dépendant d'une constante arbitraire u; dans $u, x_2, \ldots, x_n$ figurent comme paramètres. Soit

$$z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$$

cette intégrale. Tout revient à introduire entre $x_2, \ldots, x_n$ et u qui reste arbitraire des relations telles que cette fonction $z = \varphi$ satisfasse aux autres relations (2). Portons cette valeur de z dans les $n-1$ équations (2) restantes ; elles deviennent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

On tire de là

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{f_i - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Nous avons là un système analogue à (2), mais ne renfermant plus que $n-1$ équations. Nous allons démontrer que dans ce système (4):

1° Les seconds membres des équations ne contiennent pas x_1 et par suite se réduisent à des fonctions $\theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n$ de $x_2, \ldots, x_n$.

2° Les fonctions θ_i satisfont aux conditions d'intégrabilité du système (4).

352. Pour établir le premier point, nous posons

$$(5)\qquad \theta_i = \frac{f_i - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}},$$

et nous allons montrer que $\dfrac{\partial\theta_i}{\partial x_1}$ est nul. Calculons d'une façon générale $\dfrac{\partial\theta_i}{\partial x_k}$. On a, en dérivant (5),

$$(6)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial\theta_i}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_k}.$$

Faisons maintenant $k=1$, il vient

$$(7)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 \frac{\partial\theta_i}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_1}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_1}.$$

Or, on a

$$(8)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = f_1,$$

d'où, en dérivant par rapport à x_i, puis par rapport à u,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Remplaçons $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_1}$, $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial u}$ par ces valeurs dans l'équation (7); remplaçons aussi, en tenant compte des relations (3) et (8), $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_i}{\partial z}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ par $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dfrac{\partial f_1}{\partial z} f_i$: il vient, en divisant par $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\theta_i}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial z} f_i - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right) - \left(f_i - \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

353. Montrons maintenant que les fonctions θ_i satisfont aux condition d'intégrabilité relatives au système (4), c'est-à-dire qu'étant donnés deux nombres i et k choisis parmi les nombres $2, 3, \ldots, n$, on a

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\theta_i}{\partial u}\theta_k = \frac{\partial\theta_k}{\partial x_i} + \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\theta_i.$$

Nous allons calculer l'une de ces expressions, la première par exemple, et montrer qu'elle se transforme en elle-même par permutation de i et k. La relation précédente en résultera immédiatement. Nous avons déjà calculé $\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}$, calculons $\frac{\partial\theta_i}{\partial u}$. On a, d'après (5),

$$(9)\qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\frac{\partial\theta_i}{\partial u}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\left(f_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}.$$

Formons l'expression $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial\theta_i}{\partial x_k}+\theta_k\frac{\partial\theta_i}{\partial u}\right)$. Elle est égale, d'après (6) et (9), à

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\left(f_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_k}\\&\qquad+\left(\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}\theta_k-\left(f_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\theta_k.\end{aligned}\right.$$

Le terme $-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, qui est symétrique en i et k, se transforme en lui-même quand on permute i et k, nous pouvons le supprimer; il en est de même pour le terme $\left(f_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\theta_k$, qui s'écrit encore

$$\frac{\left(f_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\left(f_k-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}.$$

Les deux termes $\left(f_i-\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial x_k}$ et $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\,\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\theta_k$ se transforment l'un dans l'autre quand on permute i et k, leur somme ne change pas; par conséquent, nous pouvons les supprimer. Il reste l'expression

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial f_i}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\theta_k.$$

Remplaçons dans cette expression $\theta_k\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ par sa valeur $f_k-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$. Il nous reste, après réduction,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial z}f_k\right),$$

expression qui, d'après (3), se transforme en elle-même par permutation de i et k. La proposition est démontrée.

354. Le système (4) satisfait donc aux mêmes conditions que (2).

On opérera sur lui comme sur le système (2) et l'on aura successivement (en mettant z_1 au lieu de u)

$$\begin{aligned}
z &= \varphi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, z_1),\\
z_1 &= \varphi_1(x_2, x_3, \ldots, x_n, z_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
z_{n-2} &= \varphi_{n-2}(x_{n-1}, x_n, z_{n-1}),\\
z_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_n, c),
\end{aligned}$$

c étant une constante arbitraire. z_{n-1} étant connu, on aura successivement $z_{n-2}, \ldots, z_1$ et finalement z en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dans la pratique, il est inutile de vérifier d'avance si les conditions d'intégrabilité sont remplies. Si x_1 disparaît des équations analogues à (4), si x_2 disparaît des équations suivantes et ainsi de suite, c'est que le problème est possible. On le reconnaît ainsi en même temps qu'on obtient la solution. S'il n'en est pas ainsi, c'est que les conditions d'intégrabilité ne sont pas vérifiées. Elles donnent lieu à certaines conditions auxquelles doit satisfaire z.

355. Prenons comme exemple l'équation

$$du = 2xz\,dx + 2y\,dy + \frac{u - y^2}{z}\,dz.$$

Cette équation est équivalente au système

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xz, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u - y^2}{z}.$$

Considérons dans la première z comme un paramètre; on a, en intégrant,

$$u = zx^2 + \varphi,$$

φ étant une fonction inconnue de y, z. Calculons, en partant de cette valeur de u, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

En portant ces valeurs dans les deux autres équations, celles-ci deviennent

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi - y^2}{z}.$$

x ayant disparu de ces équations, nous pouvons continuer l'applica-

tion de la méthode. On déduit de la première

$$\varphi = y^2 + \psi(z).$$

Nous allons déterminer $\psi(z)$ de façon que φ satisfasse à la dernière équation : on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

d'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\varphi - y^2}{z} = \frac{\psi(z)}{z},$$

et, par intégration,

$$\psi(z) = cz,$$

c étant une constante arbitraire. On en déduit

$$\varphi = y^2 + cz$$

et finalement

$$u = x^2 z + y^2 + cz.$$

356. Le problème de l'intégration d'une différentielle totale peut se poser sous une forme un peu différente, d'une façon symétrique par rapport aux variables que l'on considère. On peut, par exemple, étant donnée l'équation

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0,$$

chercher s'il existe entre x, y, z une relation qui entraîne l'équation donnée. Cela revient à chercher si l'équation

$$dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$$

est complètement intégrable. La condition d'intégrabilité est, pour cette équation,

$$\frac{\partial\left(-\frac{P}{R}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-\frac{P}{R}\right)}{\partial z}\left(-\frac{Q}{R}\right) = \frac{\partial\left(-\frac{Q}{R}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\frac{Q}{R}\right)}{\partial z}\left(-\frac{P}{R}\right)$$

ou

$$-R\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial R}{\partial y} + \left(R\frac{\partial P}{\partial z} - P\frac{\partial R}{\partial z}\right)\frac{Q}{R}$$
$$+ R\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial R}{\partial x} - \left(R\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial R}{\partial z}\right)\frac{P}{R} = 0,$$

ou, après réduction,

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0.$$

VII. — Équations aux dérivées partielles du premier ordre.

357. *Méthode des caractéristiques.* — Soit une équation

(1) $$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

z étant une fonction inconnue de $x_1, \ldots, x_n$, p_i étant égal à $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ et F étant une fonction donnée de toutes ces quantités. Nous allons d'abord étendre à cette équation la notion de *caractéristiques* que nous avons introduite dans l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires. Posons

$$p_{i,k} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_k};$$

F, en tant que fonction des $2n+1$ variables z, x et p, a, par rapport à ces variables, des dérivées partielles; nous poserons

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Z, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i, \qquad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i.$$

Remarquons que, lorsque F est linéaire par rapport aux p, $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ n'est autre que le coefficient de p_i dans l'équation donnée, coefficient que nous avons désigné par P_i dans l'étude de ces équations. Nous avons été conduits à un système comprenant les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n}.$$

Supposons qu'on connaisse une intégrale de (1), soit

(2) $$z = \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

La valeur correspondante de p_i est

(2 *bis*) $$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

t étant une variable auxiliaire, considérons le système

(3) $$dt = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n},$$

en supposant que, dans les fonctions P_i, on remplace z par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ et p_i par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. Il y a, pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un système de fonctions de t dont les différentielles satisfont à (3). Imaginons

que dans (2) et (2 *bis*) on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par ces fonctions; z et les p deviennent des fonctions de t; calculons leurs différentielles. Nous avons

$$dz = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,dx_i = \sum p_i\,dx_i = dt\sum P_i p_i,$$

$$dp_i = p_{i,1}\,dx_1 + \ldots + p_{i,n}\,dx_n = dt(P_1 p_{i,1} + \ldots + P_n p_{i,n}).$$

Dérivons par rapport à x_i l'équation (1), z étant supposé remplacé par φ et p_i par $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant les variables indépendantes. On a, F étant constamment nul,

$$Z p_i + X_i + P_1 p_{1,i} + P_2 p_{2,i} + \ldots + P_n p_{n,i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

ces relations, qui ont lieu, les x étant variables indépendantes, ont encore lieu si les x sont considérés comme fonctions d'une nouvelle variable. On déduit des deux dernières équations

$$dp_i = -\,dt(X_i + Z p_i).$$

Il en résulte que, quand $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont fonctions de t satisfaisant à (3), z étant défini par (2) et ses dérivées partielles par (2 *bis*), les $2n+1$ fonctions $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ de t vérifient le système

$$(4)\quad dt = \frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{\Sigma P_i p_i} = -\frac{dp_1}{X_1 + Z p_1} = \ldots = -\frac{dp_n}{X_n + Z p_n}.$$

Remarquons que ce système (4) peut être écrit, *a priori*, sans connaître la fonction φ, qui n'y entre pas d'une manière explicite.

Cela posé, soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ un système de valeurs attribuées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soient ζ la valeur qui en résulte pour $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, et π_i la valeur qui en résulte pour $p_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Nous dirons, d'une façon générale, qu'un tel ensemble de valeurs $\xi_1, \ldots, \xi_n$, ζ, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ constitue un *élément de l'intégrale* φ.

Partons du système (3) dans lequel z serait remplacé, comme précédemment, par φ, et p_i par $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$. Il y a un système bien déterminé de fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de t satisfaisant à (3) et prenant pour $t = 0$ les valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (ceci en supposant remplies certaines conditions précisées dans les théorèmes d'existence).

D'autre part, partons du système (4), considéré indépendamment de son origine, c'est-à-dire les différentes fonctions X, P, Z étant fonctions des $2n+1$ variables indépendantes x_i, z, p_i. Il y a, pour

ces variables, un système de fonctions de t satisfaisant à (4) et prenant pour $t=0$ les valeurs $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_n$.

Or, du système (3), auquel on adjoint (2) et (2 *bis*), nous avons pu déduire le système (4). De plus, au système initial $t=0$, $x_1=\xi_1, \ldots, x_n=\xi_n$ correspondent pour $z, p_1, \ldots, p_n$ les valeurs ζ, $\pi_1, \ldots, \pi_n$. Donc la solution de (4) déterminée par le système initial $t=0$, $x_i=\xi_i$, $z=\zeta$, $p_i=\pi_i$ est identique à la solution de (3) partant du système initial $\xi_1, \ldots, \xi_n$ pour $t=0$, à laquelle on adjoint les équations (2) et (2 *bis*).

Or, le système (4) est, comme nous l'avons vu, indépendant de φ. Cela montre que deux intégrales $z=\varphi$, différentes, mais contenant le même élément $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta, \pi_1, \ldots, \pi_n)$, contiennent, par cela même, tous les éléments $x_1, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n$ constitués par les fonctions de t qui sont solutions de (4) et partent de $\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta$, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ pour $t=0$.

On appelle *caractéristique* toute suite d'éléments x_i, z, p_i qui sont des fonctions de t satisfaisant à (4). On voit qu'*une caractéristique est déterminée par un seul élément* et qu'*une intégrale de* (1), *dès qu'elle contient un certain élément, contient par cela même tous les éléments de la caractéristique déterminée par cet élément.*

358. Donnons une forme géométrique à ces considérations, en prenant d'abord le cas de deux variables indépendantes x, y. Soient p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et à y. Un système de fonctions x, y, z d'un paramètre t définit une courbe. En chaque point de cette courbe, considérons le plan d'équation

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0.$$

Une intégrale $z=\varphi(x, y)$ de l'équation donnée est représentée par une surface dont le plan tangent au point (x, y, z) est le plan précédent. Les résultats obtenus dans le cas général s'interprètent ainsi :

Une surface intégrale qui renferme l'élément $(\xi, \eta, \zeta, \pi, \chi)$ contient par cela même tous les éléments de la caractéristique définie par ce point, c'est-à-dire qu'elle contient tous les points de la courbe caractéristique et est tangente en chacun de ces points à un certain plan dont la position ne dépend que de l'équation aux dérivées partielles données.

En adoptant le même langage géométrique pour n variables, nous dirons que, dans l'espace à $n+1$ dimensions, une caractéristique est constituée par une courbe décrite par le point $(x_1, \ldots, x_n, z)$ dont les coordonnées sont fonctions d'un paramètre t, un certain plan étant attaché, en outre, à chaque point de la courbe, à savoir : le plan d'équation

$$p_1(X_1 - x_1) + \ldots + p_n(X_n - x_n) - (Z - z) = 0.$$

359. Cela étant, toute intégrale de (1) est constituée par un système de caractéristiques. Or, dans l'intégrale, il y a n variables indépendantes, tandis que dans une caractéristique il n'y a qu'une variable indépendante. On doit donc, pour former une intégrale, chercher à faire varier une caractéristique en fonction de $n-1$ paramètres.

Une caractéristique est déterminée par un de ses éléments, soit ξ_i, ζ, π_i. Prenons pour ξ_i, ζ, π_i des fonctions de $n-1$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, et désignons par x_i, z, p_i les intégrales du système (4) qui partent de l'élément initial

$$t = 0, \qquad x_i = \xi_i, \qquad z = \zeta, \qquad p_i = \pi_i.$$

x_i, z, p_i sont, dans ces conditions, des fonctions de n variables indépendantes, savoir : $t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

Pour que ces $2n+1$ fonctions x_i, z, p_i constituent une solution de (1), il faut et il suffit que, si l'on change de variables indépendantes en remplaçant $t, u_1, \ldots, u_{n-1}$ par les x, z devienne une fonction des x qui satisfasse à l'équation (1) et dont la dérivée partielle par rapport à x_i soit p_i. On peut exprimer ces deux conditions sans faire le changement de variables, en exprimant que :

1° Les fonctions de $t, u_1, \ldots, u_{n-1}$ obtenues pour x_i, z, p_i satisfont à (1);

2° Les différentielles de ces fonctions sont liées par la relation

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0.$$

Cette relation exprime bien, en effet, que z a pour dérivée p_i par rapport à x_i.

360. Occupons-nous d'abord de la première condition. Remarquons que le premier membre de (1), en tant que fonction des $2n+1$ variables indépendantes x_i, z, p_i, constitue une intégrale première du système (4). La différentielle de cette fonction est, en

effet,

$$Z\,dz + \Sigma X_i\,dx_i + \Sigma P_i\,dp_i$$

ou, en remplaçant dz, dx_i, dp_i par des quantités proportionnelles tirées de (4),

$$Z\,\Sigma P_i p_i + \Sigma X_i P_i - \Sigma P_i(X_i + Z p_i),$$

c'est-à-dire o. Par conséquent, F reste constant lorsque x_i, z, p_i varient en satisfaisant à (4). On a, en particulier,

$$F(z, x_i, p_i) = F(\zeta, \xi_i, \pi_i).$$

Pour que la première condition soit vérifiée, il est donc nécessaire et suffisant de prendre pour ζ, ξ_i, π_i des fonctions de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant à l'équation

$$F(\zeta, \xi_i, \pi_i) = 0.$$

361. Cherchons maintenant à réaliser la deuxième condition, c'est-à-dire à vérifier la relation

$$dz - \Sigma p_i\,dx_i = 0,$$

les variables indépendantes étant $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, t$.

Si l'on exprime ces différentielles dz et dx_i en fonction de t et des u, on devra annuler, dans le premier membre, les coefficients de dt, $du_1, \ldots, du_{n-1}$, ce qui donne d'abord la relation

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

puis $(n-1)$ relations de la forme

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0,$$

où u est remplacé par $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$.

L'équation (5) est vérifiée, car on a, d'après (4),

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \Sigma P_i p_i, \qquad \frac{\partial x_i}{\partial t} = P_i.$$

Pour chacune des autres équations, posons

$$A = \frac{\partial z}{\partial u} - \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial u};$$

A doit être nul. Calculons $\frac{\partial A}{\partial t}$:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial t} - \sum \frac{\partial p_i}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \sum p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial t}.$$

En dérivant (5), on a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial t} = \sum \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial t} + \sum p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u\, \partial t}.$$

En portant cette valeur de $\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial t}$ dans $\frac{\partial A}{\partial t}$, on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sum \left(\frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial t} - \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial t} \right).$$

Remplaçons $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ par P_i et $\frac{\partial p_i}{\partial t}$ par $-(X_i + Z p_i)$; il vient

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sum \left[P_i \frac{\partial p_i}{\partial u} + (X_i + Z p_i) \frac{\partial x_i}{\partial u} \right].$$

Dérivons par rapport à u l'équation (1) que l'on suppose vérifiée (n° 360); nous avons

$$Z \frac{\partial z}{\partial u} + \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial u} + \sum P_i \frac{\partial p_i}{\partial u} = 0,$$

de sorte que nous pouvons mettre $\frac{\partial A}{\partial t}$ sous la forme

$$\frac{\partial A}{\partial t} = Z \left(- \frac{\partial z}{\partial u} + \sum p_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \right).$$

Cela montre que l'on a

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - Z.A.$$

En intégrant cette équation différentielle, t étant la seule variable (les u recevant des valeurs constantes), on obtient

$$A(t) = A(0) e^{-\int_0^t Z\, dt},$$

de sorte que, pour que A soit nul quel que soit t, il faut et il suffit que $A(0)$ soit nul. Or, pour $t = 0$, x_i, z, p_i prennent les valeurs ξ_i, ζ, π_i; par conséquent, on devra choisir pour ξ_i, ζ, π_i des fonctions

de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ satisfaisant aux $n-1$ relations

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \sum \pi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0.$$

En résumé, *si l'on construit les courbes caractéristiques de* (4), *on aura une intégrale de* (1) *en prenant pour élément initial d'une caractéristique des fonctions* ξ_i, ζ, π_i *de* $n-1$ *variables* u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$ *vérifiant les* n *relations*

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{l} F(\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u_h} - \sum \pi_i \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u_h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1). \end{array} \right.$$

La solution de (4) *qui part du système initial* ξ_i, ζ, π_i *constitue une solution de* (1).

362. Indiquons deux solutions particulières du système (6). Supposons en premier lieu qu'on demande de trouver une intégrale de (1) qui, pour $x_1 = \xi_1$, se réduise à une fonction donnée des autres variables, soit $\psi(x_2, \ldots, x_n)$; cette question constitue le *problème de Cauchy*. Il faut que l'on ait

$$z(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) = \psi(x_2, \ldots, x_n).$$

Cherchons à satisfaire aux équations (6) en faisant jouer le rôle de $u_1, \ldots, u_{n-1}$ à $\xi_2, \ldots, \xi_n$. La première équation ne change pas de forme; les $n-1$ autres deviennent

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi_2} - \pi_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi_2} - \pi_2 = 0, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi_3} - \pi_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi_3} - \pi_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial \xi_n} - \pi_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial \xi_n} - \pi_n = 0. \end{array}$$

Nous satisferons à ces équations en prenant

$$\xi_1 = \text{const.}, \qquad \zeta = \psi(\xi_2, \ldots, \xi_n), \qquad \pi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}, \qquad \ldots, \qquad \pi_n = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_n},$$

et en considérant π_1 comme étant la fonction définie par l'équation

$$F(\zeta, \xi_1, \ldots, \xi_n, \pi_1, \ldots, \pi_n) = 0,$$

équation qui peut être résolue par rapport à π_1, pourvu que P_1 soit différent de o.

Dans ces conditions, le système (4) définit pour x_i, z, p_i des fonctions de $\xi_2, \ldots, \xi_n, t$ satisfaisant à l'équation (1). Pour $t = 0$, on a $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$, $z = \zeta$, de sorte que pour $x_1 = \xi_1$ on a bien

$$z = \psi(x_2, \ldots, x_n).$$

Dans le cas de deux variables indépendantes x, y, le problème se pose ainsi : *Déterminer une surface intégrale en l'assujettissant à passer par une courbe donnée, située dans un plan parallèle au plan des* yz. Soient

$$x = \xi, \qquad z = \psi(y)$$

les équations de cette courbe. En désignant les valeurs initiales de x, y, z, p, q par $\xi, \eta, \zeta, \pi, \chi$, et considérant η comme un paramètre, les équations à vérifier sont ici

$$F(\zeta, \xi, \eta, \pi, \chi) = 0,$$
$$\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - \pi \frac{\partial \xi}{\partial \eta} - \chi = 0.$$

Nous prendrons comme solution de ces équations : ξ constant, $\zeta = \psi(\eta)$, $\chi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}$, π étant défini par la première équation.

363. On a une solution des équations (6) en prenant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \zeta$ constants; $\pi_1, \ldots, \pi_n$ seront liés par $F = 0$; on prendra $n - 1$ de ces dernières variables comme paramètres. La solution que l'on obtient ainsi contient $n + 1$ constantes arbitraires.

364. *Notion d'intégrale complète.* — Soit une équation

$$V(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \tag{1}$$

z étant une fonction des x définie par cette équation, les a étant des paramètres en nombre égal au nombre des variables x. Dérivons cette équation par rapport à chacune des variables; nous avons, avec les notations habituelles, les n relations

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial z} p_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Si l'on élimine $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre les $n + 1$ équations (1) et (2), on

obtient en général une équation, soit

$$(3) \qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0.$$

Cette équation (3) constitue une équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle satisfait la fonction z définie par (1). On dit que cette fonction z est une *intégrale complète* de l'équation aux dérivées partielles (3). D'une façon générale, nous appellerons *intégrale complète* d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre toute intégrale qui contient autant de paramètres qu'il y a de variables indépendantes.

Nous allons montrer que, si l'on connaît une intégrale complète de l'équation (3), on peut trouver toutes les intégrales de (3) par des opérations de dérivation et d'élimination. Intégrer (3), qui est le résultat de l'élimination de $a_1, \ldots, a_n$ entre (1) et (2), revient à trouver des fonctions $z, a_1, a_2, \ldots, a_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vérifiant les équations (1) et (2). Or, les x étant variables indépendantes et $z, a_1, \ldots, a_n$ étant supposés remplacés par leurs valeurs en fonction des x, on déduit de (1) par différentiation

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial z} dz + \frac{\partial V}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0.$$

En tenant compte de la valeur de dz et des relations (2), cette équation se réduit à

$$(5) \qquad \frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0.$$

L'équation (5) est équivalente à (4) quand (1) et (2) sont vérifiées; (5) peut l'être de différentes manières :

1° En prenant

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0.$$

Ces équations jointes à (1) et (2) forment un système de $2n + 1$ équations qu'on peut résoudre par rapport à $z, a_1, \ldots, a_n, p_1, \ldots, p_n$. On a ainsi une fonction z de $x_1, \ldots, x_n$ dont les dérivées sont égales aux p, d'après (2), et qui constitue une solution ne renfermant rien d'arbitraire : c'est ce qu'on appelle une *solution singulière* de l'équation (3).

2° Si les dérivées $\frac{\partial V}{\partial a_i}$ ne sont pas toutes nulles, (5) est une relation différentielle proprement dite. Il faut, pour qu'elle soit vérifiée,

que $a_1, \ldots, a_n$ soient liés par une relation au moins. Supposons, d'une façon générale, qu'il y ait, entre les a, k relations $(1 \leq k \leq n)$, soient

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_k(a_1, \ldots, a_n) = 0. \end{array}\right.$$

Elles entraînent les k relations différentielles

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial a_n} da_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial a_1} da_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_k}{\partial a_n} da_n = 0. \end{array}\right.$$

(5) doit en être une conséquence, ce qui exige que le premier membre de (5) soit une combinaison linéaire des premiers membres de ces équations. Donc, il existe des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tels que

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial a_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_n} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial a_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial a_n}. \end{array}\right.$$

Nous obtiendrons une solution de la manière suivante. Nous choisirons arbitrairement l'entier k, puis les fonctions $f_1, \ldots, f_k$. Cela étant, l'équation (1), les équations (2), les équations (6) et les équations (8) forment un système de $2n + k + 1$ relations qui déterminent les fonctions $z, p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. En éliminant les a et les λ entre ces équations, on a en z une intégrale qui dépend des fonctions arbitraires $f_1, \ldots, f_k$.

Remarquons qu'on peut prendre $k = n$, ce qui revient à attribuer aux a des valeurs constantes; on retrouve comme intégrale l'intégrale complète dont on est parti.

365. Examinons en particulier le cas de deux variables indépendantes. Soit l'équation

$$(1)\qquad V(z, x, y, a, b) = 0,$$

a, b étant deux paramètres arbitraires. Avec les notations habituelles, les équations (2) sont

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Soit

$$(3) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

le résultat de l'élimination de a et b entre (1) et (2). On dit que (1) définit pour z une intégrale complète de (3). Dire que (3) est vérifiée revient à dire qu'il existe pour z, a, b des fonctions de x, y vérifiant (1) et (2). Ces fonctions satisfont à l'équation obtenue en différentiant (1) :

$$\frac{\partial V}{\partial z}\,dz + \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial a}\,da + \frac{\partial V}{\partial b}\,db = 0.$$

En tenant compte de (2), cette équation se réduit à

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial a}\,da + \frac{\partial V}{\partial b}\,db = 0.$$

On peut satisfaire à celle-ci en prenant

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

En joignant ces deux équations à (1) et en éliminant a et b entre les trois équations obtenues, on a une intégrale singulière de l'équation (3).

Si $\frac{\partial V}{\partial a}$ et $\frac{\partial V}{\partial b}$ ne sont pas tous deux nuls, la relation (4) montre qu'il existe une relation au moins entre a et b. Si l'on se donne deux relations entre a et b, cela revient à prendre a et b constants. On retrouve, comme intégrale de (3), l'intégrale complète définie par $V = 0$.

Si l'on se donne une relation seulement entre a et b, soit

$$b = \varphi(a),$$

l'application de la méthode générale montre que, pour avoir une intégrale, on doit éliminer a et b entre les trois équations

$$V(z, x, y, a, b) = 0,$$
$$b = \varphi(a),$$
$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\varphi'(a) = 0.$$

L'intégrale qu'on obtient ainsi dépend de la relation arbitraire introduite entre a et b.

366. En résumé, la connaissance d'une intégrale complète d'une équation aux dérivées partielles permet d'obtenir les intégrales de cette équation. Nous sommes donc conduits à la recherche des intégrales complètes. Remarquons que la méthode des caractéristiques permet de trouver des intégrales complètes, en prenant la solution indiquée au n° 363, p. 155.

On peut dans certains cas, étant donnée une équation, en apercevoir directement une intégrale complète. Prenons, par exemple, l'équation de Clairaut généralisée, qui est

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n + f(p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

f étant une fonction donnée. La fonction

$$z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

satisfait à cette équation; c'est une intégrale complète, car elle dépend de n paramètres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Considérons de même, dans le cas de deux variables x, y, l'équation

$$q = f(p).$$

La fonction $z = ax + yf(a) + b$, où a et b sont deux constantes arbitraires, est une intégrale complète. On a, en effet, pour cette fonction, $p = a$, $q = f(a) = f(p)$.

367. Nous allons indiquer, en nous bornant au cas de deux variables indépendantes x, y, une méthode pour la recherche d'une intégrale complète.

Supposons d'abord l'équation donnée résolue par rapport à l'une des dérivées partielles, soit

$$q = f(x, y, z, p). \tag{1}$$

Supposons qu'on puisse trouver pour p une fonction $\psi(x, y, z)$ dépendant d'une constante arbitraire a et telle que l'équation aux différentielles totales

$$dz = \psi\, dx + f(x, y, z, \psi)\, dy$$

soit complètement intégrable. En effectuant cette intégration, on introduit une nouvelle constante arbitraire et l'on obtient une fonction z de x, y renfermant deux constantes arbitraires et satisfaisant à (1) : c'est une intégrale complète de (1).

Donnons un exemple de cas où l'on peut apercevoir directement la fonction ψ; soit l'équation

$$q = f(p, y).$$

Posons $p = a$, il en résulte $q = f(a, y)$; l'équation

$$dz = a\,dx + f(a, y)\,dy$$

est intégrable et donne

$$z = ax + \int f(a, y)\,dy + b.$$

On a là une fonction dépendant de deux paramètres a, b et satisfaisant à l'équation donnée. C'est donc une intégrale complète de cette équation.

368. Revenons maintenant au cas de l'équation générale

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{1}$$

et cherchons à appliquer la méthode précédente. Pour cela, nous chercherons à adjoindre à cette équation une équation de la forme

$$\Phi(x, y, z, p, q) = a, \tag{2}$$

telle qu'en résolvant ces deux équations par rapport à p et q, on trouve, pour p et q, deux fonctions de x, y, z rendant complètement intégrable l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy. \tag{3}$$

Il faut et il suffit pour cela (n° 350, p. 142) que l'on ait

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} q - \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial z} p = 0. \tag{4}$$

Dérivons les équations (1) et (2), les variables indépendantes étant x, y, z, tandis que p, q sont les fonctions de ces variables définies par ces équations (1) et (2). Soient X, Y, Z, P, Q les dérivées de F par rapport à x, y, z, p, q; X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1 les dérivées de Φ par rapport à x, y, z, p, q.

Nous avons, en dérivant (1) et (2) par rapport à z,

$$Z + P\frac{\partial p}{\partial z} + Q\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

$$Z_1 + P_1\frac{\partial p}{\partial z} + Q_1\frac{\partial q}{\partial z} = 0,$$

d'où

$$Q_1 Z - Q Z_1 + (P Q_1 - Q P_1) \frac{\partial p}{\partial z} = 0,$$

$$P_1 Z - P Z_1 + (P_1 Q - P Q_1) \frac{\partial q}{\partial z} = 0;$$

on obtient de même

$$Q_1 Y - Q Y_1 + (P Q_1 - Q P_1) \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

$$P_1 X - P X_1 + (P_1 Q - P Q_1) \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

On voit que la relation (4) se transforme en

$$Q_1 Y - Q Y_1 + q(Q_1 Z - Q Z_1) + (P_1 X - P X_1) + p(P_1 Z - P Z_1) = 0$$

(en supposant $P Q_1 - Q P_1 \neq 0$).

En groupant les termes en X_1, Y_1, Z_1, P_1, Q_1, cette équation s'écrit

$$P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (P p + Q q) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (X + p Z) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + q Z) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Pour trouver une intégrale de cette équation linéaire, on est conduit, d'après la méthode générale, à considérer le système différentiel suivant :

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = - \frac{dp}{X + pZ} = - \frac{dq}{Y + qZ}.$$

C'est précisément le système auquel on est conduit par la méthode des caractéristiques, mais on l'utilise différemment. On en connaît une intégrale première, savoir : F; on cherche à en obtenir une seconde intégrale première Φ, telle que le système

$$F = 0, \qquad \Phi = a$$

puisse être résolu par rapport à p et q, soit

$$p = \psi(x, y, z), \qquad q = \psi_1(x, y, z).$$

L'équation

$$dz = \psi\, dx + \psi_1\, dy$$

peut être complètement intégrée et donne pour z une fonction de x, y renfermant deux constantes arbitraires et qui constitue pour l'équation donnée une intégrale complète.

369. Traitons un exemple. Soit l'équation

$$pq - z = 0.$$

Le système différentiel auxiliaire est le suivant :

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{dz}{2pq} = \frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}.$$

En égalant le deuxième et le quatrième rapport, on a

$$dy = dp, \qquad \text{d'où} \qquad p = y + a.$$

A cette intégrale première, résolue par rapport à p, joignons l'équation donnée, résolue par rapport à q, soit

$$q = \frac{z}{p} = \frac{z}{y+a}.$$

Nous avons à intégrer l'équation différentielle totale

$$dz = (y+a)\,dx + \frac{z}{y+a}\,dy,$$

ce qui revient à intégrer le système

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + a, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y+a}.$$

On déduit de la première équation, où l'on considère y comme un paramètre,

$$z = x(y+a) + \varphi(y).$$

d'où

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \varphi'(y).$$

La fonction φ doit donc satisfaire à l'équation

$$x + \varphi'(y) = \frac{x(y+a) + \varphi(y)}{y+a},$$

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \frac{1}{y+a},$$

d'où

$$\varphi(y) = b(y+a),$$

b étant une nouvelle constante arbitraire. La fonction

$$z = (x+b)(y+a)$$

est une intégrale complète de l'équation donnée. Pour avoir la solution générale, nous introduirons, entre a et b, une relation arbitraire,

soit

$$b = \psi(a),$$

et nous éliminerons a et b entre les trois équations

$$\begin{gathered} z-(x+b)(y+a)=0, \\ \psi'(a)(y+a)+x+b=0, \\ b=\psi(a), \end{gathered}$$

ce qui revient à éliminer a entre les deux équations

$$z-[x+\psi(a)](y+a)=0, \qquad \psi'(a)(y+a)+x+\psi(a)=0.$$

370. Si l'on veut, pour la même équation, employer la méthode des caractéristiques, il faut intégrer complètement le système différentiel précédent. On en déduit d'abord

$$q = x+b, \qquad p = y+a, \qquad \frac{p}{q} = c.$$

Mettons en évidence un système de valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0. Ces trois équations s'écrivent

$$(1) \qquad x-x_0 = q-q_0, \qquad y-y_0 = p-p_0, \qquad \frac{p}{p_0} = \frac{q}{q_0}.$$

D'ailleurs, des trois derniers rapports, on déduit

$$\frac{dz}{2pq} = \frac{q\,dp+p\,dq}{2pq},$$

d'où

$$dz = q\,dp + p\,dq,$$

d'où, en intégrant,

$$(2) \qquad z - z_0 = pq - p_0 q_0.$$

En joignant cette relation aux trois autres, nous avons une solution du système différentiel auxiliaire, et les quatre équations obtenues peuvent être considérées comme définissant une courbe caractéristique pour l'équation donnée.

Cela étant, résolvons le problème de Cauchy, c'est-à-dire cherchons une intégrale qui se réduise, pour $x = x_0$, à la fonction $z = \varphi(y)$. D'après la méthode générale (n°s 362, 363, p. 155), il faut prendre pour x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 des fonctions d'un paramètre u vérifiant les équations suivantes :

$$p_0 q_0 - z_0 = 0, \qquad \frac{\partial z_0}{\partial u} - p_0 \frac{\partial x_0}{\partial u} - q_0 \frac{\partial y_0}{\partial u} = 0.$$

Prenons y_0 comme paramètre u et x_0 fixe; la seconde équation se réduit à

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} - q_0 = 0.$$

Or, on doit avoir

$$z_0 = \varphi(y_0) = \varphi(u),$$

d'où

$$\frac{\partial z_0}{\partial u} = \varphi'(u).$$

Nous prendrons donc $q_0 = \varphi'(u)$; p_0 sera donné par la première équation, c'est-à-dire que l'on aura

$$p_0 = \frac{z_0}{q_0} = \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}.$$

En résumé, on prend

$$x_0 = \text{const.}, \qquad y_0 = u, \qquad z_0 = \varphi(u), \qquad p_0 = \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}, \qquad q_0 = \varphi'(u);$$

x, y, z, p, q sont donnés par les quatre équations (1), (2) en fonction de l'un d'entre eux et de x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, c'est-à-dire de u.

VIII. — Équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur.

371. Il résulte de l'étude des équations du premier ordre que la recherche de l'intégrale générale peut toujours se ramener à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Il n'en est plus de même pour les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur ou égal à 2. Dans ce cas, c'est par exception que l'on peut résoudre le problème. Nous avons vu quelques exemples d'équations aux dérivées partielles particulièrement simples que nous avons pu intégrer soit directement, soit par un changement de variables (t. I, p. 135).

Le plus souvent, on doit renoncer à chercher la solution générale d'une équation donnée et se borner à résoudre certains problèmes particuliers. On adjoint par exemple à l'équation donnée certaines conditions et l'on cherche une intégrale qui satisfasse à ces conditions.

Citons, dans cet ordre d'idées, le problème de Dirichlet : on se donne dans le plan une aire A ayant pour frontière une courbe C, on se donne en outre sur C une succession de valeurs formant une fonction continue, et l'on se propose de trouver une fonction f de deux variables réelles x, y définie en tous les points de A, y compris le

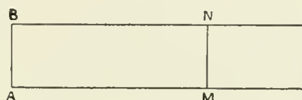
contour, se réduisant sur le contour à la fonction donnée et satisfaisant en tout point intérieur à A à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

372. Montrons par un exemple comment on peut trouver une fonction assujettie à satisfaire à une équation aux dérivées partielles et à certaines conditions supplémentaires. On étudie, en Acoustique, la question suivante : on a un tuyau cylindrique rempli d'air, fermé à une extrémité et considéré comme indéfini dans un sens (*fig.* 29); on imagine que l'on imprime à la tranche d'air AB, au moyen de la paroi, un certain mouvement, et l'on cherche la modification qui en résulte pour la colonne d'air contenue dans le tube.

Des considérations physiques conduisent au résultat suivant : soient MN une tranche d'air située à la distance x de AB, u son déplacement à l'instant t, compté positivement dans le sens AM ; u est fonction des

Fig. 29.



deux variables t, x et satisfait à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

a étant une certaine constante positive.

Les conditions initiales, qui constituent les relations supplémentaires auxquelles doit satisfaire la fonction u cherchée, sont les suivantes :

1° A l'instant origine $t = 0$, la paroi et la colonne d'air sont au repos, c'est-à-dire que l'on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \qquad \text{pour } t = 0,\ x \geqq 0.$$

2° On imprime à la paroi ou à la tranche initiale, au moyen d'un piston, un mouvement dont la loi est donnée, c'est-à-dire que l'on a

$$(3) \qquad u = f(t) \qquad \text{pour } x = 0,\ t \geqq 0,$$

$f(t)$ étant une fonction donnée satisfaisant aux conditions

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Cela posé, il résulte de l'équation aux dérivées partielles (1) que u est de la forme (*cf.* t. I, p. 136)

$$(4) \qquad u = \varphi(x + at) + \varphi_1(x - at).$$

Nous allons déterminer les fonctions φ et φ_1 au moyen des conditions initiales (2) et (3). On a

$$(5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\varphi'(x + at) - a\varphi_1'(x - at).$$

Pour $t = 0$, les équations (4) et (5) donnent

$$u = \varphi(x) + \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a\varphi'(x) - a\varphi_1'(x),$$

d'où, en tenant compte des conditions (2),

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) + \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi'(x) - \varphi_1'(x) = 0 \end{array}\right\} \qquad (x \geqq 0).$$

La première relation donne, par dérivation,

$$\varphi'(x) + \varphi_1'(x) = 0,$$

d'où, en comparant avec la seconde,

$$\varphi'(x) = \varphi_1'(x) = 0.$$

On déduit de là, en désignant par c une certaine constante, les valeurs de φ et φ_1 pour des valeurs positives de l'argument :

$$(6) \qquad \varphi(x) = c, \qquad \varphi_1(x) = -c \qquad (x \geqq 0).$$

Pour $x = 0$, on a, d'après (4),

$$u = \varphi(at) + \varphi_1(-at),$$

d'où, en tenant compte de la condition (3),

$$\varphi(at) + \varphi_1(-at) = f(t) \qquad (t \geqq 0),$$

et, en tenant compte de la première équation (6),

$$\varphi_1(-at) = f(t) - \varphi(at) = f(t) - c.$$

Nous pouvons en déduire la valeur de la fonction φ_1 quand l'argu-

ment est négatif. Posons $-at = z$, il vient

$$\varphi_1(z) = f\left(-\frac{z}{a}\right) - c, \qquad \text{pour } z \leqq 0.$$

Nous sommes à présent en mesure de résoudre le problème. La solution est la suivante :

Considérons la tranche MN d'abscisse x. Distinguons deux cas :

1° On a

$$t \leqq \frac{x}{a} \qquad \text{ou} \qquad x - at \geqq 0.$$

Les arguments de φ et de φ_1 sont tous deux positifs. On a

$$\varphi = c, \qquad \varphi_1 = -c,$$

d'où

$$u = 0.$$

La tranche MN est en repos.

2° On a

$$t > \frac{x}{a} \qquad \text{ou} \qquad x - at < 0.$$

On a toujours $\varphi = c$; mais, l'argument de φ_1 étant négatif, on a

$$\varphi_1(x - at) = f\left(-\frac{x - at}{a}\right) - c = f\left(t - \frac{x}{a}\right) - c,$$

d'où

$$u = c + f\left(t - \frac{x}{a}\right) - c = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

On voit que, si l'on considère une tranche déterminée d'abscisse x, tant que $t \leqq \frac{x}{a}$, cette tranche reste immobile; quand $t > \frac{x}{a}$, son déplacement est $f\left(t - \frac{x}{a}\right)$. Cela correspond à ce fait physique que le déplacement imprimé à la tranche initiale se transmet intégralement aux tranches suivantes avec une vitesse égale à a.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

I. — Enveloppes des courbes et surfaces.

373. Dans un système de coordonnées cartésiennes x, y, z, un système de trois équations de la forme

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

où t est un paramètre, définit une *courbe*.

Une équation entre x, y, z de la forme

$$f(x, y, z) = 0$$

représente une *surface*. Un système de trois relations de la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

où u, v sont deux paramètres, représente aussi une surface.

On sait que la *tangente* à la courbe

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t),$$

au point de paramètre t, a pour équations

$$\frac{X - f(t)}{f'(t)} = \frac{Y - \varphi(t)}{\varphi'(t)} = \frac{Z - \psi(t)}{\psi'(t)},$$

en supposant que f', φ', ψ' ne sont pas nuls tous trois. On doit examiner à part le cas de $f' = \varphi' = \psi' = 0$. Il peut y avoir en un tel point, suivant les cas, une tangente déterminée ou non.

Les équations de la tangente s'écrivent encore

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz},$$

car dx, dy, dz sont proportionnels à $f'(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$.

Le *plan normal* à la courbe au point de paramètre t a pour équa-

tion, si les coordonnées sont rectangulaires,

$$(X - x)f'(t) + (Y - y)\varphi'(t) + (Z - z)\psi'(t) = 0$$

ou

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy + (Z - z)\,dz = 0.$$

Considérons maintenant une surface ayant pour équation

$$f(x, y, z) = 0$$

et une courbe tracée sur cette surface. Les coordonnées x, y, z d'un point de cette courbe varient en satisfaisant toujours à l'équation de la surface. Leurs différentielles, si elles existent, sont donc liées par la relation

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0.$$

Cela montre que la tangente à la courbe en un point est toujours située dans le plan d'équation

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0.$$

C'est le *plan tangent* à la surface en ce point.

Dans le cas où f'_x, f'_y, f'_z sont nuls, on a, en général, un *point singulier*.

La *normale* à la surface en un point est (en coordonnées rectangulaires) la droite d'équations

$$\frac{X - x}{f'_x} = \frac{Y - y}{f'_y} = \frac{Z - z}{f'_z}.$$

Dans le cas particulier où l'équation de la surface est résolue par rapport à l'une des variables, soit

$$z = \varphi(x, y),$$

l'équation du plan tangent prend la forme

$$(X - x)\varphi'_x + (Y - y)\varphi'_y - (Z - z) = 0.$$

Si l'on considère une courbe plane d'équation $f(x, y) = 0$, la tangente au point x, y a pour équation

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0.$$

Ces différents points étant rappelés, nous allons étudier la théorie des enveloppes.

374. *Enveloppe d'une courbe plane.* — Considérons une famille

de courbes planes dépendant d'un paramètre a, ayant pour équation

$$(1) \qquad f(x, y, a) = 0.$$

Prenons deux courbes de cette famille correspondant aux valeurs a et $a + \Delta a$ du paramètre :

$$(2) \qquad \begin{cases} f(x, y, a) = 0, \\ f(x, y, a + \Delta a) = 0. \end{cases}$$

Elles peuvent avoir des points communs dont les coordonnées satisfont alors aux équations (2) et, par suite, à l'équation

$$(3) \qquad \frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0,$$

qui est une combinaison des équations (2).

D'après la formule des accroissements finis, cette équation (3) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, a + \theta\,\Delta a) = 0,$$

θ étant variable avec x, y, a, mais toujours compris entre 0 et 1 ; et, d'après la théorie des fonctions implicites, si Δa varie d'une manière continue, les coordonnées x, y d'un point commun aux deux courbes varieront d'une manière continue, ceci sous certaines conditions précisées dans la théorie des fonctions implicites. Quand Δa tend vers 0, les points communs tendent vers les points communs aux deux courbes

$$(4) \qquad \begin{cases} f(x, y, a) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a}(x, y, a) = 0; \end{cases}$$

ceux-ci sont dits *points limites* pour la courbe (1). Quand a varie, ils ont un lieu géométrique dont l'équation s'obtient en éliminant a entre les équations (4). Ce lieu s'appelle l'*enveloppe* de la famille de courbes donnée.

Soient

$$R(x, y) = 0$$

son équation, et (x_0, y_0) un de ses points.

Les équations (4), où l'on remplace x, y par x_0, y_0, ont au moins une racine commune en a, soit a_0. Il y a pour x et y des fonctions continues de a satisfaisant à (4) et se réduisant à x_0, y_0 quand a se réduit à a_0. Si l'on suppose que l'on remplace x, y par ces fonc-

tions dans (1), le premier membre sera identiquement nul, ainsi que toutes ses dérivées, c'est-à-dire que l'on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

ce qui donne, d'après (4),

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}=0.$$

Si, pour le point considéré, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas tous deux nuls, cette équation montre que la tangente au lieu décrit par x, y, de coefficients $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$, est identique à la tangente à la courbe (1) qui passe par ce point. Le fait n'a plus lieu si (x_0, y_0) est un point singulier pour la courbe (1) de paramètre a_0.

375. Cherchons directement si, étant donnée la famille de courbes (1), il existe une courbe tangente à toutes les courbes de cette famille, le point de contact variant d'une manière continue avec a.

Soient x, y les coordonnées de ce point de contact inconnu. La tangente au lieu de ce point a pour coefficients $\frac{dx}{da}$, $\frac{dy}{da}$ et, comme elle doit coïncider avec la tangente à la courbe (1) en ce point, on doit avoir

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}=0.$$

De plus, x, y, fonctions de a, vérifient l'équation (1); on en déduit en dérivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

En comparant ces deux équations, on trouve

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0,$$

de sorte que, si le problème est possible, tout point du lieu satisfait à l'équation $R(x, y)=0$ obtenue en éliminant a entre les équations (4).

376. Remarquons que, s'il y a un point singulier dans chaque courbe de la famille (1), le lieu de ce point fait partie de l'enveloppe.

En effet, ses coordonnées satisfont aux équations

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

et par suite aussi à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

Prenons comme exemple la courbe ayant pour équation

$$f(x, y, a) = y^4 - y^2 + (x - a)^2 = 0,$$

a étant un paramètre variable. On a

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2(x - a).$$

L'élimination de a donne l'équation

$$y^2(y^2 - 1) = 0,$$

qui se décompose en

$$y^2 = 0, \qquad y = \pm 1.$$

Or, la courbe mobile est une courbe se déplaçant parallèlement à l'axe des x et ayant pour point double le point $x = a$, $y = 0$.

L'axe des x est donc un lieu de points singuliers, de sorte que l'enveloppe proprement dite se compose simplement des droites $y = \pm 1$.

377. Supposons maintenant que les courbes variables aient pour équation

$$f(x, y, a, b) = 0,$$

a et b étant deux paramètres liés par la relation

$$\varphi(a, b) = 0.$$

Considérons b comme une fonction de a définie par cette relation et dérivons par rapport à a la première équation. Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

D'ailleurs, de la relation entre a et b on déduit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

On peut tirer de là la valeur de $\frac{db}{da}$. En portant cette valeur dans la relation précédente, celle-ci se met sous la forme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial f}{\partial b} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} \end{vmatrix} = 0.$$

On doit, pour avoir l'équation de l'enveloppe, éliminer a et b entre cette relation et les équations

$$f(x, y, a, b) = 0, \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

378. *Remarques.* — 1° Étant donnée une famille de courbes dépendant d'un paramètre, si celui-ci entre linéairement dans l'équation des courbes, il n'y a pas d'enveloppe. En effet, l'équation de ces courbes est de la forme

$$f_1 + af_2 = 0.$$

Deux quelconques de ces courbes se coupent en des points fixes, communs à toutes les courbes de la famille; le lieu des points limites se réduit à ces points eux-mêmes.

2° Si le paramètre entre algébriquement dans l'équation des courbes, c'est-à-dire si celle-ci est de la forme

$$f_0 a^m + f_1 a^{m-1} + \ldots + f_m = 0,$$

pour trouver l'enveloppe, on reconnaît que l'on est ramené à éliminer a entre les dérivées de cette équation par rapport à a et par rapport à une variable d'homogénéité b obtenue en remplaçant a par $\frac{a}{b}$ et multipliant ensuite les deux membres de l'équation par b^m.

379. *Enveloppe d'une surface dépendant d'un paramètre.* — Soit une surface dépendant d'un paramètre a et ayant pour équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0.$$

Deux surfaces de cette famille correspondant aux valeurs a et $a + \Delta a$ du paramètre ont en commun une courbe qui varie quand Δa tend vers 0. On peut prendre pour équations de cette courbe

$$f(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{f(x, y, z, a + \Delta a) - f(x, y, z, a)}{\Delta a} = 0.$$

Quand Δa tend vers o, cette courbe tend vers une courbe limite qui a pour équations

$$(1) \qquad f(x, y, z, a) = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0.$$

C'est la *courbe caractéristique* de la surface considérée, et son lieu, quand a varie, est dit l'*enveloppe* de cette surface. En éliminant a entre les équations (1) et (2), on a son équation :

$$R(x, y, z) = 0.$$

Si un point (x, y, z) se déplace en restant sur l'enveloppe, à chaque système de valeurs de x, y, z on peut associer une valeur de a telle que le système x, y, z, a satisfasse aux équations (1) et (2), par suite à l'équation obtenue en différentiant (1), c'est-à-dire à

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial a} da = 0.$$

En tenant compte de (2), cette équation se réduit à

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

Cette équation montre que le plan tangent à l'enveloppe au point (x, y, z) est le même que le plan tangent en ce point à la surface (1).

380. Réciproquement, étant donnée la famille de surfaces (1), cherchons s'il existe une surface tangente à chaque surface (1), les coordonnées (x, y, z) d'un point de contact étant fonctions de deux paramètres dont l'un sera a. A tout système de coordonnées (x, y, z) d'un tel point correspondra un nombre a tel que le système x, y, z, a vérifie l'équation (1) et qu'en outre le plan tangent au lieu du point (x, y, z) soit confondu avec le plan tangent à (1). Cela exige que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0.$$

D'autre part, on déduit de (1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial a} da = 0;$$

d'où, par comparaison de ces deux relations,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0.$$

La surface cherchée, si elle existe, ne peut donc être que l'enveloppe des surfaces (1).

Les résultats du n° 377 s'appliquent au cas des surfaces dépendant de deux paramètres liés par une relation.

381. *Enveloppe d'une surface dépendant de deux paramètres.* — Soit

$$f(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface dépendant de deux paramètres indépendants a, b. Considérons deux surfaces de cette famille correspondant, l'une à a, b, l'autre aux valeurs $a + \Delta a$, $b + \Delta b$ des paramètres; la seconde a pour équation

$$f(x, y, z, a + \Delta a, b + \Delta b) = 0. \tag{2}$$

Ces deux surfaces se coupent suivant une certaine courbe; si Δa et Δb tendent vers o d'une manière quelconque, parmi les points de cette courbe, il y en a qui tendent vers des positions limites bien déterminées qui sont les points d'intersection des trois surfaces

$$\left\{\begin{aligned} &f(x, y, z, a, b) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a, b) = 0, \\ &\frac{\partial f}{\partial b}(x, y, z, a, b) = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces points s'appellent les *points limites*, et leur lieu, lorsque a et b varient, est encore dit l'*enveloppe* des surfaces (1).

Un point limite (x, y, z) a des coordonnées variant d'une façon continue avec a, b; l'équation (1), qui est identiquement vérifiée par ce système de valeurs de x, y, z, donne par différentiation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db = 0, \tag{4}$$

d'où résulte, en tenant compte de (3), la relation

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0,$$

qui montre que le plan tangent à l'enveloppe au point (x, y, z) est le même que le plan tangent en ce point à la surface variable.

382. Réciproquement, étant donnée la famille de surfaces (1), cherchons s'il existe une surface tangente à toutes les surfaces de cette famille. Si cela est, les coordonnées x, y, z d'un point de contact seront des fonctions de a, b telles que l'on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = 0.$$

Or, de (1) on déduit encore par différentiation la relation (4). Il en résulte, par comparaison avec la relation précédente,

$$\frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db = 0.$$

Ceci, devant avoir lieu quels que soient a et b, exige

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

La surface cherchée, si elle existe, coïncide donc avec l'enveloppe.

Nous nous sommes placés dans le cas général; il peut arriver que les points limites soient fixes, ou encore que le lieu des points limites soit une courbe.

383. *Enveloppes des courbes gauches.* — Considérons une courbe gauche C définie comme intersection de deux surfaces dépendant d'un paramètre a

$$(1) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, a) = 0, \\ \varphi(x, y, z, a) = 0. \end{cases}$$

Cherchons s'il existe une courbe Γ tangente à toutes les courbes C, le point de contact variant d'une manière continue avec a.

Les coordonnées x, y, z du point de contact d'une telle courbe, si elle existe, seront fonctions continues de a, satisferont aux équations (1) et par suite à

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz + \dfrac{\partial f}{\partial a}da = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz + \dfrac{\partial \varphi}{\partial a}da = 0. \end{cases}$$

Pour que Γ et C soient tangentes, il faut et il suffit que l'on ait

(3) $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{da} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{da} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{da} = 0, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{dx}{da} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{dy}{da} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\dfrac{dz}{da} = 0, \end{cases}$$

d'où, par comparaison avec (2),

(4) $$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0.$$

Un point (x, y, z) de l'enveloppe Γ, si elle existe, satisfait donc aux équations

(5) $$\begin{cases} f(x, y, z, a) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, a) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0, \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} = 0. \end{cases}$$

Il faut que ces quatre équations définissent des fonctions x, y, z de a; cette condition, qui est nécessaire pour que Γ existe, est d'ailleurs suffisante, car le point de coordonnées x, y, z que l'on déduit de ces relations satisfait à (2) et par suite à (3), donc décrit une courbe tangente à C. Mais, en général, ces quatre équations ne sont pas compatibles, de sorte qu'*en général une courbe gauche n'a pas d'enveloppe*.

384. *Remarques.* — Si l'une des équations (1) ne dépend pas de a, c'est-à-dire si l'une des surfaces qui définissent la courbe est fixe, les équations (4) se réduisent à une: on n'a plus que trois équations qui définissent en général x, y, z en fonction de a. La courbe variable a une enveloppe.

385. Revenons à la courbe ayant pour équations

(1) $$\begin{cases} f(x, y, z, a) = 0, \\ \varphi(x, y, z, a) = 0. \end{cases}$$

Quand a varie, elle décrit une surface dont on trouve l'équation en éliminant a entre (1), soit

$$R(x, y, z) = 0.$$

D'après la remarque précédente, la courbe ayant pour équations

(2) $$\begin{cases} R(x, y, z) = 0, \\ f(x, y, z, a) = 0 \end{cases}$$

a une enveloppe. Cette contradiction apparente tient à ce fait que le système (1) n'est pas complètement équivalent au système (2); la courbe (2) contient en général la courbe (1) plus d'autres courbes.

386. Considérons une surface dépendant d'un paramètre

$$f(x, y, z, a) = 0.$$

Elle a une enveloppe définie comme lieu de la caractéristique

$$f(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0.$$

Cette caractéristique est une courbe qui a une enveloppe. En effet, en appliquant la théorie, on doit prendre les quatre équations

$$f(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y, z, a) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(x, y, z, a) = 0.$$

On voit qu'elles se réduisent à trois et par suite qu'elles définissent x, y, z en fonction de a.

387. *Enveloppe de plans à un paramètre.* — Considérons un plan variable

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

A, B, C, D étant fonctions d'un paramètre. Lorsque ce paramètre varie, le plan a une enveloppe. Sa caractéristique est définie par l'équation (1) et par

$$(2) \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

A', B', C', D' étant les dérivées de A, B, C, D par rapport au paramètre.

D'après le n° 386, cette droite, en tant que caractéristique, a une enveloppe qui est le lieu du point dont les coordonnées sont définies par les équations (1), (2) et l'équation

$$(3) \qquad A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

La surface engendrée par la droite, c'est-à-dire l'enveloppe du

plan, est dite *surface développable*. Le lieu du point de contact de la caractéristique avec son enveloppe est dit l'*arête de rebroussement* de la développable ([1]).

II. — Courbure et torsion des courbes gauches.

388. *Plan osculateur.* — Considérons une courbe gauche ayant pour équations

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Considérons la tangente MT au point $M(x, y, z)$ de paramètre t :

$$\frac{X - x}{f'(t)} = \frac{Y - y}{\varphi'(t)} = \frac{Z - z}{\psi'(t)}.$$

Soit M′ un point voisin de M, correspondant à la valeur $t + \Delta t$ du paramètre. Menons par M la parallèle Mθ à la tangente en M′; l'équation du plan défini par MT, Mθ est

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f'(t + \Delta t) & \varphi'(t + \Delta t) & \psi'(t + \Delta t) \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \dfrac{f'(t + \Delta t) - f'(t)}{\Delta t} & \dfrac{\varphi'(t + \Delta t) - \varphi'(t)}{\Delta t} & \dfrac{\psi'(t + \Delta t) - \psi'(t)}{\Delta t} \end{vmatrix} = 0.$$

Si Δt tend vers 0, les éléments de la dernière ligne de ce déterminant tendent vers

$$f''(t) \quad \varphi''(t) \quad \psi''(t),$$

de sorte que le plan TMθ varie en tendant vers une position limite déterminée qui a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ f'(t) & \varphi'(t) & \psi'(t) \\ f''(t) & \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Ce plan est dit le *plan osculateur* à la courbe en M. Son équation s'écrit

$$(1) \quad (y'z'' - z'y'')(X - x) + (z'x'' - x'z'')(Y - y) + (x'y'' - y'x'')(Z - z) = 0.$$

([1]) Ces dénominations seront justifiées plus loin (*voir* Section X).

Nous poserons

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x''.$$

Le plan est déterminé tant que A, B, C ne sont pas nuls tous les trois.

Ce plan dépend du paramètre t, il a donc une enveloppe. Je dis que *la caractéristique du plan osculateur à une courbe en un point est la tangente à cette courbe*. En effet, pour définir cette caractéristique, nous devons adjoindre à l'équation (1) l'équation dérivée par rapport à t, qui est, toutes réductions faites,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (y'z''' - z'y''')(X - x) \\ \quad + (z'x''' - x'z''')(Y - y) + (x'y''' - y'x''')(Z - z) = 0 ; \end{array} \right.$$

c'est une droite passant par M. De plus, si l'on remplace dans ses équations $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ par x', y', z' qui sont les coefficients de la tangente, elles sont vérifiées. C'est donc la tangente en M.

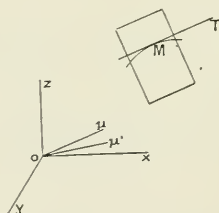
On voit que le lieu des tangentes à une courbe gauche C est une surface enveloppe d'un certain plan à un paramètre, par conséquent, d'après le n° 387, une surface *développable*.

Toute droite menée par M dans le plan normal est une *normale* à la courbe. On appelle *normale principale* la normale située dans le plan osculateur; on appelle *binormale* la normale perpendiculaire au plan osculateur.

389. Considérons une courbe rapportée à trois axes *rectangulaires* Ox, y, z. D'après la définition de la longueur d'un arc de courbe (t. I, p. 146), on a, s étant l'arc compté positivement dans le sens des t croissants,

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Fig. 30.



Considérons en M (*fig.* 30) le plan normal à la courbe. Il divise au voisinage de M la courbe en deux parties, situées de part et d'autre

par rapport à lui, et la tangente en deux demi-droites. Considérons la demi-tangente qui est du même côté par rapport au plan normal que l'arc de courbe partant de M dans le sens des t croissants. Nous dirons que c'est la *demi-tangente dirigée dans le sens positif* ou la *demi-tangente positive*. Soient α, β, γ ses cosinus directeurs, on a

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \pm \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} = \pm \frac{1}{s'}.$$

Supposons par exemple $x' > 0$, cela veut dire que x croît avec t. Si nous menons par M le plan parallèle au plan yOz, la demi-tangente dirigée dans le sens des t croissants est donc par rapport à ce plan du même côté que la partie positive de l'axe Ox; l'angle de cette demi-tangente avec Ox est donc aigu, par suite α est positif. Cela montre que devant le dernier rapport il faut prendre le signe $+$, de sorte que l'on a

$$\frac{\alpha}{x'} = \frac{\beta}{y'} = \frac{\gamma}{z'} = \frac{1}{s'}$$

ou

$$\alpha = \frac{x'}{s'} = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{y'}{s'} = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{z'}{s'} = \frac{dz}{ds}.$$

390. *Courbure.* — Soient M un point de la courbe, M' un point voisin, ω l'angle des tangentes à la courbe en M et M', la détermination choisie pour cet angle étant celle qui tend vers 0 quand M' tend vers M, son évaluation étant faite en parties de la circonférence de rayon 1. Considérons le rapport $\frac{\omega}{\text{arc}\,\mathrm{MM'}}$; nous allons montrer que, quand M' tend vers M, ce rapport tend vers une limite déterminée qu'on appelle la *courbure* en M. L'inverse est dit le *rayon de courbure* en M.

Par l'origine des coordonnées, menons (*fig.* 30) un segment $O\mu$ de longueur 1 parallèle à la demi-tangente positive en M; cela revient à considérer le point μ de coordonnées α, β, γ. Lorsque M décrit la courbe donnée C, μ décrit sur la sphère de rayon 1 et de centre O une certaine courbe qu'on appelle l'*indicatrice sphérique*. Soit σ la longueur de l'arc de courbe décrit par le point μ à partir d'une origine quelconque, compté positivement dans le sens où μ décrit l'indicatrice lorsque s croît. Soit μ' le point de l'indicatrice correspondant à M', on a

$$\omega = \mu O \mu' = \text{arc de grand cercle } \mu\mu'.$$

Or, cet arc de grand cercle $\mu\mu'$ est un infiniment petit équivalent à

la corde $\mu\mu'$ et par suite à l'arc d'indicatrice $\mu\mu'$. Nous sommes donc ramenés à étudier la limite du rapport

$$\frac{\text{arc}\,\mu\mu'}{\text{arc}\,\text{MM}'} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}}{\frac{\Delta s}{\Delta t}}.$$

Quand Δt tend vers o, ce rapport a une limite qui est

$$\frac{\sigma'_t}{s'_t} \quad \text{ou} \quad \frac{d\sigma}{ds},$$

de sorte que la courbure en M est $\frac{d\sigma}{ds}$, le rayon de courbure $\frac{ds}{d\sigma}$. Calculons ces quantités en fonction des éléments qui définissent la courbe.

On a

$$\sigma'^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2.$$

De $\alpha = \frac{x'}{s'}$ on déduit

$$\alpha' = \frac{x''s' - x's''}{s'^2},$$

d'où

$$\sigma'^2 = \frac{\Sigma(x''s' - x's'')^2}{s'^4},$$

ou, en développant le second membre,

$$\sigma'^2 = \frac{s'^2(x''^2 + y''^2 + z''^2) + s''^2(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2s's''(x'x'' + y'y'' + z'z'')}{s'^4}.$$

Dérivons la relation

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2;$$

on obtient

$$s's'' = x'x'' + y'y'' + z'z'',$$

de sorte que nous pouvons écrire après simplification

$$\sigma'^2 = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}{s'^4},$$

ou, d'après l'identité de Lagrange,

$$\sigma'^2 = \frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}{s'^4}.$$

En posant, comme précédemment,

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = z'x'' - x'z'', \qquad C = x'y'' - y'x'',$$

nous aurons

$$\sigma'^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{s'^4},$$

d'où l'expression du rayon de courbure (quantité essentiellement positive) :

$$R = \frac{s'}{\sigma'} = \frac{s'^3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

391. Revenons à l'indicatrice sphérique. Le plan $\mu O \mu'$ a pour position limite, quand μ' tend vers μ, le plan mené par O parallèlement au plan osculateur en M, de sorte que la tangente en μ à l'indicatrice sphérique est en même temps perpendiculaire à $O\mu$ et parallèle au plan osculateur en M. Elle est donc parallèle à la normale principale en M. Choisissons sur elle et par suite sur la normale principale, comme direction positive, celle de la demi-tangente à l'indicatrice sphérique dirigée dans le sens des arcs σ croissants.

Remarquons que si l'on change le sens de parcours sur la courbe donnée, ce qui a pour effet de changer le sens de la direction positive de la tangente, chaque point μ est remplacé par son symétrique par rapport à O ; l'indicatrice est remplacée par la courbe symétrique par rapport à O. Comme on change aussi le sens de parcours sur cette courbe, on voit que la direction positive sur la normale principale reste la même. Donc, *sur la normale principale, la direction positive est indépendante du sens de parcours choisi sur la courbe donnée et, par suite, de la représentation paramétrique.*

Soient α_1, β_1, γ_1 les cosinus des angles que fait cette direction avec les axes $Oxyz$. En appliquant à l'indicatrice sphérique les formules générales $\alpha = \frac{x'}{s'}$, $\cdots$, nous avons

$$\alpha_1 = \frac{\alpha'}{\sigma'} = \frac{d\alpha}{d\sigma}, \qquad \beta_1 = \frac{\beta'}{\sigma'} = \frac{d\beta}{d\sigma}, \qquad \gamma_1 = \frac{\gamma'}{\sigma'} = \frac{d\gamma}{d\sigma},$$

d'où, en remplaçant $d\sigma$ par $\frac{ds}{R}$,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{R}.$$

Ces formules constituent *le premier groupe de formules de Frenet.*

Cherchons à évaluer α_1, β_1, γ_1 en fonctions de x, y, z et de leurs

dérivées. On a, en remplaçant α' et σ' par leurs valeurs,

$$\alpha_1 = \frac{x''s' - x's''}{s'^2\sigma'} = \frac{x''s' - x's''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\beta_1 = \frac{y''s' - y's''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \qquad \gamma_1 = \frac{z''s' - z's''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

392. *Enveloppe du plan normal à la courbe.* — Soit P le plan normal à la courbe au point M ; il a pour équation

(1) $$\alpha(X-x)+\beta(Y-y)+\gamma(Z-z)=0.$$

Quand M décrit la courbe, ce plan a une enveloppe. Sa caractéristique est définie par l'équation (1) jointe à l'équation dérivée

(2) $$\alpha'(X-x)+\beta'(Y-y)+\gamma'(Z-z)-(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')=0.$$

Or, de $\alpha = \frac{x'}{s'}$, $\cdots$ on déduit

$$\alpha x'+\beta y'+\gamma z' = \frac{x'^2+y'^2+z'^2}{s'} = s'.$$

L'équation (2) s'écrit donc

$$\alpha'(X-x)+\beta'(Y-y)+\gamma'(Z-z)-s'=0,$$

c'est-à-dire, comme $\frac{\alpha'}{s'} = \frac{\alpha_1}{R}$, $\cdots$,

(Q) $$\alpha_1(X-x)+\beta_1(Y-y)+\gamma_1(Z-z)-R=0.$$

Le plan Q, que représente cette équation, est, comme on voit, perpendiculaire à la normale principale. Soient X, Y, Z les coordonnées du point où il la coupe. Posons

$$X = x+\alpha_1\rho, \qquad Y = y+\beta_1\rho, \qquad Z = z+\gamma_1\rho.$$

En portant ces valeurs dans l'équation de Q, on trouve

$$\rho = R.$$

Le plan Q est donc le plan perpendiculaire à la normale principale mené par le point C situé, sur la partie positive de cette droite, à la distance R du point M (*fig.* 31).

La caractéristique D *du plan normal,* qui est l'intersection des plans P et Q, *est* donc *la droite menée par* C *perpendiculairement au plan osculateur*. D est dite la *droite polaire* et C le *centre de courbure*.

Le lieu de D est la *surface polaire*.

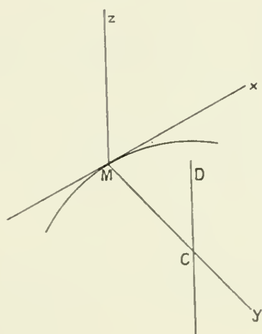
On peut calculer les coordonnées de C; en nous servant de $X = x + \alpha_1 R$, il vient

$$X = x + \frac{s'^3}{A^2 + B^2 + C^2}(x''s' - x's'') = x + \frac{s'^2(x''s'^2 - x's's'')}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

On reconnaît, en ayant égard aux valeurs de s'^2 et $s's''$ (n° 390), que *ces coordonnées s'expriment rationnellement en fonction des dérivées premières et secondes de x, y, z.*

393. Étudions la position de la courbe par rapport aux éléments qui ont été définis. Transportons l'origine au point M; prenons pour axe des X la demi-tangente positive en M, pour axe des Y la normale principale (*fig.* 31). x, y, z s'expriment en fonctions linéaires

Fig. 31.



de X, Y, Z, x', y', z' en fonctions linéaires de X', Y', Z', et x'', y'', z'' en fonctions linéaires de X'', Y'', Z''.

On doit avoir, dans le nouveau système,

$$\alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0,$$

d'où

$$(X')_M > 0, \qquad (Y')_M = (Z')_M = 0, \qquad A = (Y'Z'' - Z'Y'')_M = 0.$$

Pour que le plan XMY soit le plan osculateur, il faut de plus que l'on ait

$$B = (Z'X'' - X'Z'')_M = 0, \qquad C = (X'Y'' - Y'X'')_M \neq 0,$$

ce qui entraîne, d'après les conditions précédentes,

$$(Z'')_M = 0, \qquad (Y'')_M \neq 0.$$

Dans ces conditions, on a, la normale principale étant MY.

$\alpha_1 = \gamma_1 = 0$, d'où

$$\beta_1 = \pm 1.$$

D'ailleurs on a (nº 391), comme A et B sont nuls,

$$\beta_1 = \frac{Y''s' - Y's''}{|C|} = \frac{Y''s'}{|C|}.$$

s' étant positif, β_1 a le signe de Y''. Si l'on prend pour axe MY la normale principale dirigée dans le sens positif, on doit donc avoir $(Y'')_M > 0$.

Cela étant, étudions la position de la courbe par rapport au plan ZMX, mené par la tangente perpendiculairement au plan osculateur. Au point M, on a $Y = Y' = 0$, $Y'' > 0$; donc Y a constamment le signe + au voisinage de M. Donc *la courbe, au voisinage de* M, *est, par rapport au plan* ZMX, *tout entière du côté du centre de courbure.*

Examinons maintenant sa position par rapport au plan osculateur XMY. $(Z')_M$ et $(Z'')_M$ sont nuls; Z''' est différent de 0 en M en général. Donc, au point M, Z change de signe en s'annulant: cela montre qu'en général *le plan osculateur traverse la courbe.*

Imaginons un observateur dirigé suivant la droite polaire D et regardant le point M. Il voit la courbe au voisinage de M aller de gauche à droite en montant, ou de droite à gauche en montant, le fait étant indépendant de la direction de l'observateur sur cette droite polaire. Il y a ainsi pour une courbe deux dispositions différentes qui sont dites dispositions *dextrorsum* et *sinistrorsum*.

394. *Torsion.* — De même que nous avons étudié l'angle de deux tangentes infiniment voisines, nous allons étudier l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins, ou, ce qui revient au même, l'angle de deux binormales infiniment voisines.

Choisissons comme sens positif sur la binormale la direction telle que le trièdre formé par les directions positives de la tangente, de la normale principale et de la binormale soit direct, c'est-à-dire de même sens que le trièdre des coordonnées. On sait que dans ces conditions, si l'on appelle α_2, β_2, γ_2 les cosinus directeurs de la direction positive sur la binormale, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 1$$

et

$$\alpha_2 = \beta\gamma_1 - \gamma\beta_1,$$

d'où

$$\alpha_2 = \frac{y'(z''s' - z's'') - z'(y''s' - y's'')}{s'^3\sigma} = \frac{A}{s'^2\sigma'};$$

de même, on a

$$\beta_2 = \frac{B}{s'^2\sigma'}, \qquad \gamma_2 = \frac{C}{s'^2\sigma'}.$$

Quand M parcourt la courbe donnée, le point ν de coordonnées α_2, β_2, γ_2 décrit une certaine courbe sur la sphère de centre O et de rayon 1. On reconnaît, comme précédemment (n° 390), que l'élément de l'arc de cette courbe est un infiniment petit équivalent à l'angle de deux plans osculateurs infiniment voisins.

De plus, *la tangente au lieu décrit par* ν *est parallèle à la normale principale en* M. Il suffit, pour le montrer, de prouver que cette direction, dont les paramètres directeurs sont proportionnels à $d\alpha_2$, $d\beta_2$, $d\gamma_2$, est perpendiculaire à la fois à la tangente MT et à la binormale en M, c'est-à-dire que l'on a

$$\Sigma\alpha\, d\alpha_2 = 0, \qquad \Sigma\alpha_2\, d\alpha_2 = 0.$$

La seconde relation est une conséquence immédiate de

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1.$$

Pour démontrer la première, partons de la relation $\Sigma\alpha\alpha_2 = 0$; nous en déduisons par différentiation

$$\Sigma\,\alpha\, d\alpha_2 + \Sigma\,\alpha_2\, d\alpha = 0.$$

Remplaçons, dans $\Sigma\alpha_2\, d\alpha$, $d\alpha$ par $\frac{\alpha_1\, ds}{R}$, il vient

$$\Sigma\alpha_2\, d\alpha = \frac{ds}{R}\Sigma\alpha_1\alpha_2 = 0,$$

d'où

$$\Sigma\alpha\, d\alpha_2 = 0.$$

Cela étant, nous prendrons comme sens positif de parcours sur la courbe décrite par ν le sens correspondant à la direction positive de la normale principale. τ étant l'arc de cette courbe compté à partir d'une origine quelconque, on a, d'après cette définition,

$$\alpha_1 = \frac{\alpha_2'}{\tau'} = \frac{d\alpha_2}{d\tau}, \qquad \beta_1 = \frac{d\beta_2}{d\tau}, \qquad \gamma_1 = \frac{d\gamma_2}{d\tau}.$$

On appelle *torsion algébrique* le rapport algébrique $\frac{d\tau}{ds}$ ou $\frac{\tau'}{s'}$, et *rayon de torsion* T l'inverse de cette quantité.

Cherchons à évaluer T en fonction de x, y, z et de leurs dérivées. Tout revient à calculer τ'. Écrivons

$$\tau' = \frac{\alpha_2'}{\alpha_1} = \frac{\beta_2'}{\beta_1} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1} = \frac{\Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2'}{\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2} = \Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2'.$$

De la relation $\Sigma\alpha_1\,\alpha_2 = 0$ on déduit

$$\Sigma\,\alpha_1'\,\alpha_2 + \Sigma\,\alpha_1\,\alpha_2' = 0,$$

d'où

$$\tau' = -\,\Sigma\,\alpha_1'\,\alpha_2,$$

et, en remplaçant α_2, β_2, γ_2 par leurs valeurs,

$$\tau' = \frac{-1}{s'^2\,\sigma'}\,\Sigma\,A\,\alpha_1',$$

et par suite

$$\frac{1}{T} = \frac{-1}{s'^3\,\sigma'}\,\Sigma\,A\,\alpha_1'.$$

Pour avoir α_1', écrivons

$$\alpha_1 = \alpha'\,\frac{1}{\sigma'},$$

d'où

$$\alpha_1' = \alpha''\,\frac{1}{\sigma'} + \alpha'\left(\frac{1}{\sigma'}\right)'.$$

Calculons α''. On a

$$\alpha' = x''\,\frac{1}{s'} + x'\left(\frac{1}{s'}\right)',$$

$$\alpha'' = x'''\,\frac{1}{s'} + \ldots,$$

les termes qui suivent le premier contenant en facteur soit x', soit x''. Rappelons que nous avons

$$\Sigma\,A\,x' = 0, \qquad \Sigma\,A\,x'' = 0,$$

et, par suite,

$$\Sigma\,A\,\alpha = 0, \qquad \Sigma\,A\,\alpha' = 0.$$

On peut donc écrire

$$\Sigma\,A\,\alpha_1' = \frac{1}{\sigma'}\,\Sigma\,A\,\alpha'' = \frac{1}{s'\,\sigma'}\,\Sigma\,A\,x''',$$

par suite

$$\frac{1}{T} = \frac{-1}{s'^4\,\sigma'^2}\,\Sigma\,A\,x''' = \frac{-\,\Sigma\,A\,x'''}{A^2+B^2+C^2}.$$

D'ailleurs $\Sigma A x'''$ est égal au déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

et l'on a finalement

$$T = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{\Delta}.$$

On voit que T *est un nombre algébrique qui a le signe opposé à celui de* Δ.

Portons l'origine au point M considéré et prenons pour axes les axes MX, MY, MZ définis précédemment. Nous avons vu (n° 393) que l'on avait pour l'origine

$$Y' = Z' = Z'' = 0,$$

d'où résulte, pour la valeur de Δ en ce point,

$$\Delta = X'Y''Z'''.$$

D'ailleurs X' et Y'' sont positifs, T a donc le signe contraire à celui de Z'''. Si $T < 0$, on a $Z''' > 0$. Z'' croît au voisinage de M, donc il est d'abord négatif, puis positif. Z' est constamment positif, donc Z est d'abord négatif, puis positif.

Dans le cas de $T > 0$, les conclusions sont renversées.

On voit que *la position dextrorsum ou sinistrorsum dépend du signe de* T.

395. *Formules de Frenet.* — Les formules de Frenet donnent les dérivées des neuf cosinus directeurs du trièdre MXYZ attaché à chaque point de la courbe. Nous avons déjà obtenu les formules suivantes :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{R},$$

$$\frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{T}, \qquad \frac{d\beta_2}{ds} = \frac{\beta_1}{T}, \qquad \frac{d\gamma_2}{ds} = \frac{\gamma_1}{T},$$

le second groupe résultant de la définition de T (n° 394). La relation

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

différentiée, donne

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{ds} + \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha \frac{\alpha_1}{R} + \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{ds} + \alpha_2 \frac{\alpha_1}{T} = 0,$$

d'où nous tirons

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}.$$

Nous aurons de même

$$\frac{d\beta_1}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta_2}{T}, \qquad \frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma_2}{T}.$$

C'est le troisième groupe de formules de Frenet.

396. *Courbes planes.* — Considérons le cas particulier des courbes planes; tous les résultats généraux que nous avons démontrés s'appliquent. Il suffit de faire, par exemple, $Z = 0$ dans les formules obtenues; il en résulte $A = 0$, $B = 0$; C conserve la même valeur $x'y'' - y'x''$. L'expression du rayon de courbure devient

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}.$$

Étant donnée une courbe plane, si l'on cherche l'enveloppe de la normale à cette courbe, le point de contact de cette normale avec son enveloppe est le *centre de courbure,* car (n° 392), deux plans normaux quelconques se coupant suivant une perpendiculaire au plan de la courbe, la droite polaire est ici la perpendiculaire au plan de la courbe menée par le centre de courbure.

Pour une courbe plane, la torsion est nulle en tout point.

397. *Cas singuliers.* — Étant donnée une courbe définie par les coordonnées x, y, z d'un de ses points en fonction d'un paramètre t, la tangente en un point est déterminée tant que les dérivées x', y', z' ne sont pas toutes trois nulles pour ce point. Si l'on a $x' = y' = z' = 0$, les équations de la tangente se présentent sous forme indéterminée. Cependant, il se peut qu'il y ait en ce point une tangente déterminée. Il faudra, dans chaque cas, faire une étude particulière de la courbe en ce point.

De même, si A, B, C ne sont pas tous trois nuls en un point, le plan osculateur est déterminé. Si l'on a $A = B = C = 0$, il faut faire une étude particulière, en revenant à la définition du plan osculateur, pour voir s'il y a ou non un plan osculateur déterminé. De plus, en un tel point, *le rayon de courbure* R *est infini.* Si l'on prend x comme variable indépendante, on a $x' = 1$, $x'' = 0$, d'où

$$A = y'z'' - z'y'', \qquad B = -z'', \qquad C = y''.$$

Pour qu'on ait $A = B = C = 0$, il faut $y'' = z'' = 0$. Cela indique que les projections de la courbe sur le plan des xy ou des xz présentent au point considéré une inflexion.

En tout point d'une droite, le rayon de courbure R est infini.

Cherchons si l'on peut avoir en un point d'une courbe $R = 0$. En supposant que les dérivées premières et secondes restent finies, il faut que l'on ait $x' = y' = z' = 0$. Mais alors R se présente sous forme indéterminée, il y a lieu à discussion. Prenons, par exemple, la courbe plane définie par les équations

$$x = t^2, \qquad y = t^3;$$

on constate que R, pour $t = 0$, est de l'ordre de grandeur de t, donc s'annule avec t. L'origine est pour cette courbe un point de rebroussement à rayon de courbure nul.

Cherchons si en un point d'une courbe T peut être infini, c'est-à-dire si la torsion peut être nulle. En général, il y a un nombre fini de points de la courbe jouissant de cette propriété : ce sont les points pour lesquels on a $\Delta = 0$. On les appelle *points stationnaires*. Avec les axes particuliers MXYZ déjà choisis, nous avons vu que l'on a $\Delta = X'Y''Z'''$, de sorte que $\Delta = 0$ entraîne $Z''' = 0$. En un tel point, si l'on suppose en outre $Z^{(4)} \neq 0$, le plan osculateur ne traverse pas la courbe, car on reconnaît que Z garde un signe constant au voisinage de M.

398. *Une courbe dont la torsion est nulle en tout point est une courbe plane.* — En effet, les formules $\dfrac{d\alpha_2}{ds} = \dfrac{\alpha_1}{T}$, $\cdots$ montrent que pour une telle courbe α_2, β_2, γ_2 sont constants. Le plan osculateur a donc une direction fixe et les tangentes à la courbe, qui restent parallèles à cette direction de plan, sont, par suite, perpendiculaires à une direction de droite fixe. En prenant l'axe des Z parallèle à cette dernière direction, on aura, en tout point, $\gamma = 0$, d'où $Z' = 0$, $Z = \text{const.}$ La courbe est donc dans un plan.

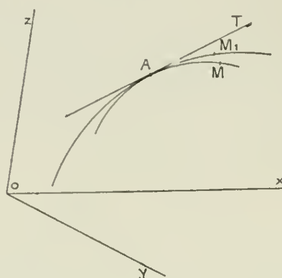
III. — Contact des courbes et surfaces.

399. Considérons deux courbes C et C_1 tangentes en un point A. Choisissons des axes de coordonnées tels que la tangente commune en A ne soit pas parallèle au plan des yz (*fig.* 32).

Dans ces conditions, pour chaque courbe, x, au voisinage de A,

varie dans un sens déterminé. On peut donc, pour chaque courbe, prendre x comme variable indépendante, c'est-à-dire supposer les

Fig. 32.



deux courbes définies par des équations de la forme

$$C \begin{cases} y = f(x), \\ z = \varphi(x), \end{cases} \qquad C_1 \begin{cases} y = F(x), \\ z = \Phi(x). \end{cases}$$

Soit x_0 l'abscisse de A. Pour que les deux courbes soient tangentes en ce point, il faut et il suffit que l'on ait

$$f'(x_0) = F'(x_0), \qquad \varphi'(x_0) = \Phi'(x_0).$$

Supposons d'une manière générale que l'on ait avec ces relations

$$(1) \qquad \begin{cases} f''(x_0) \;= F''(x_0), & \varphi''(x_0) \;= \Phi''(x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x_0) = F^{(n)}(x_0), & \varphi^{(n)}(x_0) = \Phi^{(n)}(x_0), \end{cases}$$

et que l'on n'ait pas simultanément

$$f^{(n+1)}(x_0) = F^{(n+1)}(x_0), \qquad \varphi^{(n+1)}(x_0) = \Phi^{(n+1)}(x_0).$$

Coupons les deux courbes C, C_1 par un plan parallèle au plan des yz et d'abscisse $x = x_0 + h$. On obtient ainsi sur C un point $M(x, y, z)$, sur C_1 un point $M_1(x, y_1, z_1)$; étudions les différences $y_1 - y$, $z_1 - z$. On a

$$y_1 - y = F(x_0 + h) - f(x_0 + h).$$

Les fonctions F et f sont développables par la formule de Taylor arrêtée au $n+1^{\text{ième}}$ terme; en les remplaçant par leurs développements, on a

$$y_1 - y = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}[F^{(n+1)}(x_0 + \theta h) - f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h)],$$

et de même

$$z_1 - z = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\left[\Phi^{(n+1)}(x_0 + \theta_1 h) - \varphi^{(n+1)}(x_0 + \theta'_1 h)\right].$$

Par hypothèse, quand h tend vers o, les différences entre crochets ne tendent pas toutes deux vers o. L'une au moins des deux quantités $y_1 - y$, $z_1 - z$ est donc infiniment petite d'ordre $n+1$ seulement par rapport à h, l'autre pouvant être d'ordre supérieur ou égal à $n+1$. La distance MM_1 est par suite, de toute façon, infiniment petite d'ordre $n+1$ par rapport à h. D'ailleurs, la distance AM est un infiniment petit de l'ordre de h, de sorte que MM_1 est, par rapport à AM, un infiniment petit d'ordre $n+1$.

Je dis que ce résultat est indépendant des axes de coordonnées choisis, pourvu que la tangente en A reste non parallèle au plan yz. En effet, effectuons un changement de coordonnées en passant du système x, y, z à un autre système X, Y, Z. On sait que y'_x, z'_x sont fonctions des nouvelles dérivées Y'_X, Z'_X, que y''_{x^2}, z''_{x^2} sont fonctions de Y'_X, Z'_X, Y''_{X^2}, Z''_{X^2}, etc., de sorte que, si pour les deux courbes C et C_1 les dérivées de y et z par rapport à x sont identiques jusqu'à l'ordre p, il en est de même des dérivées de Y, Z par rapport à X : en d'autres termes, les relations (1) se transforment en des relations de même forme. La propriété géométrique à laquelle on parvient, à savoir : que la distance MM_1 est un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la distance AM, est donc indépendante du choix des axes de coordonnées ; cela revient à dire que l'on peut, pour obtenir les points M et M_1, couper les deux courbes C et C_1 par un plan P parallèle à une direction de plan arbitraire mais fixe. Lorsque le plan P variera en se rapprochant du point A, la distance MM_1 sera un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à la distance AM.

Par définition, on dit qu'*il y a au point A un contact d'ordre n entre les deux courbes*.

400. Nous allons chercher à exprimer les conditions d'un contact d'ordre n entre deux courbes dont l'une C est définie par les équations

$$F(x, y, z) = 0, \qquad \Phi(x, y, z) = 0,$$

et dont l'autre C_1 est définie en fonction d'un paramètre t.

Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point commun aux deux courbes, la tangente à chacune d'elles en ce point n'étant pas parallèle au plan des yz. Soient $M(x, y, z)$ un point de C, $M_1(x, y_1, z_1)$ un point

de C_1, M et M_1 étant tous deux voisins de M_0 et correspondant à la même abscisse. Posons $y_1 - y = u$, $z_1 - z = v$. Il faut, pour qu'il y ait un contact d'ordre n, que u et v soient infiniment petits d'ordre $n+1$ par rapport à $x - x_0$. Remplaçons, dans les fonctions F et Φ, x, y, z par les coordonnées x, y_1, z_1 du point M_1 exprimées en fonction de t. On a

$$\begin{aligned} F(x, y_1, z_1) &= F(x, y+u, z+v) \\ &= F(x, y, z) + u\frac{\partial F}{\partial y}(x, y+\theta u, z+\theta v) \\ &\quad + v\frac{\partial F}{\partial z}(x, y+\theta u, z+\theta v). \end{aligned}$$

Comme $F(x, y, z) = 0$, on peut écrire

$$(1) \qquad F(x, y_1, z_1) = Au + Bv,$$

A et B ayant pour limites, quand le point M varie et tend vers le point commun (x_0, y_0, z_0), les nombres $\frac{\partial F}{\partial y_0}$, $\frac{\partial F}{\partial z_0}$.

De même, on a

$$(2) \qquad \Phi(x, y_1, z_1) = Cu + Dv,$$

C et D ayant pour limites, dans les mêmes conditions, les nombres $\frac{\partial \Phi}{\partial y_0}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z_0}$.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_0} & \frac{\partial F}{\partial z_0} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial z_0} \end{vmatrix}$$

de ces quantités est différent de 0, du fait que la tangente en A à C est supposée non parallèle au plan des yz. On peut donc résoudre, au voisinage de M_0, les équations (1) et (2) par rapport à u, v, et obtenir pour u, v des expressions linéaires en $F(x, y_1, z_1)$, $\Phi(x, y_1, z_1)$.

Pour que u et v soient tous deux infiniment petits d'ordre $n+1$ par rapport à $x - x_0$, il faut et il suffit que $F(x, y_1, z_1)$ et $\Phi(x, y_1, z_1)$ le soient, ou, ce qui revient au même, que $F(x, y_1, z_1)$ et $\Phi(x, y_1, z_1)$ soient infiniment petits d'ordre $n+1$ en $t - t_0$, t_0 étant la valeur du paramètre pour le point M_0. On peut donc énoncer la règle pratique suivante :

On remplace, dans F *et* Φ, x, y, z *par leurs valeurs en fonction de* t, *et l'on exprime que les fonctions de* t *ainsi obtenues,* $G(t)$

et $G_1(t)$, *sont toutes deux infiniment petites d'ordre* $n+1$ *par rapport à* $t-t_0$.

On voit que dans ce résultat il ne reste pas trace de l'hypothèse faite sur la direction de la tangente, de sorte que la règle est valable sans cette restriction.

Pour exprimer que $G(t)$ et $G_1(t)$ sont des infiniment petits d'ordre $n+1$ par rapport à $t-t_0$, il suffit d'exprimer que chacune de ces fonctions s'annule, ainsi que ses n premières dérivées, pour $t=t_0$; on a ainsi $2n+2$ conditions.

401. *Cas des courbes planes.* — Tous ces résultats s'appliquent en particulier au cas des courbes planes. Pour exprimer par exemple qu'il y a un contact d'ordre n entre une courbe C ayant pour équation

$$F(x, y)=0$$

et une courbe C_1 définie en fonction d'un paramètre t, on devra écrire que $F(x, y)$, où l'on remplace x, y par les fonctions de t qui définissent C_1, est un infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à $t-t_0$. On aura ici $n+1$ conditions.

402. *Courbes osculatrices.* — Considérons une courbe déterminée C et un point A de cette courbe. Soit, d'autre part, une famille de courbes dépendant d'un certain nombre de paramètres. On peut chercher à disposer de ces paramètres de façon à obtenir une courbe de la famille ayant en A, avec la courbe C, un contact d'un certain ordre.

On appelle *courbe osculatrice en un point* A de C une courbe de la famille considérée ayant en A avec C un contact d'ordre maximum par rapport aux autres courbes de la famille.

403. Considérons par exemple la famille formée de toutes les droites de l'espace. Une droite dépend de quatre paramètres. Un contact d'ordre n exigeant $2n+2$ conditions, nous pouvons donc avoir $n=1$.

Prenons les équations de la droite sous la forme

$$x-az-p=0, \qquad y-bz-q=0,$$

et remplaçons dans ces équations x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe donnée. Les équations obtenues doivent être

vérifiées, ainsi que celles qu'on obtient en les dérivant par rapport à t, savoir :

$$x' - a z' = 0, \qquad y' - b z' = 0.$$

On déduit de là

$$a = \frac{x'}{z'}, \qquad b = \frac{y'}{z'}.$$

Cela montre que a, b, 1 sont les coefficients de la tangente à la courbe au point considéré. D'ailleurs, les deux premières relations, qui déterminent p et q, montrent que la droite passe par ce point. C'est donc la tangente en ce point, de sorte que, parmi les droites de l'espace, celle qui a le contact maximum avec une courbe quelconque en un point donné est la tangente à la courbe en ce point.

104. Un cercle dans l'espace est une courbe dépendant de six paramètres. On peut en disposer de façon à obtenir un cercle qui ait, en un point donné, avec une courbe donnée, un contact du second ordre. Écrivons les équations d'un cercle sous la forme

$$(1) \qquad A(x-a) + B(y-b) + C(z-c) = 0,$$
$$(2) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - \rho^2 = 0,$$

en mettant ainsi en évidence son centre (a, b, c), son rayon ρ et les coefficients A, B, C de son plan.

Une courbe étant donnée par les coordonnées d'un de ses points en fonction d'un paramètre t, remplaçons x, y, z par ces fonctions de t dans les équations (1) et (2), puis annulons les dérivées premières et secondes des premiers membres de (1) et (2). On a les quatre nouvelles équations

$$(3) \qquad A x' + B y' + C z' = 0,$$
$$(4) \qquad A x'' + B y'' + C z'' = 0,$$
$$(5) \qquad (x-a)x' + (y-b)y' + (z-c)z' = 0,$$
$$(6) \qquad (x-a)x'' + (y-b)y'' + (z-c)z'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

Ces quatre équations, jointes aux deux premières, permettent de déterminer a, b, c, ρ, A, B, C. Les équations (3) et (4) montrent que A, B, C sont les coefficients du plan osculateur à la courbe au point considéré, de sorte que le plan du cercle cherché est le plan osculateur à la courbe.

Dans les équations (5) et (6), considérons a, b, c comme les coordonnées courantes. (5) représente alors le plan normal à la

courbe au point considéré, et l'équation (6) est celle qu'on obtient en dérivant (5) par rapport à t. L'ensemble de ces deux équations représente donc la caractéristique du plan normal quand le point (x, y, z) varie sur la courbe donnée, c'est-à-dire la droite polaire.

De plus, l'équation (1) exprime que (a, b, c) est dans le plan osculateur. Le point (a, b, c) est donc à l'intersection de la droite polaire avec le plan osculateur, c'est-à-dire au centre de courbure.

Enfin, l'équation (2) montre que ρ, le rayon du cercle, est égal à la distance du point (x, y, z) de la courbe au centre de courbure (a, b, c).

En résumé, le cercle osculateur est le cercle qui a pour centre le centre de courbure et pour rayon le rayon de courbure. On l'appelle aussi *cercle de courbure*, parce qu'il a au point (x, y, z) même courbure que la courbe donnée.

405. *Contact d'une courbe et d'une surface.* — Étant données une courbe C et une surface S tangentes en un point A, on dit qu'il y a en A, pour C et S, un contact d'ordre n, s'il existe sur S une courbe Γ passant par A et ayant avec C en ce point un contact d'ordre n. Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de S. Γ sera définie par l'intersection de S avec une certaine surface. Une première condition est donc que F, si l'on y remplace x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe C, soit infiniment petit d'ordre $n+1$ par rapport à $t - t_0$, t_0 étant le paramètre correspondant au point A.

Je dis que cette condition est suffisante. En effet, supposons-la remplie et prenons des axes tels que la tangente à C en A ne soit pas parallèle au plan des yz (*fig.* 33). Nous savons que, dans ces conditions, nous pouvons prendre, pour définir la courbe C, x comme variable indépendante. Soit

$$y = f(x)$$

l'équation du cylindre projetant C parallèlement à Oz sur le plan des xy. Nous allons montrer que la courbe Γ, intersection de S avec ce cylindre, a avec C un contact d'ordre n en A.

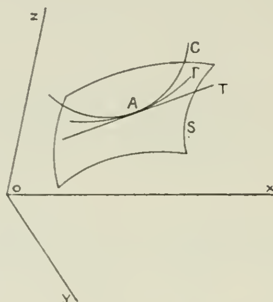
En effet, Γ a pour équations

$$F = 0, \qquad y - f(x) = 0.$$

Quand on remplace dans les premiers membres de ces deux équa-

tions x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe C, la fonction $y - f(x)$ est identiquement nulle, donc satisfait à toutes

Fig. 33.



les conditions imposées; par hypothèse, la fonction F satisfait aussi à ces conditions. Donc Γ a, avec C en A, un contact d'ordre n.

406. D'après cela, étant donnée une courbe C, si l'on considère une famille de surfaces dépendant de $n+1$ paramètres, on peut disposer de ces paramètres de manière à obtenir en un point M, entre la courbe et une surface, un contact d'ordre n. Parmi les surfaces d'une famille, on appelle *surface osculatrice* à une courbe donnée en M celle qui a en ce point, avec la courbe, le contact d'ordre maximum.

Cherchons, par exemple, le plan qui a le contact d'ordre maximum avec une courbe définie en fonction d'un paramètre. Comme un plan dépend de 3 paramètres, cet ordre sera égal à 2. Soit

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation du plan. Remplaçons dans cette équation x, y, z par les fonctions de t qui définissent la courbe. Nous devrons avoir, outre l'équation précédente,

$$Ax' + By' + Cz' = 0, \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

On trouve ainsi pour A, B, C les coefficients du plan que nous avons appelé *plan osculateur* dans l'étude des courbes gauches.

IV. — Développées et développantes.

407. *Développées des courbes planes.* — Considérons dans le plan des xy une courbe C. On appelle *développée* de cette courbe l'enveloppe de sa normale.

Si la courbe C est une droite, la normale reste parallèle à une direction fixe; elle n'a pas d'enveloppe.

Si C est un cercle, la normale passe pas un point fixe; on peut dire qu'elle a pour enveloppe ce point.

Réciproquement, si pour une courbe la normale a une direction fixe, la tangente a aussi une direction fixe; ses coefficients α, β sont constants. Si l'on prend des axes tels que $\beta = 0$, on en déduit $y =$ const.; donc la courbe est une droite.

Si la normale passe par un point fixe, prenons ce point pour origine et écrivons l'équation de la normale

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0.$$

Puisqu'elle passe par l'origine, c'est que l'on a

$$x\,dx + y\,dy = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x^2 + y^2 = \text{const.},$$

ce qui montre que la courbe est un cercle ayant pour centre l'origine.

Ces deux cas mis à part, la normale varie en direction sans passer par un point fixe; il existe sur cette droite un point limite qui est le centre de courbure (n° 396). Lorsque le pied de la normale prend toutes les positions sur la courbe C, ce point décrit une courbe qui est la *développée* de C.

408. Dans le cas d'une courbe plane, les formules de Frenet deviennent, en conservant les notations précédentes,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R},$$
$$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{R}, \qquad \frac{d\beta_1}{ds} = -\frac{\beta}{R}.$$

Soit φ l'angle de la demi-tangente dirigée dans le sens positif avec Ox; on a

$$\alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi.$$

Le centre de courbure (x_1, y_1) a pour coordonnées

$$(1) \qquad x_1 = x + \alpha_1 R, \qquad y_1 = y + \beta_1 R.$$

On a, en différentiant les formules (1),

$$dx_1 = dx + \alpha_1\,dR + R\,d\alpha_1,$$

c'est-à-dire

$$dx_1 = \alpha\, ds + \alpha_1\, dR - \alpha\, ds = \alpha_1\, dR,$$

de même

$$dy_1 = \beta_1\, dR.$$

Soit s_1 l'arc de la développée compté à partir d'une certaine origine; on a

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 = dR^2.$$

Il en résulte que si, pour un certain arc de la courbe donnée, le rayon de courbure varie toujours dans le même sens, la valeur absolue de l'accroissement de s_1 est égale à l'accroissement de R, de sorte que *la longueur de l'arc de développée correspondant est égale à la quantité dont a augmenté ou diminué le rayon de courbure.*

Il résulte aussi de là que si, pour une courbe, R est constant, ds_1 est nul, x_1, y_1 sont constants, le centre de courbure est fixe; c'est le cas du cercle. *Le cercle est donc la seule courbe plane à rayon de courbure constant.*

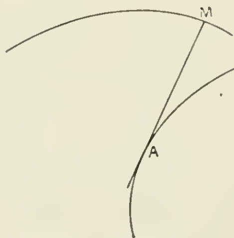
Les formules $dx_1 = \alpha_1\, dR$, ... montrent encore que, si pour une courbe plane quelconque R passe par un maximum, on a, pour le point (x_1, y_1) correspondant,

$$dx_1 = dy_1 = 0.$$

Cela indique en général, comme l'on sait, que (x_1, y_1) est pour la développée un point de rebroussement. C'est, en effet, ce que l'on trouve en construisant la développée d'une ellipse, d'une hyperbole ou d'une parabole.

409. *Développantes.* — Considérons une courbe et sa développée; la première est dite la *développante* de la seconde.

Fig. 34.



Étant donnée une courbe, cherchons si elle a une développante, c'est-à-dire une courbe qui admette comme normales les tangentes à

la première. D'après ce qui précède, l'accroissement de longueur de la normale (*fig.* 34) (en entendant par *longueur de la normale* la distance du point d'incidence M au point limite A) doit être égal à l'accroissement de l'arc de la courbe donnée.

Soient ξ, η les coordonnées du point A qui décrit la courbe donnée, σ l'arc de cette courbe compté à partir d'une certaine origine. Les cosinus directeurs de la direction positive de la tangente sont

$$\alpha = \frac{d\xi}{d\sigma}, \qquad \beta = \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Portons sur cette direction, à partir du point (ξ, η), un segment AM ayant pour valeur algébrique $l - \sigma$, l étant une constante arbitraire. Je dis que *le point* M (x, y) *ainsi obtenu décrit une courbe normale à la tangente en* A.

En effet, nous avons

$$x = \xi + \alpha(l - \sigma), \qquad y = \eta + \beta(l - \sigma),$$

d'où, en différentiant,

$$dx = d\xi - \alpha\, d\sigma + (l - \sigma)\, d\alpha = (l - \sigma)\, d\alpha,$$

de même

$$dy = (l - \sigma)\, d\beta.$$

Pour vérifier que le lieu de M est normal à AM, il suffit de vérifier

$$\alpha\, dx + \beta\, dy = 0.$$

Or, on a

$$\alpha\, dx + \beta\, dy = (l - \sigma)(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta) = 0.$$

On obtient ainsi comme lieu de M une développante de la courbe donnée; elle dépend d'un paramètre arbitraire l. *Une courbe a donc une infinité de développantes, deux quelconques d'entre elles étant des courbes parallèles.* On dit que la famille de développantes coupe à angle droit toutes les tangentes à la courbe donnée, ou encore que chaque développante est une *trajectoire orthogonale* de ces tangentes.

410. *Trajectoires orthogonales.* — D'une manière générale, étant donnée une famille de courbes dépendant d'un paramètre, on peut trouver une seconde famille de courbes telle que deux courbes quelconques, prises l'une dans la première famille, l'autre dans la seconde, soient orthogonales en l'un de leurs points d'intersection.

Soit

$$f(x, y, a) = 0$$

l'équation de la famille de courbes donnée. Formons l'équation différentielle de ces courbes, soit

$$F(x, y, y') = 0.$$

En un point commun à deux courbes des deux familles, les tangentes à ces deux courbes doivent être rectangulaires. Donc le coefficient angulaire de la tangente à la seconde est $-\frac{1}{y'}$. On en déduit que la seconde famille, si elle existe, a pour équation différentielle

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

En intégrant cette équation, on aura l'équation d'une famille de courbes orthogonales aux courbes données.

On peut rattacher à cette théorie certaines propriétés des fonctions harmoniques. On sait que, étant donnée une fonction $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$, elle se met sous la forme

$$f = P(x, y) + iQ(x, y),$$

P et Q étant des fonctions harmoniques; on a

$$(1) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

On déduit de là que les deux familles de courbes ayant pour équations

$$P(x, y) - a = 0,$$
$$Q(x, y) - b = 0,$$

a et b étant des paramètres arbitraires, sont orthogonales. En effet, soit (x, y) un point du plan; considérons les deux courbes qui passent par ce point. Les coefficients de la tangente à la première sont

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial y};$$

ceux de la tangente à la seconde sont

$$\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Ces deux droites sont rectangulaires, car on a, d'après (1),

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial Q}{\partial y}=0.$$

411. *Développées des courbes gauches.* — Étant donnée une courbe gauche C, cherchons s'il est possible de trouver une droite variable la rencontrant en un point M, normale à C en M, et en même temps tangente à une autre courbe, qui sera dite une *développée* de C.

Si cela a lieu, soient x, y, z les coordonnées (rectangulaires) de M; soit I le point de contact de la droite avec son enveloppe, soient a et b les valeurs algébriques des projections de MI sur la normale principale et la binormale; les coordonnées x_1, y_1, z_1 de I sont, d'après cela,

$$x_1 = x + a\alpha_1 + b\alpha_2, \qquad y_1 = y + a\beta_1 + b\beta_2, \qquad z_1 = z + a\gamma_1 + b\gamma_2.$$

Pour que MI satisfasse aux conditions du problème, il faut et il suffit que le déplacement du point x_1, y_1, z_1 ait lieu tangentiellement à MI. Or, les cosinus directeurs de MI sont proportionnels à $x_1 - x$, $y_1 - y$, $z_1 - z$. On doit donc avoir

$$\frac{dx_1}{x_1 - x} = \frac{dy_1}{y_1 - y} = \frac{dz_1}{z_1 - z}.$$

Soit λ la valeur commune de ces trois rapports. On en déduit trois relations telles que

$$dx_1 = \lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2).$$

D'ailleurs, on a

$$dx_1 = dx + a\,d\alpha_1 + b\,d\alpha_2 + \alpha_1\,da + \alpha_2\,db,$$

d'où la relation

$$dx + a\,d\alpha_1 + b\,d\alpha_2 + \alpha_1\,da + \alpha_2\,db - \lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2) = 0.$$

Remplaçons dx par $\alpha\,ds$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ par leurs valeurs tirées des formules de Frenet, il vient

$$\alpha\,ds + a\,ds\left(-\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha_2}{T}\right) + b\,ds\frac{\alpha_1}{T} + \alpha_1\,da + \alpha_2\,db - \lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2) = 0;$$

c'est une relation de la forme

$$A\alpha + B\alpha_1 + C\alpha_2 = 0.$$

On obtient de même les deux autres relations

$$A\beta + B\beta_1 + C\beta_2 = 0,$$
$$A\gamma + B\gamma_1 + C\gamma_2 = 0.$$

Nous avons ainsi trois équations linéaires et homogènes en A, B, C. Le déterminant formé avec les coefficients de ces quantités étant différent de zéro, il faut, pour que ces trois équations soient vérifiées, que l'on ait

$$A = B = C = 0.$$

et d'ailleurs ces conditions suffisent. Elles s'écrivent

$$1 - \frac{a}{R} = 0,$$

$$b\frac{ds}{T} - \lambda a + da = 0,$$

$$-a\frac{ds}{T} - \lambda b + db = 0.$$

La première relation montre que l'on a $a = R$, donc le point I est sur la droite polaire; la développée, si elle existe, est sur la surface polaire. Éliminons λ entre les deux autres relations, il vient

$$(b^2 + R^2)\frac{ds}{T} + b\,dR - R\,db = 0,$$

d'où

$$\frac{ds}{T} = \frac{R\,db - b\,dR}{b^2 + R^2}.$$

Soit φ l'angle de MI avec la normale principale, on a $\frac{b}{R} = \tang\varphi$, et il en résulte

$$\frac{R\,db - b\,dR}{b^2 + R^2} = d\varphi = \frac{ds}{T}.$$

Cette relation $\frac{ds}{T} = d\varphi$ détermine la différentielle de φ. On voit que le problème proposé est possible et comporte une infinité de solutions. En effet, l'angle φ est donné par la formule

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^s \frac{ds}{T};$$

il dépend donc d'une quantité arbitraire φ_0 qui est la valeur initiale de φ. Une fois cette valeur initiale fixée, φ et, par suite, le mouvement de MI sont déterminés.

Une courbe gauche a donc une infinité de développées. Deux

quelconques de ces développées sont telles que deux normales au même point M correspondant à ces deux développées se coupent sous un angle qui reste constant lorsque M varie. L'accroissement de φ est, en effet, le même pour toutes les développées.

412. Considérons l'arc de la développée : on a

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$

ou, en remplaçant dx_1 par $\lambda(a\alpha_1 + b\alpha_2)$, etc.,

$$ds_1^2 = \lambda^2 \sum (a\alpha_1 + b\alpha_2)^2 = \lambda^2(a^2 + b^2) = \lambda^2 \mathrm{MI}^2.$$

Or, nous avons les équations

$$b\frac{ds}{\mathrm{T}} + da - \lambda a = 0, \qquad -a\frac{ds}{\mathrm{T}} + db - \lambda b = 0;$$

on en déduit

$$a\,da + b\,db - \lambda(a^2 + b^2) = 0,$$

$$\lambda = \frac{a\,da + b\,db}{a^2 + b^2}.$$

Portons cette valeur de λ dans l'expression de ds_1^2, il vient

$$ds_1^2 = \frac{(a\,da + b\,db)^2}{a^2 + b^2}.$$

Or, on a

$$\frac{a\,da + b\,db}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d(\sqrt{a^2 + b^2}) = d(\mathrm{MI}),$$

d'où, finalement,

$$ds_1^2 = [d(\mathrm{MI})]^2.$$

Cela montre que, si pour un certain arc l'accroissement de MI est toujours de même sens, s_1 croît de la quantité dont augmente ou diminue MI. C'est un résulat analogue à celui que nous avons obtenu pour les courbes planes.

413. *Développantes.* — Cherchons à porter, sur la tangente en M à une courbe gauche, un segment de longueur variable l, dont l'extrémité P décrive une courbe normale aux tangentes de la courbe donnée. Soient x, y, z les coordonnées du point M qui décrit la courbe donnée; les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point P sont

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad y_1 = y + l\beta, \qquad z_1 = z + l\gamma.$$

Pour que le lieu de ce point soit une courbe normale à la droite MP, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$\alpha\, dx_1 + \beta\, dy_1 + \gamma\, dz_1 = 0,$$

qui, en tenant compte de

$$dx_1 = dx + l\, d\alpha + \alpha\, dl, \qquad \ldots,$$

devient

$$ds + dl = 0,$$

d'où

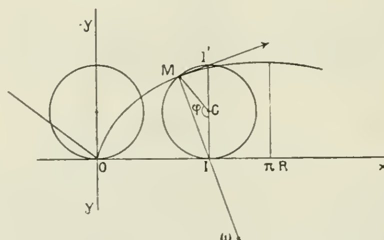
$$l = c - s,$$

c étant une constante et s étant l'arc de la courbe donnée compté à partir d'une origine quelconque.

V. — Étude de quelques courbes.

414. *Cycloïde.* — Si l'on fait rouler, sans glissement, un cercle sur une droite, la courbe décrite par un point quelconque du cercle s'appelle *cycloïde;* la droite est dite la *base*. Prenons deux axes rectangulaires Ox, Oy, Ox étant la base. Considérons le cercle partant de la position pour laquelle le point de contact avec la base est O (*fig.* 35). Figurons une seconde position du cercle; soient I le

Fig. 35.



nouveau point de contact, M la position occupée par le point qui était en O dans la première position. Le cercle roulant sans glisser, on a

$$\text{arc MI} = \text{OI}.$$

Prenons comme paramètre l'angle φ dont a tourné le rayon CM, c'est-à-dire l'angle ICM. Les coordonnées de C sont

$$x = R\varphi, \qquad y = R.$$

En menant par O la parallèle à CM, on voit que

$$(Oy', CM) = -\varphi,$$

d'où

$$(Ox, CM) = (Ox, Oy') + (Oy', CM) = -\frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Les coordonnées de M sont donc

$$x = R\varphi + R\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R(\varphi - \sin\varphi),$$
$$y = R \;\; + R\sin\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = R(1 - \cos\varphi).$$

Quand φ augmente de 2π, y reprend la même valeur et x augmente de $2\pi R$. Il suffit de construire la partie de la courbe correspondant à l'intervalle $(0, 2\pi)$; la courbe tout entière se compose d'une infinité de portions semblables, se déduisant l'une de l'autre par une translation parallèle à la base et égale à $2\pi R$. Calculons les dérivées premières et secondes de x, y :

$$x' = R(1 - \cos\varphi), \qquad y' = R\sin\varphi,$$
$$x'' = R\sin\varphi, \qquad y'' = R\cos\varphi.$$

On voit que la courbe part de O tangentiellement à Oy, car pour $\varphi = 0$ le coefficient angulaire de la tangente $\frac{y'}{x'}$, qui est égal à $\cot\frac{\varphi}{2}$, est infini.

Pour $\varphi = \pi$, la tangente est parallèle à Ox, y passe par un maximum égal à $2R$. La droite $x = \pi R$, qui passe par ce point, est un axe de symétrie pour la branche de courbe que nous construisons, car, si l'on donne à φ deux valeurs équidistantes de π, y prend la même valeur, x prend deux valeurs équidistantes de πR.

Calculons la longueur de l'arc; on a

$$s'^2 = 4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

d'où, comme $\sin\frac{\varphi}{2}$ est positif,

$$s' = 2R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

La longueur de la branche étudiée est

$$s = \int_0^{2\pi} 2R\sin\frac{\varphi}{2} = 4R\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)_0^{2\pi} = 8R.$$

Cherchons quelle est la normale au point M.

La tangente a pour coefficient angulaire $\cot\frac{\varphi}{2}$. Elle fait donc avec Ox un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}$: c'est la droite MI', I' étant le point du cercle diamétralement opposé à I. Il en résulte que MI est la normale. Calculons le rayon de courbure ρ. On a, d'après la formule générale,

$$\rho = \frac{s'^3}{|x'y'' - y'x''|} = \left| \frac{8R^3 \sin^3\frac{\varphi}{2}}{R^2(1-\cos\varphi)} \right| = 4R\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|.$$

Comme on a $MI = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$, on en déduit

$$\rho = 2MI.$$

Le centre de courbure ω est donc symétrique de M par rapport à I; ses coordonnées sont

$$x_1 = R(\varphi + \sin\varphi), \qquad y_1 = -R(1 - \cos\varphi).$$

Posons

$$\varphi_1 = \varphi + \pi, \qquad x_1 + \pi R = X, \qquad y_1 + 2R = Y;$$

il vient

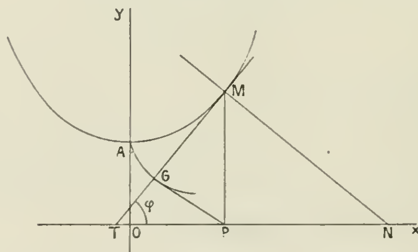
$$X = R(\varphi_1 - \sin\varphi_1), \qquad Y = R(1 - \cos\varphi_1),$$

Le lieu du point ω est donc une cycloïde égale à la première.

415. *Chaînette.* — C'est la courbe plane représentée en coordonnées rectangulaires par l'équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Fig 36.



a étant une constante positive. Cette courbe, qui présente une forme parabolique, est symétrique par rapport à Oy et rencontre cet axe en un point A, d'ordonnée a (*fig.* 36). Calculons les dérivées première

et seconde de y, x étant la variable indépendante; on a

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2}.$$

Soit M un point de la courbe; calculons le rayon de courbure en ce point. La formule générale devient

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Nous avons ici

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2\right) = \frac{y^2}{a^2},$$

d'où

$$R = \frac{\frac{y^3}{a^3}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

Considérons la tangente MT à la courbe en M; soit φ l'angle qu'elle fait avec Ox. φ est défini par sa tangente qui est égale à y'; on en déduit

$$\sin\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}, \qquad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{a}{y}.$$

Menons la normale MN à la courbe; on a, P étant la projection de M sur Ox,

$$\text{PM} = \text{MN}\cos\varphi,$$

d'où

$$\text{MN} = \frac{\text{PM}}{\cos\varphi} = \frac{y}{\frac{a}{y}} = \text{R}.$$

MN étant égal au rayon de courbure, le centre de courbure est le symétrique de N par rapport à M.

Évaluons l'arc AM; nous avons

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx = \frac{y}{a}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx,$$

d'où, en prenant A comme origine des arcs,

$$\text{arc AM} = \int_0^x \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Abaissons de P la perpendiculaire PG sur MT. Je dis que l'on a

$$\text{arc AM} = \text{GM}.$$

En effet, on a

$$\text{GM} = \text{PM} \sin\varphi = y \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Remarquons aussi que l'on a

$$\text{PG} = \text{PM} \cos\varphi = y \frac{a}{y} = a.$$

416. *Tractrice.* — Considérons maintenant le lieu du point G. Pour obtenir G, on porte sur la tangente en M à la chaînette un segment MG égal à la longueur de l'arc AM. Or, c'est là la construction générale d'une développante d'une courbe. Le lieu de G est donc une développante de la chaînette; on appelle cette courbe la *tractrice*. Elle part du point A, tangentiellement à Oy et est symétrique par rapport à cet axe; sa normale en G est GM, sa tangente est GP. Nous avons vu que ce segment GP a une longueur constante et égale à a. On dit que la tractrice est une *courbe à tangentes égales*, en entendant par tangentes les segments tels que GP.

Dans le triangle TMP on a

$$\text{GM}.\text{GT} = \overline{\text{GP}}^2 = a^2.$$

Or, pour la tractrice, M est le point de rencontre de la normale avec son enveloppe; GM est donc le rayon de courbure de la tractrice. En appelant normale le segment GT, c'est-à-dire la portion de normale comprise entre le point d'incidence et l'axe des x, nous pouvons dire que dans la tractrice le produit du rayon de courbure par la normale est constant.

Quand M s'éloigne indéfiniment, GT tend vers o, φ vers $\frac{\pi}{2}$, la courbe est asymptote à Ox.

417. *Hélices.* — Soit C_1 une courbe plane (*fig.* 37); prenons un système d'axes rectangulaires, le plan des xy étant le plan de C_1. Soit m un point de cette courbe C_1; sur la perpendiculaire en m au plan des xy, portons à partir de m un segment mM proportionnel à l'arc $O_1 m$, O_1 étant une certaine origine prise sur la courbe C_1. Le lieu C du point M, lorsque m décrit C_1, est une *hélice*.

Soient s_1 l'arc $O_1 m$, s l'arc $O_1 M$ de l'hélice ; on a, k étant constant,

$$mM = z = ks_1.$$

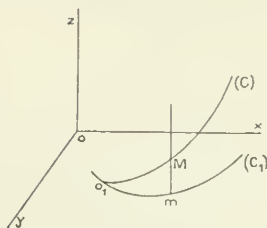
D'autre part, on a

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad dx^2 + dy^2 = ds_1^2,$$

d'où

$$ds^2 = (1 + k^2)\, ds_1^2.$$

Fig. 37.



Nous allons déduire de là différentes conséquences. Nous avons, avec les notations de la théorie générale,

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{k\, ds_1}{ds} = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}},$$

c'est-à-dire que γ est constant. *La tangente à l'hélice fait donc un angle constant avec la perpendiculaire au plan de la courbe* C_1.

Réciproquement, soit C une courbe telle que la tangente à cette courbe fasse un angle constant avec une direction fixe. Prenons Oz parallèle à cette direction ; γ est constant. Comme on a $dz = \gamma\, ds$, on en déduit

$$z = \gamma s,$$

en choisissant convenablement l'origine des arcs sur la courbe C. Cela étant, projetons orthogonalement la courbe sur le plan des xy, et soit s_1 l'arc de la projection, en prenant pour origine la projection de l'origine des arcs de C. On a

$$ds_1^2 = dx^2 + dy^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\, ds^2 = (1 - \gamma^2)\, ds^2$$

d'où, en intégrant,

$$s_1 = \sqrt{1 - \gamma^2}\, s.$$

En comparant avec $z = \gamma s$, on en déduit

$$z = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \gamma^2}}\, s_1.$$

La courbe C peut donc être obtenue par la construction précédente ; c'est donc une hélice.

418. *Dans l'hélice, la normale principale est parallèle au plan de la courbe* C_1, c'est-à-dire, avec les axes choisis, perpendiculaire à Oz. En effet, on a, avec les notations habituelles,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{R}.$$

Comme γ est constant, on en déduit

$$\gamma_1 = 0,$$

ce qui établit le fait. On peut encore le voir en considérant l'indicatrice sphérique. Le point (α, β, γ) décrit sur la sphère de rayon 1 un petit cercle dans un plan parallèle au plan Oxy. La tangente à ce cercle et, par suite, la normale principale sont constamment parallèles au plan xOy.

Soient R et R_1 les rayons de courbure de C et C_1.

Le rapport de R *à* R_1 *est constant.* On a, en effet,

$$R^2 = \frac{ds^2}{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}, \qquad R_1^2 = \frac{ds_1^2}{d\alpha^2 + d\beta^2},$$

et, comme $d\gamma$ est nul, on a

$$\frac{R}{R_1} = \left|\frac{ds}{ds_1}\right| = \sqrt{1 + k^2}.$$

419. Montrons enfin que *le rapport des rayons de courbure et de torsion d'une hélice est constant.* En effet, nous avons vu que γ est constant et que γ_1 est nul. Donc γ_2 est constant. La formule

$$\frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma_2}{T}$$

devient alors

$$\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma_2}{T} = 0,$$

d'où

$$\frac{R}{T} = \text{const.}$$

Réciproquement, *toute courbe pour laquelle* $\frac{R}{T}$ *est constant est une hélice.* En effet, on a, les axes de coordonnées étant supposés

rectangulaires,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \quad \ldots, \quad \frac{d\alpha_2}{ds} = \frac{\alpha_1}{T}, \quad \ldots,$$

d'où, en divisant membre à membre,

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha} = \frac{d\beta_2}{d\beta} = \frac{d\gamma_2}{d\gamma} = \frac{R}{T}.$$

Soit k la valeur constante du rapport $\frac{R}{T}$, k étant fini et différent de o. On tire de là

$$\alpha_2 = k\alpha + c, \quad \beta_2 = k\beta + c', \quad \gamma_2 = k\gamma + c'',$$

c, c', c'' étant des constantes. En multipliant ces relations par α, β, γ, et ajoutant, on a

$$\begin{gathered} 0 = k + c\alpha + c'\beta + c''\gamma, \\ c\alpha + c'\beta + c''\gamma = -k. \end{gathered}$$

Cette relation montre d'abord que c, c', c'' ne sont pas tous trois nuls, de sorte qu'il y a une direction dont les coefficients sont proportionnels à c, c', c'', et ensuite que cette direction fait avec la tangente de coefficients α, β, γ un angle constant.

La courbe est donc une hélice.

Si l'une des quantités R ou T est constante, l'autre l'est aussi; la courbe C_1, qui sert à définir l'hélice, est un cercle, car son rayon de courbure R_1 est constant; on a alors une *hélice circulaire tracée sur un cylindre de révolution. C'est la seule courbe pour laquelle la courbure et la torsion soient constantes* (tout en ayant des valeurs finies et différentes de o).

VI. — Équations intrinsèques des courbes.

420. *Courbes planes.* — Considérons une courbe plane rapportée à des axes rectangulaires, les coordonnées d'un point de cette courbe étant données en fonction d'un paramètre t. L'arc s de la courbe, compté à partir d'une certaine origine, et le rayon de courbure ρ sont deux fonctions de t. Si l'on élimine t entre ces deux expressions, on a une relation entre ρ et s, soit $\rho = \varphi(s)$.

Soit θ l'angle avec Ox de la direction positive de la tangente; on a

$$\alpha = \cos\theta, \quad \beta = \sin\theta.$$

La quantité $d\sigma^2$ définie dans la théorie générale est ici égale à $d\alpha^2 + d\beta^2$, c'est-à-dire à $d\theta^2$; donc

$$\rho = \left|\frac{ds}{d\theta}\right|.$$

Cela posé, étant donnée une relation $\rho = \varphi(s)$, cherchons une courbe dont le rayon de courbure et l'arc satisfassent à cette équation. Supposons d'abord que θ et s croissent en même temps; on aura

$$\rho = \frac{ds}{d\theta},$$

d'où

$$d\theta = \frac{ds}{\rho} = \frac{ds}{\varphi(s)},$$

d'où, en intégrant et désignant par θ_0 la valeur de θ qui correspond à l'origine des arcs,

$$\theta - \theta_0 = \int_0^s \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Soient x_0, y_0 les coordonnées du point origine des arcs; on aura, en intégrant les relations $dx = \alpha\, ds$, $dy = \beta\, ds$,

$$x - x_0 = \int_0^s \cos\theta\, ds, \qquad y - y_0 = \int_0^s \sin\theta\, ds.$$

On a ainsi les coordonnées d'un point de la courbe.

En partant de l'hypothèse où θ et s varient en sens inverse, on ferait les mêmes calculs en remplaçant φ par $-\varphi$. Dans les deux cas, on trouve une courbe dont la forme est bien déterminée. En effet, les constantes arbitraires dont dépend cette courbe sont θ_0, x_0, y_0. A différentes valeurs de θ_0 correspondent différentes courbes qui peuvent s'obtenir par le déplacement de l'une d'elles dans le plan : de deux courbes correspondant aux valeurs θ_0, θ'_0, par exemple, la seconde ne diffère de la première que par ce fait qu'elle a tourné de l'angle $\theta'_0 - \theta_0$. De même, à différentes valeurs de x_0, y_0 correspondent des courbes qui se déduisent les unes des autres par des translations.

En second lieu, suivant que l'on prend pour ρ la valeur $\frac{ds}{d\theta}$ ou la valeur $-\frac{ds}{d\theta}$, on a pour θ deux séries de valeurs opposées. On reconnaît que les deux séries de courbes qui correspondent à ces valeurs peuvent être obtenues en partant de deux courbes symétriques l'une

par rapport à l'autre et donnant à chacune d'elles toutes les positions dans le plan.

En résumé, nous trouvons une infinité de courbes satisfaisant à la relation $\rho = \varphi(s)$, toutes ces courbes ayant même forme et ne différant entre elles que par leur position dans le plan. L'équation $\rho = \varphi(s)$ est dite *l'équation intrinsèque* de ces courbes.

421. *Courbes gauches.* — Remarquons que, pour une courbe quelconque, x, y, z étant définis en fonction d'un paramètre t, s se trouve défini en fonction de ce paramètre. On peut inversement exprimer t, puis x, y, z en fonction de s, qui est alors le paramètre.

Supposons que, pour une courbe, on connaisse R et T en fonction de s, soit $R = \varphi(s)$, $T = \psi(s)$, les fonctions φ et ψ étant holomorphes, c'est-à-dire développables en séries entières. Supposons de plus que les coordonnées x, y, z soient, au voisinage d'une certaine valeur t_0, développables en séries entières; soit s_0 la valeur de s correspondante. s est fonction holomorphe de t, t est fonction holomorphe de s et, par suite, x, y, z sont fonctions holomorphes de s. Cherchons leurs développements en séries entières par rapport à s. Nous aurons

$$x = x_0 + \left(\frac{dx}{ds}\right)_0 (s - s_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)_0 (s - s_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nx}{ds^n}\right)_0 (s - s_0)^n + \ldots.$$

Tout revient à avoir $\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}, \ldots$. On a

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \qquad \ldots.$$

Admettons que l'on ait d'une façon générale

$$\frac{d^nx}{ds^n} = A_n\alpha + B_n\alpha_1 + C_n\alpha_2,$$

$$\frac{d^ny}{ds^n} = A_n\beta + B_n\beta_1 + C_n\beta_2,$$

$$\frac{d^nz}{ds^n} = A_n\gamma + B_n\gamma_1 + C_n\gamma_2,$$

A_n, B_n, C_n étant certaines fonctions de s. Dérivons ces expressions et utilisons les formules de Frenet; il vient

$$\frac{d^{n+1}x}{ds^{n+1}} = A'_n\alpha + B'_n\alpha_1 + C'_n\alpha_2 + A_n\frac{\alpha_1}{R} - B_n\left(\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha_2}{T}\right) + C_n\frac{\alpha_1}{T}.$$

Il suffit de poser

$$A_{n+1} = A'_n - \frac{B_n}{R}, \qquad B_{n+1} = B'_n + \frac{A_n}{R} + \frac{C_n}{T}, \qquad C_{n+1} = C'_n - \frac{B_n}{T}$$

pour retrouver une expression de même forme que l'expression de $\frac{d^n x}{ds^n}$. En particulier, pour les dérivées premières, secondes et troisièmes, on a

$$A_1 = 1, \qquad B_1 = 0, \qquad C_1 = 0,$$

$$A_2 = 0, \qquad B_2 = \frac{1}{R}, \qquad C_2 = 0,$$

$$A_3 = -\frac{1}{R^2}, \qquad B_3 = \frac{-R'}{R^2}, \qquad C_3 = -\frac{1}{RT}.$$

On peut ainsi calculer de proche en proche $\frac{d^n x}{ds^n}$, $\frac{d^n y}{ds^n}$, $\frac{d^n z}{ds^n}$, dès que R et T sont connus en fonction de s, et, par suite, avoir les développements de x, y, z.

Donnons-nous arbitrairement le point x_0, y_0, z_0, la tangente en ce point et la direction de la normale principale dans le plan normal, ce qui correspond à *six* paramètres arbitraires. Une fois ces éléments fixés, les neuf cosinus α, β, γ, α_1, ... sont déterminés, ainsi que tous les coefficients qui figurent dans le développement de x, y, z; on a une courbe bien déterminée.

La forme d'une courbe est donc déterminée par les relations qui donnent R et T en fonction de s. Ces relations s'appellent les *équations intrinsèques de la courbe*.

VII. — Étude d'une surface au voisinage d'un point.

422. Considérons une surface définie par des équations de la forme

$$(1) \qquad x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

u, v étant deux paramètres indépendants.

u, v constituent un système de *coordonnées curvilignes* auxquelles est rapportée la surface. On obtient une courbe tracée sur la surface en établissant une relation entre u et v. Nous avons, en différentiant (1),

$$(2) \qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial u} du + \dfrac{\partial x}{\partial v} dv, \qquad dy = \dfrac{\partial y}{\partial u} du + \dfrac{\partial y}{\partial v} dv, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial u} du + \dfrac{\partial z}{\partial v} dv. \end{cases}$$

Les coefficients de la tangente à cette courbe au point (x, y, z)

sont proportionnels à dx, dy, dz. Étant donné un point déterminé de la surface, on reconnaît que les tangentes aux différentes courbes tracées sur la surface et passant par ce point sont toutes contenues dans le plan qui a pour équation

$$(X-x)\frac{D(y,z)}{D(u,v)}+(Y-y)\frac{D(z,x)}{D(u,v)}+(Z-z)\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=0.$$

Ce plan est le *plan tangent* à la surface au point (x, y, z).

Nous poserons, dans cette étude,

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)},\qquad B=\frac{D(z,x)}{D(u,v)},\qquad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}.$$

423. Calculons, pour une courbe tracée sur la surface, le carré de l'élément linéaire de l'arc, c'est-à-dire la quantité désignée par ds^2. On a, d'après (2), en supposant les axes de coordonnées rectangulaires,

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2,$$

en posant

$$E=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2,\qquad F=\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},\qquad G=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

les signes $\sum$ étant appliqués aux lettres x, y, z. Entre ces quantités E, F, G et les quantités A, B, C déjà définies, on a d'ailleurs la relation suivante (identité de Lagrange) :

$$EG-F^2=A^2+B^2+C^2.$$

Désignons par H la quantité positive $\sqrt{EG-F^2}$ et rappelons que nous avons trouvé comme expression de l'aire d'une surface courbe

$$\int\int H\,du\,dv.$$

424. Les courbes de la surface obtenues en donnant à l'un des paramètres une valeur fixe sont dites *courbes coordonnées* sur la surface. Elles forment sur celle-ci deux familles, et par un point donné de la surface passe une courbe et une seule de chaque famille. Évaluons l'angle θ que font entre elles les deux courbes passant par le point (x, y, z). Si nous considérons la courbe $v=$ const., les différentielles dx, dy, dz correspondantes sont proportionnelles à $\frac{\partial x}{\partial u}$,

$\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, de sorte que les cosinus directeurs de la tangente à cette courbe sont

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

De même, les cosinus de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ sont

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

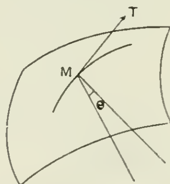
On en déduit

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{EG}}\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Quand on a $F = 0$, les deux courbes sont orthogonales. Si cette condition est remplie en tout point, on a, sur la surface, un système de *coordonnées orthogonales*.

425. Nous allons étudier la courbure des différentes courbes tracées sur la surface en un point. Étant donné un point M de la surface (*fig.* 38), la normale en M à la surface a pour coefficients A, B, C;

Fig. 38.



ses cosinus sont $\pm\frac{A}{H}$, $\pm\frac{B}{H}$, $\pm\frac{C}{H}$. Nous conviendrons d'appeler *direction positive sur la normale* celle qui a pour cosinus $\frac{A}{H}$, $\frac{B}{H}$, $\frac{C}{H}$.

Cela posé, considérons une courbe quelconque C tracée sur la surface et passant par M. Le plan osculateur à C en M passe par la tangente MT. Il suffit, pour le définir, de donner la normale principale en M, laquelle est une droite perpendiculaire à MT. Soit θ l'angle de la direction positive de cette normale principale avec la direction positive de la normale à la surface. En adoptant pour la courbe C les notations employées précédemment, nous avons

$$\cos\theta = \frac{A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1}{H},$$

ou, en introduisant le rayon de courbure R de la courbe en M, au moyen des formules de Frenet, $\frac{\alpha_1}{R} = \frac{d\alpha}{ds}, \ldots,$

$$\frac{H \cos\theta}{R} = \frac{A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma}{ds}.$$

Nous avons

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad d\alpha = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2}, \qquad \ldots,$$

d'où, comme on a $A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$,

$$\frac{H \cos\theta}{R} = \frac{A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z}{ds^2}.$$

Évaluons d^2x, d^2y, d^2z; on a, par exemple,

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v.$$

En formant la combinaison $A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z$, on voit que dans cette expression les termes en d^2u et d^2v ont leurs coefficients nuls, de sorte qu'il reste une forme quadratique en du, dv. Nous écrirons

$$\frac{H \cos\theta}{R} = \frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{ds^2},$$

en posant

$$E_1 = \sum A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad F_1 = \sum A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \qquad G_1 = \sum A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

c'est-à-dire

$$E_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \qquad G_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix},$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix}.$$

En remplaçant ds^2 par son expression en du, dv, nous avons la

formule fondamentale

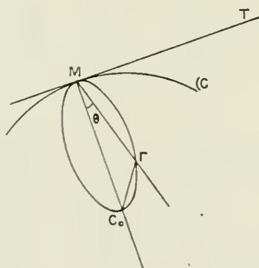
$$(1) \qquad \frac{H\cos\theta}{R} = \frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

426. Cette formule montre que le rayon de courbure d'une courbe tracée sur la surface est déterminé dès que l'on se donne, d'une part, le rapport $\frac{dv}{du}$ et, d'autre part, l'angle θ. Le rapport $\frac{dv}{du}$ fixe la position de la tangente à la courbe, et l'angle θ fixe ensuite la position de la normale principale, c'est-à-dire du plan osculateur. En d'autres termes, le rayon de courbure ne dépend que de la position du plan osculateur; il est le même pour toutes les courbes passant par M et ayant en ce point même plan osculateur. De plus, la direction positive de la normale principale est la même pour toutes ces courbes; $\cos\theta$ a, en effet, un signe déterminé, le signe du second membre de (1).

L'angle θ est donc toujours aigu ou toujours obtus; donc *toutes les courbes ayant même tangente et même plan osculateur en* M *ont même centre de courbure.*

427. Théorème de Meusnier. — Faisons varier θ en laissant fixe le rapport $\frac{dv}{du}$, c'est-à-dire considérons des courbes C tracées sur la surface, passant par M et assujetties seulement à avoir même tangente MT. La formule (1) montre que pour ces courbes le rap-

Fig. 39.



port $\frac{\cos\theta}{R}$ demeure constant. Considérons en particulier, parmi ces courbes, la section de la surface par le plan qui contient MT et la normale en M à la surface; pour cette courbe, θ est égal à 0 ou π, $|\cos\theta| = 1$; par suite, en désignant par ρ son rayon de courbure,

on a

$$\frac{|\cos\theta|}{R} = \frac{1}{\rho} \qquad \text{ou} \qquad R = \rho\,|\cos\theta|.$$

Cela montre (*fig.* 39) que *le centre de courbure* Γ *de la courbe* C *est la projection orthogonale, sur la normale principale à* C, *du centre de courbure* C_0 *de la section normale passant par* MT.

Il en résulte que, pour les courbes C, le lieu de Γ est, dans le plan perpendiculaire à MT, un cercle décrit sur MC_0 comme diamètre.

428. Un cas particulier important de la représentation paramétrique des surfaces est celui où l'on prend comme paramètres deux des variables x, y, z. Supposons, par exemple, que l'on prenne x, y; la surface sera définie par une équation de la forme

$$z = f(x, y).$$

Posons

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

On a d'abord

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2.$$

Formons le tableau des dérivées premières de x, y, z par rapport aux paramètres

$$\begin{matrix} 1, & 0, & p, \\ 0, & 1, & q. \end{matrix}$$

Les quantités que nous avons désignées par A, B, C sont remplacées par $-p$, $-q$, 1. Calculons E, F, G, H; on reconnaît qu'on a

$$E = 1 + p^2, \qquad F = pq, \qquad G = 1 + q^2, \qquad H = \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

puis, en calculant de même E_1, F_1, G_1, on trouve

$$E_1 = r, \qquad F_1 = s, \qquad G_1 = t.$$

En prenant pour direction positive sur la normale à la surface en un point M la direction de paramètres $\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$, et désignant par θ l'angle de cette direction avec la normale principale à une courbe tracée sur la surface en M, la for-

mule (1) devient

$$(2)\qquad \frac{\sqrt{1-p^2-q^2}}{R}\cos\theta = \frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2}.$$

Établissons cette formule directement : soit une surface ayant pour équation

$$z=f(x,y).$$

L'angle θ étant défini comme précédemment, on a, avec les notations déjà employées,

$$\cos\theta = \frac{-p\alpha_1-q\beta_1+\gamma_1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

d'où

$$\frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{-p\,d\alpha-q\,d\beta+d\gamma}{ds}.$$

La tangente à la courbe étant dans le plan tangent à la surface, on a

$$-p\alpha-q\beta+\gamma=0,$$

d'où, en différentiant,

$$-p\,d\alpha-q\,d\beta+d\gamma-\alpha\,dp-\beta\,dq=0.$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{\alpha\,dp+\beta\,dq}{ds}.$$

Or, nous avons

$$dp=r\,dx+s\,dy,\qquad dq=s\,dx+t\,dy,$$

d'où, en remplaçant dp et dq par ces valeurs, puis dx et dy par $\alpha\,ds$ et $\beta\,ds$,

$$(3)\qquad \frac{\cos\theta\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2.$$

En remplaçant α, β par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, puis ds^2 par sa valeur, on retrouve la formule (2).

429. Pour étudier la courbure des courbes tracées sur la surface en M, il suffit donc d'étudier la courbure des sections de la surface par des plans normaux en M. Pour ces courbes, θ est égal soit à o, soit à π. Nous conviendrons de compter comme positif le rayon de courbure R d'une section normale s'il est dirigé suivant la direction

positive de la normale à la surface et comme négatif s'il est dirigé en sens inverse. Moyennant cette convention, R devient une quantité algébrique qui est définie en grandeur et en signe par la relation

$$\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{E}_1\,du^2 + 2\mathrm{F}_1\,du\,dv + \mathrm{G}_1\,dv^2}{\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2},$$

ou, si x, y sont les paramètres, par la relation

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\mathrm{R}} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2.$$

Plaçons-nous dans ce dernier cas et portons l'origine des coordonnées au point M que l'on étudie, de façon que le plan tangent en M devienne le plan des xy. On a alors, pour M,

$$p = q = 0.$$

La formule précédente devient

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

R étant le rayon de courbure compté algébriquement sur l'axe Oz. Soit ω l'un des angles de la tangente à la section normale considérée avec Ox; on a

$$\alpha = \cos\omega, \qquad \beta = \sin\omega,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{1}{\mathrm{R}} = r\cos^2\omega + 2s\sin\omega\cos\omega + t\sin^2\omega.$$

C'est au moyen de cette formule que nous allons étudier les variations du rayon de courbure pour les différentes sections normales en M.

430. *Indicatrice.* — Sur la tangente MT, portons à partir de M, de part et d'autre de M, une longueur $\mathrm{M}\mu$ égale à $\sqrt{|\mathrm{R}|}$. Le lieu du point μ quand ω varie est appelé l'*indicatrice*. Nous allons étudier cette courbe. Soient ξ, η les coordonnées de μ; nous avons

$$\xi = \sqrt{|\mathrm{R}|}\cos\omega, \qquad \eta = \sqrt{|\mathrm{R}|}\sin\omega.$$

Écrivons que $\cos\omega$ et $\sin\omega$ satisfont à la relation (4); il vient

$$r\xi^2 + 2s\xi\eta + t\eta^2 = \pm 1.$$

C'est l'équation du lieu du point μ. Il y a trois cas à examiner

suivant le signe de la quantité $rt - s^2$ qui est le discriminant de la forme quadratique en ξ, η du premier membre :

1° $rt - s^2 > 0$. Le trinome $r\cos^2\omega + 2s\sin\omega\cos\omega + t\cos^2\omega$, et par suite aussi R, a un signe constant. Cela montre que, pour toutes les sections normales, le centre de courbure est du même côté du plan tangent. Ces différentes sections ont donc toutes leur concavité tournée d'un même côté. Au voisinage du point M la surface est tout entière d'un même côté du plan tangent : on dit qu'elle est *convexe* en M. L'indicatrice est, comme on le voit, une ellipse.

2° $rt - s^2 < 0$. Le trinome en ω est tantôt positif, tantôt négatif, suivant les valeurs de $\tan g\,\omega$. Il en est de même de R, de sorte que les sections normales ont leur concavité les unes d'un côté du plan tangent, les autres de l'autre côté. La surface est, au voisinage de M, de part et d'autre du plan tangent. Il y a en outre deux directions pour lesquelles le trinome en ω s'annule. Pour chacune d'elles on a $\frac{1}{R} = 0$, c'est-à-dire qu'il y a inflexion pour la section normale correspondante : on dit que la surface est *à courbures opposées*. Quant à l'indicatrice, elle se compose de deux branches d'hyperboles conjuguées ayant pour asymptotes les deux droites correspondant aux valeurs de ω pour lesquelles le trinome s'annule. Les deux asymptotes de l'indicatrice sont dites *tangentes principales*.

3° $rt - s^2 = 0$. Le trinome en ω a un signe constant, mais est nul pour une certaine valeur de $\tan g\,\omega$. Pour la section correspondante R est infini ; il y a donc inflexion en M. Toutes les autres sections ont leur concavité tournée d'un même côté du plan tangent. Quant à l'indicatrice, elle se compose de deux droites parallèles.

Considérons, dans les trois cas, les directions des axes de l'indicatrice. Pour ces directions, R est maximum ou minimum. On appelle ces valeurs de R les *rayons de courbure principaux* en M. Les sections normales correspondantes sont les *sections principales* en M.

On appelle *ombilic* un point pour lequel l'indicatrice est un cercle ; en un tel point, R est constant pour toutes les sections normales. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait, dans le système particulier d'axes choisis,

$$s = 0, \qquad r = t.$$

431. L'indicatrice nous apparaît dans cette théorie comme une courbe auxiliaire représentative. On peut encore la considérer sous un aspect différent. Prenons les mêmes axes que précédemment et

supposons que z soit représenté par une fonction de x, y développable par la formule de Taylor. Le plan tangent en M étant le plan des xy, z ne contiendra pas de termes du premier degré en x, y; les termes du second degré seront $rx^2 + 2sxy + ty^2$ et l'on aura, en arrêtant la formule de Taylor au troisième terme,

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(xf'_x + yf'_y)^{(3)}_{\theta x, \theta y}.$$

Le plan tangent en M coupe la surface suivant la courbe ayant pour équation dans son plan

$$0 = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(xf'_x + yf'_y)^{(3)}_{\theta x, \theta y};$$

c'est une courbe pour laquelle l'origine est un point double. Les tangentes à cette courbe en ce point sont les *tangentes principales*. Elles sont imaginaires, confondues ou réelles suivant que $rt - s^2$ est positif, nul ou négatif.

Coupons maintenant la surface par un plan parallèle au plan tangent, soit $z = h$, et projetons la section sur le plan tangent; cette projection a pour équation

$$h = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \frac{1}{6}(xf'_x + yf'_y)^{(3)}_{\theta x, \theta y}.$$

Transformons cette projection en posant

$$X = \lambda x, \qquad Y = \lambda y,$$

λ étant un certain facteur qui reste à déterminer.

L'équation de la courbe transformée est

$$h = \frac{1}{2\lambda^2}(rX^2 + 2sXY + tY^2) + \frac{1}{6\lambda^3}\left[X^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\left(\frac{\theta X}{\lambda}, \frac{\theta Y}{\lambda}\right) + \ldots\right]$$

ou

$$2h\lambda^2 = (rX^2 + 2sXY + tY^2) + \frac{1}{3\lambda}\left[X^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\left(\frac{\theta X}{\lambda}, \frac{\theta Y}{\lambda}\right) + \ldots\right].$$

Prenons λ tel que l'on ait

$$2|h|\lambda^2 = 1.$$

Cela étant, faisons tendre h vers zéro; nous devons, pour conserver la relation entre λ et h, faire croître λ indéfiniment. Nous sommes conduits à dire que la courbe obtenue tend, dans ces conditions, vers la courbe ayant pour équation

$$rX^2 + 2sXY + tY^2 = \pm 1.$$

Ceci conduit à la définition suivante de l'indicatrice : *on coupe la surface par un plan parallèle au plan tangent et infiniment voisin de ce plan. On amplifie la section ainsi obtenue suivant la loi indiquée. L'indicatrice est la limite vers laquelle tend la courbe transformée, lorsque le plan sécant vient se confondre avec le plan tangent.*

432. Prenons, par exemple, la surface ayant pour équation

$$z = x^2 + 2y^2 + \varphi_3(x, y),$$

φ_3 étant un polynome de degré supérieur ou égal à 3. L'indicatrice est une ellipse.

Pour la surface

$$z = x^2 - 2y^2 + \varphi_3(x, y),$$

φ_3 ayant la même signification, c'est une hyperbole. Enfin, pour la surface

$$z = x^2 - y^3,$$

c'est une parabole.

433. *Courbure totale.* — Soient R_1, R_2 les rayons de courbure principaux (n° 430) en un point d'une surface. On appelle *courbure totale* en ce point le produit $\frac{1}{R_1 R_2}$, c'est-à-dire le produit des courbures des sections principales.

La courbure totale en un point est positive si la surface est convexe en ce point, négative si la surface est à courbures opposées en ce point. Enfin elle est nulle en tout point où l'indicatrice est parabolique.

On appelle *courbure moyenne* l'expression $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Si l'on considère deux sections normales rectangulaires correspondant, par exemple, aux angles ω, $\omega + \frac{\pi}{2}$, et si l'on désigne par R et R' leurs rayons de courbure, on a

$$\frac{1}{R} = r\cos^2\omega + 2s\sin\omega\cos\omega + t\sin^2\omega,$$

$$\frac{1}{R'} = r\sin^2\omega - 2s\sin\omega\cos\omega + t\cos^2\omega,$$

d'où résulte

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = r + t = \text{const.}$$

434. Aux études précédentes se rattache l'étude des fonctions de deux variables réelles. Étudier une fonction $f(x, y)$ de deux variables revient, en effet, à étudier la surface représentée par l'équation

$$z = f(x, y).$$

Étant donnée une fonction $z = f(x, y)$, il y a maximum pour cette fonction au point (x_0, y_0), si dans un certain champ des variables x, y auquel est intérieur le point (x_0, y_0), on a constamment

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Si, au contraire, on a constamment

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

il y a minimum au point (x_0, y_0).

Pour qu'il y ait maximum ou minimum, il faut évidemment qu'il y ait maximum ou minimum quand l'une des variables varie seule, l'autre recevant une valeur fixe. On en déduit, comme conditions nécessaires d'un maximum ou minimum, que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ doivent être nulles au point considéré. (On obtient le même résultat si, au lieu de deux variables, on en a un nombre quelconque.)

Supposons ces conditions remplies en un point (x_0, y_0). La question de savoir si la fonction a, en ce point, un maximum ou un minimum, se ramène à l'étude de la forme de la surface au voisinage du point (x_0, y_0).

En conservant les notations précédentes, si $rt - s^2$ est positif, l'indicatrice est une ellipse, il y a effectivement maximum ou minimum. Si $rt - s^2$ est négatif, l'indicatrice est une hyperbole, il n'y a ni maximum, ni minimum. Si $rt - s^2$ est nul, le cas doit être considéré comme douteux; il y a lieu de faire une étude complémentaire.

435. Revenons aux coordonnées curvilignes générales; nous avons obtenu la formule

$$\frac{H}{R} = \frac{E_1\,du^2 - 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Il en résulte, d'après l'étude classique des fractions du second degré, que, pour que $\frac{1}{R}$ soit constant, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}.$$

Ce sont les conditions pour que le point soit un *ombilic* (n° 430). Lorsque l'on prend x, y comme variables indépendantes, nous avons vu que l'on obtenait la formule

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{(1+p^2)\,dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2}.$$

Les conditions pour qu'il y ait ombilic sont

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2}.$$

VIII. — Lignes asymptotiques.

436. *On appelle ligne asymptotique d'une surface une ligne tracée sur cette surface et qui, en chaque point, est tangente à une des tangentes principales, c'est-à-dire à l'une des asymptotes de l'indicatrice en ce point.* Pour qu'il y ait une ligne asymptotique réelle passant par un point, il faut qu'en ce point l'indicatrice soit non elliptique, c'est-à-dire que la surface soit à courbures opposées.

Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales. Il s'agit de trouver une relation entre u et v telle que le point dont les coordonnées curvilignes vérifient cette relation décrive une ligne asymptotique de la surface. Or, en tout point d'une telle courbe, la tangente coïncidant avec une asymptote de l'indicatrice, la section normale passant par cette tangente a un rayon de courbure infini. La formule générale qui donne $\frac{H}{R}$ montre que, dans ces conditions, u et v doivent être liés par la relation

$$E_1\,du^2+2F_1\,du\,dv+G_1\,dv^2=0.$$

On dit que cette relation est l'*équation différentielle des lignes asymptotiques*. C'est une équation du second degré en $\frac{dv}{du}$. En la résolvant, on est conduit à deux équations de la forme

$$\frac{dv}{du}=\varphi_1(u,v), \qquad \frac{dv}{du}=\varphi_2(u,v).$$

Chacune de ces équations admet une intégrale dépendant d'une constante arbitraire.

Il existe donc sur la surface deux familles de lignes asymptotiques, dont chacune dépend d'une constante arbitraire. Par un point de la surface passe en général une courbe de chaque famille et une seule.

Ces courbes sont réelles si $E_1 G_1 - F_1^2 < 0$ (c'est le cas d'un point où la surface est à courbures opposées), imaginaires si $E_1 G_1 - F_1^2 > 0$ (cas de la surface convexe). Enfin, si $E_1 G_1 - F_1^2 = 0$ (point parabolique), il n'y a plus qu'une tangente principale.

Supposons maintenant que x, y soient les variables indépendantes. Le raisonnement est le même, et l'on trouve que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on obtient deux équations différentielles du premier ordre; chacune d'elles correspond à une famille de lignes asymptotiques qui dépend d'une constante arbitraire.

437. *En tout point d'une ligne asymptotique, le plan osculateur à cette ligne coïncide avec le plan tangent à la surface en ce point.* En effet, prenons les coordonnées curvilignes générales; le plan tangent à la surface au point (u, v) ayant pour coefficients A, B, C, les conditions pour que le point (u, v) décrive une ligne dont le plan osculateur en chaque point soit le plan tangent à la surface sont

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0.$$

La première condition est vérifiée pour toute courbe tracée sur la surface. D'après un calcul fait précédemment (n° 425, p. 219), le premier membre de la seconde est égal à

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2.$$

Cette seconde condition est donc équivalente à

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 = 0.$$

Il en résulte qu'il y a bien identité entre les courbes ainsi définies et les lignes asymptotiques.

438. Cherchons les lignes asymptotiques sur une surface réglée. Les génératrices de la surface en constituent une première famille. En effet, en un point M de la surface, la droite qui passe par ce point est dans le plan tangent et constitue une section normale de la surface à rayon de courbure infini. C'est donc l'une des deux tangentes

principales, de sorte qu'elle constitue une courbe qui, en chacun de ses points, est tangente à une tangente principale.

En particulier, pour une surface réglée du second degré, les tangentes principales en chaque point sont les deux génératrices de la surface qui passent par ce point. L'indicatrice est, en tout point, hyperbolique, et les lignes asymptotiques de la surface sont ses deux familles de génératrices.

Dans le cas général d'une surface réglée, cherchons l'équation différentielle de la seconde famille de lignes asymptotiques. Supposons la surface définie par les équations

$$x = x_0 + \alpha u, \qquad y = y_0 + \beta u, \qquad z = z_0 + \gamma u,$$

$x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \gamma$ étant des fonctions données d'un paramètre v. Quand u varie, v restant fixe, le point (x, y, z) décrit une droite; en d'autres termes, $v = \text{const.}$ représente la famille de génératrices rectilignes de la surface. Calculons les fonctions E_1, F_1, G_1, nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = \gamma,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x_0}{\partial v} + u\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial y_0}{\partial v} + u\frac{\partial \beta}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z_0}{\partial v} + u\frac{\partial \gamma}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0.$$

E_1, qui est le déterminant formé avec ces neuf quantités, est donc nul. Il en résulte que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est de la forme

$$2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2 = 0.$$

Elle admet donc la solution $dv = 0$ ou $v = \text{const.}$ Nous retrouvons ainsi comme première solution les génératrices de la surface. Pour calculer F_1 et G_1, formons $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \ldots, \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \ldots$ On a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} + u\frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}, \qquad \ldots,$$

$$F_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + u\dfrac{\partial \alpha}{\partial v} & \dfrac{\partial y_0}{\partial v} + u\dfrac{\partial \beta}{\partial v} & \dfrac{\partial z_0}{\partial v} + u\dfrac{\partial \gamma}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial v} & \dfrac{\partial \beta}{\partial v} & \dfrac{\partial \gamma}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad G_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial v} + u\dfrac{\partial \alpha}{\partial v} & . & . \\ \dfrac{\partial^2 x_0}{\partial v^2} + u\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} & . & . \end{vmatrix}.$$

En développant, on voit que F_1 ne dépend pas de u; c'est une

fonction de v. En formant de même G_1, on obtient un polynome du second degré en u, dont les coefficients sont des fonctions de v. D'autre part, l'équation différentielle de la seconde famille de lignes asymptotiques est

$$2 F_1 \, du + G_1 \, dv = 0.$$

D'après ce que nous venons de voir pour F_1 et G_1, elle peut se mettre sous la forme

$$\frac{du}{dv} + L u^2 + M u + N = 0,$$

L, M, N étant des fonctions de v. C'est une équation de Riccati.

439. *Tangentes conjuguées.* — Étant donné un point M d'une surface S, nous dirons que deux droites menées par M dans le plan tangent à S sont deux tangentes conjuguées par rapport à S si ces deux droites sont conjuguées par rapport à l'indicatrice. Cela revient, comme on sait, à dire qu'elles sont conjuguées par rapport aux asymptotes de l'indicatrice.

Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales. Considérons une courbe tracée sur la surface et posons, pour cette courbe, $\frac{dv}{du} = \mu$. Cette quantité μ définit en chaque point la direction de la tangente à la courbe. Projetons cette courbe sur le plan des xy par exemple, et soit m le coefficient angulaire de la tangente à la projection. On a

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv}{\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u} + \mu \frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} + \mu \frac{\partial x}{\partial v}}.$$

On reconnaît ainsi que m et μ sont liés par une relation homographique.

Cela posé, rappelons que le coefficient μ relatif aux asymptotes de l'indicatrice est défini par l'équation

$$(1) \qquad E_1 + 2 F_1 \mu + G_1 \mu^2 = 0.$$

Pour que deux directions de coefficients μ et μ' soient deux directions de tangentes conjuguées, il faut et il suffit que leurs projections sur le plan des xy par exemple, de coefficients m et m', soient conjuguées par rapport aux asymptotes de la projection de l'indicatrice. Il en résulte, à cause de la relation homographique qui existe entre μ

et m d'une part, μ' et m' d'autre part, que μ et μ' doivent être conjugués par rapport aux racines de l'équation (1). La condition pour qu'il en soit ainsi est, comme l'on sait,

$$E_1 + F_1(\mu + \mu') + G_1\mu\mu' = 0.$$

En posant $\mu = \dfrac{dv}{du}$, $\mu' = \dfrac{\delta v}{\delta u}$, cette relation s'écrit

$$E_1\, du\, \delta u + F_1(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G_1\, dv\, \delta v = 0.$$

Cherchons à obtenir directement cette condition dans le cas où x, y sont variables indépendantes. L'indicatrice en un point a pour projection sur le plan des xy une conique homothétique à la conique ayant pour équation

$$rX^2 + 2sXY + tY^2 = \text{const.}$$

Pour que m et m' soient, dans le plan des xy, les coefficients angulaires des projections de deux tangentes conjuguées, il faut et il suffit que l'on ait

$$r + s(m + m') + tmm' = 0,$$

ou, en posant $m = \dfrac{dy}{dx}$, $m' = \dfrac{\delta y}{\delta x}$,

$$r\, dx\, \delta x + s(dx\, \delta y + dy\, \delta x) + t\, dy\, \delta y = 0.$$

En un point d'une surface, deux tangentes conjuguées sont distinctes, à moins qu'elles ne coïncident avec une tangente principale.

440. Si deux familles de courbes tracées sur la surface, telles qu'il passe par chaque point une courbe de chaque famille et une seule, sont en outre telles que leurs tangentes en chaque point sont deux droites conjuguées, on dit que ces deux familles de courbes forment *deux familles conjuguées*.

Supposons qu'on se donne une première famille de courbes telle que par chaque point de la surface passe une courbe de cette famille et une seule. Le coefficient angulaire m de la tangente à cette courbe en chaque point est déterminé, et par suite le coefficient angulaire m' de la tangente conjuguée est aussi déterminé. Nous pourrons donc trouver une seconde famille formant avec la première un système conjugué, en déterminant une famille telle qu'en chaque point de la surface le coefficient angulaire de la tangente soit égal à m', c'est-à-dire à une fonction déterminée et connue des coordonnées.

Si l'on prend pour variables indépendantes x, y, le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ sera connu en chaque point ; en d'autres termes, la seconde famille sera déterminée par l'équation différentielle de sa projection sur le plan des xy.

441. Soient C une courbe tracée sur une surface S, M un point variable de C. Quand M décrit C, le plan tangent en M à la surface S varie en fonction d'un paramètre et, par suite, enveloppe une certaine surface Σ. Soit Δ la caractéristique du plan tangent, c'est-à-dire la droite qui engendre Σ. Je dis qu'*en chaque point de* C, Δ *est conjuguée de la tangente à* C. En effet, le plan tangent a pour équation, en prenant x, y comme variables indépendantes,

$$p(X-x)+q(Y-y)-(Z-z)=0.$$

Adjoignons à cette équation l'équation obtenue en différentiant :

$$dp(X-x)+dq(Y-y)-p\,dx-q\,dy+dz=0.$$

Or, pour tout déplacement du point (x, y, z) sur la courbe C, on a

$$p\,dx+q\,dy-dz=0.$$

La seconde équation se réduit donc à

$$dp(X-x)+dq(Y-y)=0.$$

C'est l'équation de la projection de Δ sur le plan des xy. Le coefficient angulaire m' de cette projection est

$$m'=-\frac{dp}{dq}=-\frac{r\,dx+s\,dy}{s\,dx+t\,dy},$$

ou, en désignant par m la quantité $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire le coefficient angulaire de la projection de la tangente à C,

$$m'=-\frac{r+sm}{s+tm}.$$

En mettant sous forme entière, on a entre m et m' la relation

$$r+s(m+m')+tmm'=0,$$

ce qui, d'après le n° 439, démontre la propriété indiquée.

IX. — Lignes de courbure.

442. *On appelle ligne de courbure d'une surface* S *une ligne tracée sur cette surface et tangente en chaque point à l'un des axes de l'indicatrice relative à ce point.* Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales et partons de la formule fondamentale relative aux sections normales (n° 429, p. 223):

$$(1)\qquad \frac{H}{R} = \frac{E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

D'après l'étude qui a été faite de la variation de R (n° 430), le premier membre est maximum ou minimum quand la courbe correspondante est tangente à un axe de l'indicatrice. On aura donc les courbes tangentes à un axe de l'indicatrice en cherchant les valeurs de $\frac{dv}{du}$ qui rendent maximum ou minimum le second membre. Or, ce second membre est une fraction du second degré, et l'on sait qu'une expression de la forme $f = \frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$, où φ et ψ sont des polynomes homogènes et du second degré en x et y, est maximum ou minimum lorsqu'on a

$$f = \frac{\varphi'_x}{\psi'_x} = \frac{\varphi'_y}{\psi'_y}.$$

D'après cela, R est maximum ou minimum lorsqu'on a

$$(2)\qquad \frac{H}{R} = \frac{E_1\,du + F_1\,dv}{E\,du + F\,dv} = \frac{F_1\,du + G_1\,dv}{F\,du + G\,dv}.$$

En égalant les deux derniers rapports, on a la relation à laquelle doit satisfaire $\frac{dv}{du}$ pour que le point (u, v) correspondant décrive une ligne de courbure. Cette relation est l'*équation différentielle des lignes de courbure*. En la mettant sous forme entière, on obtient

$$(E_1F - EF_1)\,du^2 + (E_1G - EG_1)\,du\,dv + (F_1G - FG_1)\,dv^2 = 0.$$

C'est une équation du second degré par rapport à $\frac{dv}{du}$. En la résolvant par rapport à $\frac{dv}{du}$, on obtient deux équations différentielles du premier ordre. A chacune de ces équations correspond une famille de lignes de courbure dépendant d'un paramètre arbitraire, de sorte que l'on a sur la surface deux familles de lignes de courbure, et que

par chaque point de la surface passe en général une ligne de chaque famille et une seule. L'ensemble de ces deux familles forme sur la surface un réseau de courbes à la fois orthogonales et conjuguées.

443. Revenons aux relations (2). On en déduit

$$(EH - E_1 R)\,du + (FH - F_1 R)\,dv = 0,$$
$$(FH - F_1 R)\,du + (GH - G_1 R)\,dv = 0.$$

Nous pouvons, entre ces deux relations, éliminer du et dv. L'équation du second degré en R que nous obtenons ainsi définit en chaque point les rayons de courbure principaux. C'est l'équation

$$(EH - E_1 R)(GH - G_1 R) - (FH - F_1 R)^2 = 0,$$

ou encore

$$(3) \qquad (E_1 G_1 - F_1^2) R^2 - (EG_1 + E_1 G - 2FF_1) HR + H^4 = 0.$$

On sait que le coefficient H est essentiellement différent de zéro en un point ordinaire. Cette équation n'a donc pas de racine nulle. Le coefficient de R^2 est $E_1 G_1 - F_1^2$; il est nul en tout point pour lequel les directions des asymptotes de l'indicatrice sont confondues, c'est-à-dire en tout point parabolique. En un tel point l'équation aux rayons de courbure principaux a donc une racine infinie.

Pour un ombilic, on a

$$\frac{E_1}{E} = \frac{F_1}{F} = \frac{G_1}{G}.$$

On peut poser, dans ce cas,

$$E_1 = \lambda E, \qquad F_1 = \lambda F, \qquad G_1 = \lambda G.$$

L'équation aux rayons de courbure principaux devient

$$(H - \lambda R)^2 = 0.$$

Elle a ses deux racines égales; l'indicatrice est bien un cercle, comme nous le savions déjà.

444. Dans le cas où l'on prend comme variables indépendantes x, y, la formule fondamentale qui définit le rayon de courbure d'une section normale est (n° 435, p. 228)

$$\frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2}.$$

En lui appliquant la même méthode, on est conduit à écrire pour un rayon de courbure principal et une courbe tangente aux axes de l'indicatrice

$$\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{R} = \frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1+q^2)\,dy}.$$

En égalant les deux derniers rapports, on a l'équation différentielle des lignes de courbure, ou plutôt de leurs projections sur le plan des xy :

$$[(1+p^2)s - pqr]\,dx^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\,dx\,dy + [pqt - (1+q^2)s]\,dy^2 = 0.$$

445. *Autre définition des lignes de courbure.* — Cherchons à déterminer sur une surface S une ligne telle que la normale à la surface en chaque point de cette ligne reste tangente à une courbe, par suite (n° 388, p. 180) engendre une surface développable. Prenons comme variables indépendantes x et y. La normale au point (x, y, z) a pour équations

$$X - x + p(Z - z) = 0,$$
$$Y - y + q(Z - z) = 0.$$

Il s'agit de faire varier x, y en fonction d'un paramètre, de façon que cette droite reste tangente à une courbe. D'après l'étude des enveloppes de courbes (n° 383, p. 176), il faut exprimer que le système formé par les équations de la normale et ces équations différentiées par rapport au paramètre sont compatibles en X, Y, Z. Or, on obtient par différentiation

$$-dx + dp(Z - z) - p\,dz = 0,$$
$$-dy + dq(Z - z) - q\,dz = 0.$$

Ces deux équations contiennent seulement Z ; si elles donnent la même valeur pour Z, les deux premières équations fourniront X et Y, et le système sera compatible. Le point X, Y, Z ainsi déterminé sera tel que son déplacement s'effectuera tangentiellement à la droite elle-même.

En écrivant que ces deux équations sont compatibles en Z, on a la condition

$$\frac{dp}{dx + p\,dz} = \frac{dq}{dy + q\,dz},$$

ou, en exprimant dp, dq, dz en fonction de dx, dy,

$$\frac{r\,dx + s\,dy}{(1+p^2)\,dx + pq\,dy} = \frac{s\,dx + t\,dy}{pq\,dx + (1+q^2)\,dy}.$$

Cette relation, à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x, y d'un point de la courbe cherchée, est l'équation déjà obtenue pour les lignes de courbure (nº 444). On a donc le résultat suivant :

Les lignes de courbure sont les lignes telles que la normale à la surface le long de ces lignes reste tangente à une courbe, par suite engendre une surface développable.

Prenons, par exemple, une surface de révolution. En chaque point, la tangente à la méridienne est, par raison de symétrie, un axe de l'indicatrice. L'autre axe est la tangente au parallèle qui passe par ce point. Les méridiens et les parallèles forment les deux familles de lignes de courbure. Si l'on considère un parallèle, les normales à la surface le long de ce parallèle forment un cône; on peut dire que leur enveloppe se réduit à un point, le sommet du cône. Les normales à la surface le long d'une méridienne forment un plan et sont, dans ce plan, tangentes à la développée de la méridienne.

446. Comme application des théories précédentes, cherchons les lignes de courbure du paraboloïde équilatère qui a pour équation

$$z = \frac{xy}{a}.$$

x, y étant les variables indépendantes, nous avons ici

$$p = \frac{y}{a}, \qquad q = \frac{x}{a}, \qquad r = 0, \qquad s = \frac{1}{a}, \qquad t = 0.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure devient

$$\frac{\frac{1}{a}\,dy}{\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)dx + \frac{xy}{a^2}\,dy} = \frac{\frac{1}{a}\,dx}{\frac{xy}{a^2}\,dx + \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)dy},$$

ou

$$\frac{\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right)dx}{dy} = \frac{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)dy}{dx}, \qquad \frac{dx^2}{x^2 + a^2} = \frac{dy^2}{y^2 + a^2},$$

d'où, en extrayant la racine carrée,

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}}.$$

En intégrant, on obtient

$$\mathrm{L}\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) = \pm\, \mathrm{L}\left(y + \sqrt{y^2 + a^2}\right) + \text{const.},$$

d'où les équations des deux familles de lignes de courbure

$$(x+\sqrt{x^2-a^2})(y+\sqrt{y^2+a^2})=\lambda,$$
$$(x+\sqrt{x^2+a^2})(y-\sqrt{y^2+a^2})=\mu.$$

447. Comme second exemple, considérons la surface engendrée par une droite parallèle au plan des xy rencontrant oz et s'appuyant, en outre, sur une hélice circulaire ayant pour axe oz. C'est une surface de la famille des conoïdes appelée *hélicoïde à plan directeur*.

Définissons l'hélice en prenant pour paramètre l'angle θ, tel que les coordonnées d'un point de l'hélice soient (r étant fixe)

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta,\qquad z=a\theta.$$

On peut considérer l'hélicoïde comme défini par les mêmes équations, θ et r étant deux paramètres indépendants. Faire varier r, θ étant fixe, revient en effet à considérer tous les points de la génératrice de l'hélicoïde. En faisant ensuite varier θ, on obtient tous les points de la surface.

Formons le tableau des dérivées de x, y, z par rapport à r et θ :

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial r}=0;$$
$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial\theta}=a;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=0;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial\theta}=-\sin\theta,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial\theta}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta}=0;$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2}=-r\cos\theta,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2}=-r\sin\theta,\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}=0.$$

On en déduit, les coordonnées u, v de la théorie générale étant remplacées par r, θ,

$$E=1,\qquad F=0,\qquad G=r^2+a^2,$$
$$E_1=0,\qquad F_1=-a,\qquad G_1=0,$$
$$H=\sqrt{r^2+a^2}.$$

Les équations générales donnant les lignes de courbure et les rayons de courbure principaux (n° **442**, p. 234) deviennent

$$(1)\qquad \frac{\sqrt{r^2+a^2}}{R}=-\frac{a\,d\theta}{dr}=-\frac{a\,dr}{(r^2+a^2)\,d\theta}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est donc

$$\frac{dr^2}{r^2 - a^2} = d\theta^2,$$

d'où, en intégrant et désignant par θ_0 une constante arbitraire,

$$\theta - \theta_0 = \mathrm{L} \left| r + \sqrt{r^2 + a^2} \right|.$$

L'équation aux rayons de courbure principaux s'obtient ici en égalant le carré du premier rapport (1) au produit des deux derniers; c'est donc

$$\frac{r^2 + a^2}{\mathrm{R}^2} = \frac{a^2}{r^2 + a^2}$$

ou

$$\mathrm{R}^2 = \frac{(r^2 + a^2)^2}{a^2}.$$

On voit qu'en chaque point, les rayons de courbure principaux sont deux nombres opposés.

On appelle *surface minima* une surface jouissant de cette propriété; c'est *une surface dont l'indicatrice en chaque point est une hyperbole équilatère.*

448. *Développée d'une surface.* — Soit C une ligne de courbure sur une surface S. Nous avons vu que, si un point M se déplace sur C, la normale en M à la surface reste tangente à une courbe. Supposons la surface définie en coordonnées curvilignes générales, et soient x, y, z les coordonnées de M, X, Y, Z celles du point de contact de la normale avec son enveloppe. Les cosinus de la direction positive sur la normale en M sont

$$\lambda = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H}}, \qquad \mu = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}, \qquad \nu = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{H}},$$

et l'on a, en appelant ρ la distance du point M au point (X, Y, Z) comptée algébriquement sur la direction λ, μ, ν,

$$\mathrm{X} = x + \lambda\rho, \qquad \mathrm{Y} = y + \mu\rho, \qquad \mathrm{Z} = z + \nu\rho.$$

Écrivons que le déplacement du point (X, Y, Z) se fait tangentiellement à la normale, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{d\mathrm{X}}{\lambda} = \frac{d\mathrm{Y}}{\mu} = \frac{d\mathrm{Z}}{\nu}.$$

Remplaçons dX, dY, dZ par leurs valeurs,

$$dX = dx + \lambda\, d\rho + \rho\, d\lambda, \qquad \ldots,$$

il vient, après réduction,

$$\frac{dx + \rho\, d\lambda}{\lambda} = \frac{dy + \rho\, d\mu}{\mu} = \frac{dz + \rho\, d\nu}{\nu}.$$

En multipliant les deux termes du premier rapport par λ, ceux du deuxième par μ, ceux du troisième par ν et ajoutant, on obtient

$$\frac{\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz + \rho(\lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu + \nu\, d\nu)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

et ce nouveau rapport est égal à chacun des précédents. Son numérateur est d'ailleurs nul, car on a séparément

$$\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz = 0, \qquad \lambda\, d\lambda + \mu\, d\mu + \nu\, d\nu = 0.$$

On doit donc avoir

$$dx + \rho\, d\lambda = 0, \qquad dy + \rho\, d\mu = 0, \qquad dz + \rho\, d\nu = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{d\mu}{dy} = -\frac{d\nu}{dz}.$$

En différentiant les formules $\lambda = \frac{A}{H}$, $\ldots$, on a

$$d\lambda = \frac{H\, dA - A\, dH}{H^2}, \qquad \ldots,$$

d'où, en remplaçant $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ par ces valeurs,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{A\, dH - H\, dA}{H^2\, dx} = \frac{B\, dH - H\, dB}{H^2\, dy} = \frac{C\, dH - H\, dC}{H^2\, dz}$$

et, en multipliant les termes de ces trois rapports respectivement par dx, dy, dz et ajoutant,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{-H(dA\, dx + dB\, dy + dC\, dz)}{H^2\, ds^2}.$$

Évaluons $\Sigma\, dA\, dx$. En différentiant la relation $\Sigma A\, dx = 0$, nous avons

$$\Sigma A\, d^2x + \Sigma\, dA\, dx = 0,$$

d'où, par un calcul déjà fait (nº 425),

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Sigma A\, d^2x}{H\, ds^2} = \frac{E_1\, du^2 + 2F_1\, du\, dv + G_1\, dv^2}{H(E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2)}.$$

On voit que l'on a $\rho = \mathrm{R}$, R étant le rayon de courbure de la section normale tangente à la courbe lieu de M.

Donc *le point de contact de la normale en* M *avec son enveloppe, quand* M *décrit une ligne de courbure, est le centre de courbure de la section normale qui passe par* M *et qui est tangente en* M *à cette ligne.*

Entre x, y, z, λ, μ, ν et R, on a, en outre, les relations

$$dx + \mathrm{R}\,d\lambda = 0, \qquad dy + \mathrm{R}\,d\mu = 0, \qquad dz + \mathrm{R}\,d\nu = 0;$$

ce sont les *formules de Rodrigues.*

On voit ainsi qu'à chaque ligne de courbure d'une surface S correspond une courbe, enveloppe de la normale. Si l'on fait varier la ligne de courbure sur la surface dans la famille à laquelle elle appartient la courbe considérée décrit une certaine surface Σ. A l'autre famille de lignes de courbure correspond, de même, une surface Σ'. L'ensemble de ces deux surfaces Σ, Σ' constitue ce que l'on appelle la *développée de la surface donnée.*

Si l'on part d'une surface définie par une équation algébrique, Σ et Σ' seront, en général, non pas deux surfaces analytiquement distinctes, mais deux nappes d'une même surface.

449. Comme application de la propriété précédente des lignes de courbure, indiquons une nouvelle manière d'écrire l'équation de ces lignes en coordonnées curvilignes générales. Soient (x, y, z) un point d'une ligne de courbure, $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ le point de contact de la normale au point (x, y, z) avec son enveloppe. A, B, C étant, soit comme plus haut les déterminants fonctionnels de x, y, z par rapport à u, v, soit des quantités respectivement proportionnelles à ces déterminants, soit ρ une quantité proportionnelle à la distance des deux points (x, y, z), $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$; nous aurons

$$\mathrm{X} = x + \mathrm{A}\rho, \qquad \mathrm{Y} = y + \mathrm{B}\rho, \qquad \mathrm{Z} = z + \mathrm{C}\rho.$$

Les conditions auxquelles doivent satisfaire X, Y, Z sont

$$\frac{d\mathrm{X}}{\mathrm{A}} = \frac{d\mathrm{Y}}{\mathrm{B}} = \frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{C}},$$

d'où

$$\frac{dx + \rho\,d\mathrm{A}}{\mathrm{A}} = \frac{dy + \rho\,d\mathrm{B}}{\mathrm{B}} = \frac{dz + \rho\,d\mathrm{C}}{\mathrm{C}};$$

soit k la valeur commune de ces rapports. Les équations

$$dx + \rho\, dA - A k = 0,$$
$$dy + \rho\, dB - B k = 0,$$
$$dz + \rho\, dC - C k = 0,$$

qui sont trois équations linéaires et homogènes par rapport aux trois quantités non toutes nulles 1, ρ, $-k$, doivent être compatibles. Leur déterminant doit donc être nul; c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ A & B & C \\ dA & dB & dC \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation, à laquelle doivent satisfaire x, y, z, est *l'équation différentielle des lignes de courbure.*

450. *Théorème de Joachimsthal. — Si deux surfaces* S *et* S′ *ont en commun une ligne de courbure, elles se coupent sous un angle constant en tout point de cette ligne.*

En effet, soient C la ligne de courbure commune, M un point de C. Quand M varie sur C, la normale à S et la normale à S′ ont, l'une et l'autre, une enveloppe, et ces deux courbes enveloppes sont deux développées de C. Or (nº 411, p. 204), étant donnée une courbe C, si deux normales à cette courbe C au même point ont des enveloppes, elles font entre elles un angle constant. Cet angle étant justement ici l'angle des deux surfaces S et S′ en M, la propriété énoncée en résulte.

Réciproquement, *si deux surfaces* S *et* S′ *se coupent sous un angle constant suivant une courbe* C *et si* C *est ligne de courbure pour* S, C *est aussi ligne de courbure pour* S′.

En effet, la normale à S le long de C reste tangente à une développée de C. D'après l'étude des développées de courbes gauches, si l'on fait tourner cette normale d'un angle constant en restant dans le plan normal à C, la droite ainsi obtenue a elle aussi une enveloppe. Mais cette droite n'est autre que la normale à S′ le long de C. Donc C, qui remplit par rapport à S′ la propriété caractéristique des lignes de courbure, est une ligne de courbure pour S′.

Remarquons, en particulier, que toute courbe plane peut être considérée comme une ligne de courbure de son plan; de même, toute courbe tracée sur une sphère est une ligne de courbure pour cette shpère. Il en résulte que, *pour qu'une ligne plane ou sphérique*

tracée sur une surface S soit ligne de courbure pour S, il faut et il suffit que le plan ou la sphère qui contient cette ligne rencontre S sous un angle constant.

451. *Systèmes triples orthogonaux.* — On appelle *système triple orthogonal* un système de trois familles de surfaces tel que par tout point de l'espace passe une surface de chaque famille et une seule, ces trois surfaces se coupant deux à deux à angle droit.

Par exemple, étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires, le système des plans parallèles aux trois plans de coordonnées est un système triple orthogonal. Un autre exemple est fourni par le système des coordonnées semi-polaires : une première famille de surfaces est formée par les plans parallèles au plan des xy, une deuxième famille par les cylindres d'axe Oz et enfin la troisième famille par les plans passant par Oz. Un troisième exemple est fourni par le système des coordonnées polaires; les trois familles de surfaces sont : des sphères de centre O, des cônes de révolution d'axe Oz et des plans passant par Oz.

452. Supposons les équations des trois familles de surfaces mises sous la forme

$$f(x, y, z) = \lambda, \qquad \varphi(x, y, z) = \mu, \qquad \psi(x, y, z) = \nu, \tag{1}$$

λ, μ, ν étant des constantes. Pour qu'au point (x, y, z) les deux premières familles soient orthogonales, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

En exprimant de même les deux autres conditions d'orthogonalité, on a deux relations analogues relatives à φ, ψ d'une part, ψ, f d'autre part.

Imaginons maintenant que l'on ait résolu par rapport à x, y, z les équations (1). x, y, z deviennent ainsi des fonctions de λ, μ, ν, et l'on est amené à considérer le système de coordonnées curvilignes λ, μ, ν. Quand λ, μ, ν varient de toutes les manières possibles, le point (x, y, z) engendre l'espace. Quand ν, par exemple, reste fixe, le point (x, y, z) engendre une surface de la troisième famille. Si μ et ν restent fixes, λ étant seul variable, le point (x, y, z) décrit une courbe qui est l'intersection de deux surfaces de deux des familles obtenues, l'une en

faisant varier λ et μ, l'autre en faisant varier λ et ν, c'est-à-dire des deux surfaces $\nu = \text{const.}$, $\mu = \text{const.}$

Étant donné un point M de l'espace, les trois surfaces passant par ce point se coupent suivant trois courbes passant par M. Ces trois courbes s'obtiennent en laissant fixes deux des paramètres et faisant varier le troisième. Écrire que les trois surfaces sont orthogonales en M revient à écrire que les trois courbes $\lambda =$ variable, $\mu =$ variable, $\nu =$ variable sont trirectangles en M. La condition d'orthogonalité des deux premières est

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu} + \frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0,$$

le signe Σ s'appliquant aux lettres x, y, z.

En permutant λ, μ, ν, on a les trois conditions

$$(2) \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0.$$

Considérons les deux relations qui contiennent $\frac{\partial x}{\partial\nu}$, $\frac{\partial y}{\partial\nu}$, $\frac{\partial z}{\partial\nu}$, nous pouvons en tirer des valeurs proportionnelles à ces quantités; nous aurons

$$(3) \qquad \frac{\dfrac{\partial x}{\partial\nu}}{\dfrac{D(y, z)}{D(\lambda, \mu)}} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial\nu}}{\dfrac{D(z, x)}{D(\lambda, \mu)}} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial\nu}}{\dfrac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)}}.$$

Dérivons, d'autre part, par rapport à ν la relation

$$\sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0;$$

il vient

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\mu} + \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0.$$

Désignons par P l'expression $\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu}$ et par Q et R les expressions qui s'en déduisent par permutation circulaire de λ, μ, ν. La relation précédente s'écrit

$$R + Q = 0.$$

On obtient de même

$$P + R = 0, \qquad Q + P = 0,$$

d'où résulte

$$P = Q = R = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu}\frac{\partial x}{\partial\nu} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\mu\,\partial\nu}\frac{\partial x}{\partial\lambda} = 0, \qquad \sum \frac{\partial^2 x}{\partial\nu\,\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0.$$

Théorème de Dupin. — Les surfaces d'un système triple orthogonal se coupent deux à deux suivant leurs lignes de courbure ou, d'une façon plus précise, l'intersection de deux surfaces appartenant à deux familles différentes est ligne de courbure pour chacune de ces deux surfaces.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de démontrer que les lignes de courbure d'une surface $\nu =$ const. sont, sur cette surface, les lignes $\lambda =$ const. et les lignes $\mu =$ const.

Considérons la surface $\nu =$ const. comme définie en fonction des deux paramètres λ, μ qui remplaceront ici les paramètres u, v de la théorie générale. L'équation différentielle des lignes de courbure de cette surface est (n° 442)

$$\frac{E_1\,d\lambda + F_1\,d\mu}{E\,d\lambda + F\,d\mu} = \frac{F_1\,d\lambda + G_1\,d\mu}{F\,d\lambda + G\,d\mu}$$

ou

$$(E_1F - EF_1)\,d\lambda^2 + (E_1G - EG_1)\,d\lambda\,d\mu + (F_1G - FG_1)\,d\mu^2 = 0.$$

Nous allons montrer que les quantités F et F_1 sont nulles. Pour F, la vérification est immédiate; on a, en effet, d'après les conditions d'orthogonalité,

$$F = \sum \frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu} = 0.$$

Calculons F_1; nous avons

$$F_1 = A\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} + B\frac{\partial^2 y}{\partial\lambda\,\partial\mu} + C\frac{\partial^2 z}{\partial\lambda\,\partial\mu}.$$

Or A, B, C, c'est-à-dire $\frac{D(y, z)}{D(\lambda, \mu)}$, ··· sont, d'après (3), proportionnels à $\frac{\partial x}{\partial\nu}$, $\frac{\partial y}{\partial\nu}$, $\frac{\partial z}{\partial\nu}$. Pour vérifier que F_1 est nul, il suffit donc de vérifier que l'on a

$$\sum \frac{\partial x}{\partial\nu}\frac{\partial^2 x}{\partial\lambda\,\partial\mu} = 0.$$

C'est précisément la condition $P = 0$ que nous avons obtenue.

F et F_1 étant nuls, l'équation différentielle des lignes de courbure

se réduit à

$$d\lambda\, d\mu = 0,$$

d'où les solutions

$$\lambda = \text{const.}, \qquad \mu = \text{const.},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

453. Comme nouvel exemple de systèmes triples orthogonaux, citons les systèmes de *quadriques homofocales*. On montre, en effet, que les trois surfaces homofocales à une quadrique donnée et passant par un point donné sont deux à deux orthogonales en ce point. De là résulte la propriété suivante, par application du théorème de Dupin :

Étant donnée une surface du second degré, on considère les quadriques qui lui sont homofocales; elles forment trois familles et, par un point de la première surface, passe une surface de chacune des deux autres familles. Ces deux surfaces coupent la quadrique donnée suivant ses lignes de courbure au point considéré.

454. *Remarque.* — La notion de système triple orthogonal est l'extension de la notion de trajectoire orthogonale plane. Toutefois, il existe une différence entre les deux. Étant donnée dans le plan une famille de courbes, il existe toujours une deuxième famille formée des trajectoires orthogonales des courbes de la première, tandis qu'en général, une famille de surfaces donnée ne fait pas partie d'un système triple orthogonal.

X. — Surfaces développables.

455. Considérons le plan variable

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

A, B, C, D étant des fonctions d'un paramètre t. Nous avons vu (n° 387, p. 178) qu'un tel plan enveloppe une certaine surface S qui est le lieu de sa caractéristique. Cette caractéristique est définie par l'équation (1), à laquelle on adjoint l'équation dérivée par rapport au paramètre, c'est-à-dire l'équation

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0. \tag{2}$$

La caractéristique reste tangente à une certaine courbe C; les coordonnées du point de contact satisfont aux équations (1) et (2) et

à l'équation

$$(3) \qquad A''x + B''y + C''z + D'' = 0.$$

Je dis que *le plan variable* (1) *est osculateur à* C *au point* (x, y, z). En effet, les coordonnées de ce point sont des fonctions de t définies par les équations (1), (2), (3), et si, dans ces équations, on remplace x, y, z par les fonctions de t ainsi définies, elles sont vérifiées identiquement. Dans ces conditions, on a, en dérivant (1) et tenant compte de (2),

$$(4) \qquad Ax' + By' + Cz' = 0.$$

De même, en dérivant (2) et tenant compte de (3), on a

$$(5) \qquad A'x' + B'y' + C'z' = 0.$$

Enfin, dérivons (4) et tenons compte de (5); il vient

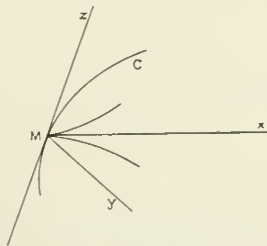
$$(6) \qquad Ax'' + By'' + Cz'' = 0.$$

Les équations (4) et (6) montrent que A, B, C sont proportionnels aux déterminants $y'z'' - z'y''$, ... Donc le plan (1), qui passe d'ailleurs par le point (x, y, z), est le plan osculateur à la courbe C.

On a vu (n° 388, p. 180) la réciproque, à savoir que, si l'on part d'une courbe, le plan osculateur à cette courbe a pour caractéristique la tangente.

456. La courbe C est dite *l'arête de rebroussement* de la surface S. Pour justifier ce nom, montrons qu'étant donné un point M

Fig. 40.



de C, *tout plan passant par* M *et non tangent à* C *en* M *coupe la surface suivant une courbe qui, en général, a un point de rebroussement en* M.

Prenons ce point M pour origine, le plan sécant pour plan des xy, la tangente à C en M pour axe des z, le plan osculateur à C en M pour plan des zx (*fig.* 40). Enfin, prenons z comme variable indépendante; x'_z et y'_z sont nuls pour l'origine. Écrivons, de plus, que le plan osculateur, de coefficients A, B, C, est le plan $y = 0$. C est nul du fait que ce plan passe par la tangente, c'est-à-dire par Oz. Il suffit donc d'annuler A. Or, on a $A = -y''$. Donc y'' doit être nul pour l'origine.

Cela étant, considérons la surface S; elle est engendrée par la tangente à C. Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de la tangente au point de paramètre z, voisin de M; ses équations sont

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = Z - z.$$

Pour avoir la section Σ de S par le plan des xy, faisons, dans les équations précédentes, $Z = 0$; nous en tirons les équations de Σ,

$$X = x - x'z, \qquad Y = y - y'z,$$

z étant le paramètre variable. On en déduit, en dérivant,

$$X' = -x''z, \qquad Y' = -y''z,$$
$$X'' = -x'' - x'''z, \qquad Y'' = -y'' - y'''z.$$

Pour le point M, on a $z = 0$, d'où résulte (comme $y'' = 0$)

$$X' = Y' = Y'' = 0$$

et (en général)

$$X'' = -x'' \neq 0.$$

Cela indique que, au voisinage de M, on peut poser

$$X = (a + \varepsilon)z^2, \qquad Y = (b + \varepsilon')z^3,$$

avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, ε et ε' tendant vers 0 avec z.

Ces équations représentent, comme l'on sait, une courbe ayant un point de rebroussement à l'origine, la tangente de rebroussement étant MX.

Ceci nous donne une idée de la forme d'une surface développable au voisinage de son arête de rebroussement. Considérons une courbe gauche, une demi-tangente à cette courbe gauche. Cette demi-tangente décrit une nappe de la développable, la demi-tangente opposée décrit une autre nappe. Ces deux nappes se raccordent le long de la courbe et sont en quelque sorte placées l'une au-dessus de l'autre.

457. *Équation aux dérivées partielles des surfaces développables.* — Soit

$$z = f(x, y)$$

l'équation d'une surface développable.

Le plan tangent au point (x, y, z) de la surface a pour équation

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0$$

ou

$$pX + qY - Z + z - px - qy = 0.$$

Ce plan, étant le même tout le long d'une génératrice, ne doit dépendre que d'un paramètre; par conséquent, les trois fonctions p, q, $z - px - qy$ doivent être fonctions de l'une d'entre elles. En particulier p et q doivent être fonctions l'un de l'autre, c'est-à-dire sont liés par une relation. La condition pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = 0.$$

Or, on a

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2,$$

d'où la condition nécessaire

$$rt - s^2 = 0.$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{D(z - px - qy, p)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} -rx - sy & -sx - ty \\ r & s \end{vmatrix} = y(rt - s^2).$$

Ce déterminant fonctionnel est donc nul, et, par suite, il existe une relation entre $z - px - qy$ et p.

La condition $rt - s^2 = 0$ est donc nécessaire et suffisante pour que les trois fonctions p, q, $z - px - qy$ soient fonctions de l'une d'entre elles, c'est-à-dire pour que le plan tangent ne dépende que d'un paramètre. Toute surface développable satisfait donc à l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

458. Réciproquement, démontrons que, si cette condition est remplie, la surface est développable. En effet, il résulte de cette condition que p et q sont liés par une relation au moins. Si p et q étaient liés par deux relations distinctes, cela signifierait que p et q sont constants, z serait alors de la forme $z = ax + by + c$, la surface serait un plan.

Ce cas mis à part, supposons p et q liés par une relation et une seule; alors l'une au moins des deux fonctions p, q n'est pas constante; supposons que ce soit p, et soient

$$q = \varphi(p), \qquad z - px - qy = \psi(p)$$

les relations qui existent entre p et q d'une part, $z - px - qy$ et p d'autre part. La fonction z de x, y satisfait donc à l'équation

$$(1) \qquad z - px - y\,\varphi(p) - \psi(p) = 0.$$

Dérivons par rapport à x et à y cette relation; nous obtenons, après réductions,

$$r[x + y\,\varphi'(p) + \psi'(p)] = 0,$$
$$s[x + y\,\varphi'(p) + \psi'(p)] = 0.$$

r et s ne sont pas tous deux nuls, sans quoi p serait constant, contrairement à l'hypothèse. Ces relations exigent donc que l'on ait

$$(2) \qquad x + y\,\varphi'(p) + \psi'(p) = 0.$$

x, y, z satisfont aux équations (1) et (2); en éliminant p, considéré comme un paramètre, entre ces deux équations, on aura l'équation de la surface.

Cela étant, considérons le plan ayant pour équation

$$p\mathrm{X} + \varphi(p)\mathrm{Y} - \mathrm{Z} + \psi(p) = 0,$$

p étant un paramètre. Pour avoir l'enveloppe de ce plan, nous devons éliminer p entre cette équation et l'équation dérivée par rapport au paramètre, c'est-à-dire l'équation

$$\mathrm{X} + \varphi'(p)\mathrm{Y} + \psi'(p) = 0.$$

Ces deux équations sont identiques aux équations (1) et (2); on trouvera donc comme enveloppe de ce plan la même surface que précédemment. En résumé, *il existe un certain plan dépendant d'un paramètre dont la surface donnée est l'enveloppe*. C'est donc bien une surface développable.

459. L'équation aux dérivées partielles

$$rt - s^2 = 0$$

caractérise ainsi les surfaces développables. Elle exprime le fait géométrique suivant : en tout point de la surface, l'indicatrice est parabolique.

En coordonnées curvilignes générales, on obtient l'équation des surfaces développables en partant de cette propriété. Avec les notations déjà employées, cette équation est

$$E_1 G_1 - F_1^2 = 0.$$

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre entre les variables u, v.

460. En chaque point d'une surface développable, il n'y a qu'une ligne asymptotique : c'est la génératrice de la surface.

Cherchons les lignes de courbure. Les génératrices constituent une première famille de lignes de courbure, car en chaque point la génératrice constitue un axe de l'indicatrice. L'autre famille se compose des trajectoires orthogonales des génératrices sur la surface. Or, une trajectoire orthogonale des génératrices est une courbe telle que certaines de ses normales, à savoir : les génératrices elles-mêmes, sont tangentes à l'arête de rebroussement. C'est donc une développante de l'arête de rebroussement (n° 413, p. 205). On sait que, pour obtenir une telle courbe, on porte sur la tangente à l'arête de rebroussement une longueur $l - s$, l étant une constante, s étant l'arc de l'arête de rebroussement compté à partir d'une certaine origine.

XI. — Surfaces réglées.

461. Une surface réglée est une surface engendrée par une droite variant en fonction d'un paramètre. Soient

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta$$

les équations de la droite, a, b, α, β étant quatre fonctions données d'un paramètre u. Le point de coordonnées x, y, z engendre la surface réglée qui se trouve définie en fonction des deux paramètres z et u.

On sait que, pour que la droite reste tangente à une courbe, il faut qu'il y ait compatibilité entre ses équations et les équations dérivées par rapport au paramètre u. Soient a', b', α', β' les dérivées de a, b, α, β par rapport à u. Les équations dérivées par rapport au paramètre sont ici

$$a'z + \alpha' = 0, \qquad b'z + \beta' = 0.$$

Pour que les quatre équations soient compatibles, il faut et il suffit

que les deux dernières donnent la même valeur pour z, c'est-à-dire que l'on ait

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0.$$

C'est *la condition pour que la surface soit développable.*

462. Reprenons le cas général et cherchons l'équation du plan tangent en un point (x, y, z). Ce plan contient la génératrice qui passe par ce point; son équation est donc de la forme

$$X - aZ - \alpha + \lambda(Y - bZ - \beta) = 0.$$

Considérons sur la surface un déplacement du point (x, y, z) correspondant à une variation de u, z étant constant. On a, pour ce déplacement,

$$dx = z\,da + d\alpha, \qquad dy = z\,db + d\beta, \qquad dz = 0.$$

Ces valeurs de dx, dy, dz définissent la direction de la tangente à la courbe $u =$ variable qui passe par le point (x, y, z). Écrivons que le plan tangent est parallèle à cette direction, cela nous donne la condition

$$za' + \alpha' + \lambda(zb' + \beta') = 0.$$

Cette relation détermine λ; l'équation du plan tangent au point de cote z est donc

$$(X - aZ - \alpha)(b'z + \beta') - (Y - bZ - \beta)(a'z + \alpha') = 0.$$

On reconnaît que λ est fixe, c'est-à-dire que le plan tangent est le même tout le long de la génératrice, si le rapport $\frac{a'z + \alpha'}{b'z + \beta'}$ est indépendant de z. Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha'}{\beta'},$$

c'est-à-dire

$$a'\beta' - b'\alpha' = 0.$$

Comme nous l'avons déjà vu, la surface est alors une surface développable.

463. Ce cas mis à part, le plan tangent varie avec z le long de chaque génératrice. Pour étudier sa variation, prenons pour axe des Z la génératrice considérée; l'équation du plan tangent devient

$$X(b'z + \beta') - Y(a'z + \alpha') = 0.$$

Soit ψ l'angle de ce plan avec le plan des ZX; on a, en supposant les axes de coordonnées rectangulaires,

$$\tang\psi = \frac{b'z + \beta'}{a'z + \alpha'};$$

$\tang\psi$ et z sont liés par une relation homographique. Cela montre que, quand z varie, le plan tangent prend toutes les positions possibles autour de OZ, c'est-à-dire de la génératrice. Quand z croît indéfiniment, le plan tangent a une position limite pour laquelle on a

$$\tang\psi = \frac{b'}{a'}.$$

Faisons tourner les axes autour de OZ de façon à prendre cette position pour plan ZOY. On aura, avec ces nouveaux axes, $a' = 0$; $\tang\psi$ sera lié à z par une relation de la forme

$$\tang\psi = k(z + h).$$

Déplaçons enfin les axes parallèlement à eux-mêmes, de façon que ψ soit nul en même temps que z; nous aurons

$$\tang\psi = kz,$$

k est dit le *paramètre de distribution*. L'origine dans ce système de coordonnées s'appelle le *point central* : c'est le point pour lequel le plan tangent à la surface est perpendiculaire au plan tangent à la surface au point à l'infini sur la génératrice.

464. Considérons deux positions voisines D et D_1 de la génératrice de la surface, correspondant respectivement aux valeurs u, $u + \Delta u$ du paramètre. Les coefficients a, b, α, β ont pour la première les valeurs a, b, α, β et pour la seconde les valeurs $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $\alpha + \Delta\alpha$, $\beta + \Delta\beta$. Nous supposons a, b, α, β développables par la série de Taylor en fonction de u.

Nous allons évaluer l'ordre infinitésimal, lorsque D et D_1 deviennent infiniment voisines : 1° de leur angle ω; 2° de leur plus courte distance δ. Nous avons

$$\cos\omega = \frac{a(a + \Delta a) + b(b + \Delta b) + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1}}.$$

On en déduit, en utilisant l'identité de Lagrange,

$$\sin^2\omega = 1 - \cos^2\omega = \frac{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}{(a^2 + b^2 + 1)[(a + \Delta a)^2 + (b + \Delta b)^2 + 1]}.$$

On reconnaît que $\sin\omega$ et, par suite, ω est un infiniment petit du même ordre que Δu.

Il y a lieu de mettre à part le cas où ω est nul, c'est-à-dire où l'on a $\Delta a = \Delta b = 0$. La droite décrit alors un *cylindre*.

Étudions maintenant la plus courte distance δ entre D et D_1. Pour cela, nous prenons la distance d'un point de D_1 au plan parallèle à D_1 mené par D; son équation est de la forme

$$X - aZ - \alpha + \lambda(Y - bZ - \beta) = 0;$$

λ doit être tel que ce plan soit parallèle à la direction $(a + \Delta a, b + \Delta b, 1)$, c'est-à-dire qu'on ait

$$a + \Delta a + \lambda(b + \Delta b) - (a + \lambda b) = 0;$$

cette équation détermine λ :

$$\lambda = -\frac{\Delta a}{\Delta b}.$$

L'équation du plan considéré est donc

$$\Delta b(X - aZ - \alpha) - \Delta a(Y - bZ - \beta) = 0.$$

Considérons le point de la droite D_1 qui a pour cote 0. On a, pour ce point,

$$X = \alpha + \Delta\alpha, \qquad Y = \beta + \Delta\beta, \qquad Z = 0.$$

La distance de ce point au plan précédent est

$$\delta = \frac{|\Delta b\,\Delta\alpha - \Delta a\,\Delta\beta|}{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + (a\,\Delta b - b\,\Delta a)^2}}.$$

Le dénominateur est, comme nous l'avons vu, du premier ordre par rapport à Δu. Étudions le numérateur; Δa, par exemple, est de la forme

$$\Delta a = a'\,\Delta u + \frac{a''}{2}\Delta u^2 + \frac{a'''}{6}\Delta u^3 + \ldots;$$

Δb, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ ont des développements analogues, de sorte que le numérateur contient comme terme de plus bas degré en Δu un terme en Δu^2 qui a pour coefficient $b'\alpha' - a'\beta'$. Cette quantité étant différente de 0, sauf pour une surface développable, nous voyons que, pour toute surface non développable, δ est du même ordre infinitésimal que Δu, et, par suite, que ω.

Cherchons quel est, pour une surface développable, l'ordre du numérateur de δ. Remplaçons comme précédemment Δa, Δb, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$

par leurs développements en formule de Taylor arrêtés, suivant le cas, au troisième ou au quatrième terme. Le coefficient de Δu^2 étant nul, cherchons le coefficient de Δu^3 ; c'est

$$\frac{1}{2}(a'\beta'' + a''\beta' - b'\alpha'' - b''\alpha').$$

Cette expression n'est autre que la dérivée de $a'\beta' - b'\alpha'$; elle est donc nulle. Le coefficient de Δu^4 est

$$\frac{1}{6}(a'\beta''' + a'''\beta' - b'\alpha''' - b'''\alpha') + \frac{1}{4}(a''\beta'' - b''\alpha'').$$

Je dis qu'il est, en général, différent de o. Cherchons à quelle condition il peut être nul. Dérivons le coefficient de Δu^3 ; nous obtenons les deux expressions entre parenthèses dans l'expression précédente, mais avec des coefficients numériques différents. Le coefficient de Δu^4 ne peut donc être constamment nul que si ces deux expressions sont constamment nulles séparément. En particulier, il faut qu'on ait

$$a''\beta'' - b''\alpha'' = 0.$$

En résumé, en mettant à part le cas de $a''\beta'' - b''\alpha'' = 0$, le numérateur de δ contient comme terme de plus bas degré un terme en Δu^4. Donc δ est du troisième ordre en Δu.

Cherchons à quelle condition on aura $a''\beta'' - b''\alpha'' = 0$. De la condition $a'\beta' - b'\alpha' = 0$ nous déduisons

$$\alpha' = \lambda a', \qquad \beta' = \lambda b',$$

d'où

$$\alpha'' = \lambda a'' + \lambda' a', \qquad \beta'' = \lambda b'' + \lambda' b',$$

$$a''\beta'' - b''\alpha'' = a''(\lambda b'' + \lambda' b') - b''(\lambda a'' + \lambda' a') = \lambda'(a''b' - b''a').$$

Nous sommes ramenés à étudier les solutions de l'équation

$$\lambda'(a''b' - b''a') = 0.$$

1° Nous avons la solution

$$\lambda' = 0,$$

d'où

$$\lambda = \text{const.}$$

et, par suite,

$$\alpha = \lambda a + \mu, \qquad \beta = \lambda b + \nu,$$

μ et ν étant des constantes. Les équations de la droite D deviennent

$$X = a(Z + \lambda) + \mu, \qquad Y = b(Z + \lambda) + \nu.$$

On voit que cette droite passe par le point fixe

$$x = \mu, \quad y = \nu, \quad z = -\lambda.$$

La surface est un *cône*, la plus courte distance de deux droites quelconques est nulle.

2° Une seconde solution de l'équation est

$$a''b' - b''a' = 0,$$

ce qui exprime que le rapport $\frac{b'}{a'}$ est constant. Supposons a' et b' non constamment nuls, et posons

$$b' = ka';$$

nous en déduisons

$$b = ka + c,$$

c étant une constante. De plus, la relation $a'\beta' - b'\alpha' = 0$ s'écrit

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{b'}{a'} = k,$$

d'où

$$\beta = k\alpha + \mu.$$

Les équations de la droite prennent la forme suivante :

$$X = aZ + \alpha, \qquad Y = (ka + c)Z + k\alpha + \mu.$$

On voit que les coordonnées de tout point de cette droite satisfont à l'équation

$$Y = kX + cZ + \mu.$$

La droite reste dans un *plan*, et la plus courte distance de deux génératrices quelconques est nulle.

Nous avons laissé de côté le cas où a' et b' sont constamment nuls ; a et b sont alors constants, la droite engendre un *cylindre*. ω étant constamment nul, il n'y a pas lieu de comparer δ et ω.

En résumé, il résulte de cette étude que, *dans une surface réglée non développable, la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines et l'angle de ces deux droites sont deux infiniment petits de même ordre. Dans une surface développable qui n'est ni un cône, ni un cylindre, ni un plan, la plus courte distance est du troisième ordre relativement à l'angle.* Enfin, *dans un cône et un plan la plus courte distance est nulle, dans un cylindre l'angle est nul.*

XII. — Déformation et représentation des surfaces.

465. Étant donnée une surface définie par les formules

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

on a obtenu (n° 423) la relation

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Remarquons que les fonctions E, F, G ne changent pas si l'on effectue une transformation de coordonnées rectangulaires en gardant les mêmes paramètres u, v, car on a toujours

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2.$$

Supposons maintenant qu'on remplace u, v par deux nouveaux paramètres u_1, v_1, le changement qui permet de passer de u, v à u_1, v_1 étant réversible. Nous avons

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u_1} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u_1},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v_1} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v_1} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v_1},$$

et, en appelant A_1, B_1, C_1, E_1, ... les fonctions analogues à A, B, C, E, ... avec les nouveaux paramètres, nous en déduisons

$$E_1 = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 = E\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial u_1} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u_1}\right)^2.$$

E_1 est donc fonction linéaire de E, F, G et dépend, en outre, des dérivées des anciens paramètres par rapport aux nouveaux.

Formons de même F_1, nous aurons

$$F_1 = E\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial u}{\partial v_1} + F\left(\frac{\partial u}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1} + \frac{\partial u}{\partial v_1}\frac{\partial v}{\partial u_1}\right) + G\frac{\partial v}{\partial u_1}\frac{\partial v}{\partial v_1}.$$

Enfin on sait que l'on a

$$A_1 = A\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)}, \qquad B_1 = B\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)}, \qquad C_1 = C\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)},$$

d'où

$$H_1 = H\frac{D(u, v)}{D(u_1, v_1)}.$$

466. Cela étant, considérons deux surfaces différentes définies de la façon suivante. Pour la première, s, on a

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

et pour la seconde, S, on a, u et v étant les mêmes paramètres,

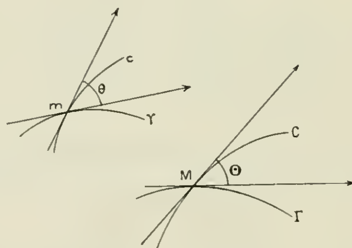
$$X = F(u, v), \qquad Y = \Phi(u, v), \qquad Z = \Psi(u, v).$$

Soient e, f, g, h les fonctions relatives à s, E, F, G, H les fonctions analogues relatives à S.

A un système de valeurs de u, v correspond un point m sur la première surface et un point M sur la seconde. Ainsi se trouve établie une correspondance point par point entre les deux surfaces; c'est cette correspondance que nous allons étudier.

Considérons sur s deux courbes c et γ se rencontrant en un point m et sur S les deux courbes correspondantes C et Γ qui se rencontrent au point M, correspondant à m (*fig.* 41). Cherchons à quelle condi-

Fig. 41.



tion l'angle des deux courbes tracées sur s est égal à l'angle des deux courbes tracées sur S, ou, plus brièvement, cherchons à quelle condition l'angle de deux courbes se conserve dans la correspondance.

Soient u et v les paramètres des points m et M.

Désignons par du, dv les accroissements correspondant à un déplacement à partir de m sur la courbe c, et, par suite, à un déplacement à partir de M sur C, par dx, dy, dz les différentielles de x, y, z correspondantes; soient δu, δv, δx, δy, δz les quantités analogues relatives à γ et Γ.

Nous aurons, en appelant θ et Θ les angles des tangentes en m et M,

$$\cos\theta = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds\,\delta s}$$

ou, en remplaçant dx par $\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \ldots,$

$$\cos\theta = \frac{e\,du\,\delta u + f(du\,\delta v + dv\,\delta u) + g\,dv\,\delta v}{\sqrt{(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2)(e\,\delta u^2 + 2f\,\delta u\,\delta v + g\,\delta v^2)}},$$

et, de même,

$$\cos\Theta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)(E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2)}}.$$

Mettons en évidence les rapports

$$\frac{dv}{du} = k, \qquad \frac{\delta v}{\delta u} = k'.$$

L'égalité des angles θ et Θ exige que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{[e + f(k + k') + gkk']^2}{(e + 2fk + gk^2)(e + 2fk' + gk'^2)} = \frac{[E + F(k + k') + Gkk']^2}{(E + 2Fk + Gk^2)(E + 2Fk' + Gk'^2)},$$

et, pour qu'il en soit ainsi quelles que soient les courbes c et γ, il faut que cette relation ait lieu quels que soient k et k'. On aperçoit la solution évidente :

$$(2)\qquad \frac{E}{e} = \frac{F}{f} = \frac{G}{g}.$$

En effet, si l'on a ces relations, les deux membres de (1) sont identiques. Je dis que c'est la seule solution. Imaginons que l'on mette l'équation (1) sous forme entière. L'expression $e + 2fk + gk^2$, qui divise le second membre en tant que polynome en k et k', doit diviser le premier, qui est

$$[e + f(k + k') + gkk']^2[E + 2Fk + Gk^2][E + 2Fk' + Gk'^2].$$

Remarquons que l'expression $e + f(k + k') + gkk'$, en tant que polynome en k et k', n'est pas décomposable. En effet, si elle l'était, elle se décomposerait en un produit de la forme

$$\lambda(e + fk)(e + fk'),$$

et, en identifiant ces deux expressions, on obtient

$$\frac{\lambda e^2}{e} = \frac{\lambda ef}{f} = \frac{\lambda f^2}{g},$$

d'où

$$eg - f^2 = 0,$$

ce qui est impossible. L'expression $e + f(k + k') + gkk'$ n'étant pas

décomposable, il faut que les deux facteurs qui entrent dans $e + 2fk + gk^2$ divisent les deux facteurs de $E + 2Fk + Gk^2$, c'est-à-dire que ces deux trinomes soient proportionnels. Cela exige que l'on ait les conditions (2).

Supposons ces conditions remplies pour les surfaces s et S, et soit λ la valeur du rapport $\frac{E}{e}$; nous aurons

$$dS^2 = \lambda \, ds^2.$$

Dans la correspondance entre les deux surfaces, l'angle de deux courbes est alors conservé. On exprime ce résultat en disant qu'*il y a similitude entre les éléments infiniment petits des deux surfaces.* Cette correspondance est dite une *représentation conforme.*

Considérons, en particulier, le cas de $\lambda = 1$; on a

$$E = e, \qquad F = f, \qquad G = g.$$

Outre les propriétés précédentes, s et S possèdent la propriété suivante : *deux arcs de courbes correspondants tracés sur ces deux surfaces ont même longueur.* Deux surfaces pour lesquelles il est possible de réaliser une correspondance de cette nature sont dites *applicables l'une sur l'autre.*

467. Nous allons montrer par un exemple que deux surfaces peuvent être applicables tout en étant complètement différentes de forme. Considérons une surface de révolution d'axe Oz, les coordonnées d'un de ses points étant

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = f(r).$$

On a pour cette surface

$$ds^2 = dr^2[1 + f'^2(r)] + r^2\, d\varphi^2.$$

Considérons, d'autre part, un hélicoïde à plan directeur (*cf.* n° 447, p. 238), défini par les équations

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = av.$$

L'élément linéaire de cette surface est

$$ds_1^2 = du^2 + (a^2 + u^2)\, dv^2.$$

Nous allons chercher à déterminer une surface de révolution applicable sur l'hélicoïde à plan directeur. Pour cela, nous allons chercher, par un changement convenable de paramètres, à identifier les deux ds^2 de ces surfaces.

Remarquons que l'expression $dr^2[1+f'^2(r)]$, qui ne contient que r, peut être mise sous la forme du carré d'une différentielle. Cherchons des fonctions u, v de r, φ telles que

$$dr\sqrt{1+f'^2(r)} = du, \qquad r^2\,d\varphi^2 = (a^2+u^2)\,dv^2.$$

Prenons pour cela

$$\varphi = v, \qquad r^2 = a^2+u^2,$$

d'où

$$r\,dr = u\,du.$$

La première relation devient

$$\sqrt{1+f'^2(r)} = \frac{du}{dr} = \frac{r}{u}$$

ou

$$1+f'^2(r) = \frac{r^2}{r^2-a^2},$$

$$f'(r) = \frac{a}{\sqrt{r^2-a^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$f(r) = a\,\mathrm{L}\left(r+\sqrt{r^2-a^2}\right) + \text{const.}$$

L'équation de la méridienne de la surface de révolution cherchée est

$$z = a\,\mathrm{L}\left(r+\sqrt{r^2-a^2}\right) + \text{const.}$$

ou, en choisissant convenablement la constante,

$$ae^{\frac{z}{a}} = r+\sqrt{r^2-a^2}.$$

On en déduit

$$ae^{-\frac{z}{a}} = r-\sqrt{r^2-a^2},$$

d'où, par addition,

$$r = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}}+e^{-\frac{z}{a}}\right).$$

Cette méridienne est une chaînette (n° 415, p. 208) ayant pour axe de symétrie l'axe des r ou des x. La surface de révolution engendrée par cette chaînette tournant autour de Oz s'appelle l'*alysséide*. *Elle est applicable sur l'hélicoïde à plan directeur représenté par les équations*

$$x = \sqrt{r^2-a^2}\cos\varphi, \qquad y = \sqrt{r^2-a^2}\sin\varphi, \qquad z = a\varphi.$$

Pour la surface de révolution, les courbes $\varphi =$ const. sont les méridiennes, pour l'hélicoïde, ce sont les génératrices; les chaînettes correspondent ainsi aux droites sur l'hélicoïde. De même, les parallèles sur l'alysséide correspondent aux hélices sur la seconde surface.

458. Étudions les *surfaces applicables sur un plan*. Soit α, β un système de coordonnées rectangulaires dans le plan. Considérons une surface applicable sur ce plan et prenons α, β comme paramètres sur cette surface. Nous devons avoir, dans ces conditions,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.$$

Exprimons dx, dy et dz en fonction de $d\alpha$ et $d\beta$, et identifions les deux formes quadratiques en $d\alpha$, $d\beta$ ainsi obtenues. Nous aurons

$$(1) \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 = 1, \qquad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 = 1, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} = 0.$$

Dérivons les deux premières relations par rapport à α et β; nous obtenons

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = 0.$$

Dérivons maintenant la troisième des relations (1) en tenant compte de celles que nous venons d'obtenir; nous aurons

$$\sum \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = 0.$$

Parmi les six relations obtenues, celles qui contiennent $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}$ montrent que ces trois quantités sont proportionnelles aux déterminants A, B, C. On reconnaît qu'il en est de même, d'une part pour $\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta}$, d'autre part pour $\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}$, de sorte que, si l'on forme le tableau des dérivées secondes de x, y, z par rapport à α, β, les trois lignes du tableau seront formées d'éléments proportionnels. Il en résulte que tout déterminant du second ordre issu de ce tableau est nul.

Cela étant, considérons les fonctions $\frac{\partial x}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial z}{\partial \alpha}$; le déterminant fonctionnel de deux quelconques d'entre elles par rapport à α, β est nul, car c'est un déterminant du second ordre issu du tableau précédent. Donc ces trois fonctions sont fonctions de l'une d'elles. De

même, $\frac{\partial x}{\partial\beta}$, $\frac{\partial y}{\partial\beta}$, $\frac{\partial z}{\partial\beta}$ sont fonctions de l'une d'elles. Or, on a entre ces six dérivées une relation qui est

$$\sum \frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta} = 0.$$

Il en résulte que ces six dérivées sont fonctions d'une seule d'entre elles.

Imaginons maintenant qu'on revienne, pour définir la surface, aux variables indépendantes x, y. Nous obtiendrons les relations entre les nouvelles dérivées et les anciennes en partant de

$$\frac{\partial z}{\partial\alpha} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha},$$
$$\frac{\partial z}{\partial\beta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\beta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\beta}.$$

En résolvant ces équations, nous aurons $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$, et, comme les dérivées de x, y, z par rapport à α, β sont fonctions de l'une d'entre elles, il y aura entre $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ une relation; autrement dit, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ seront fonctions l'une de l'autre. Nous avons constaté (n° 458, p. 249) qu'il faut, pour qu'il en soit ainsi, que la surface soit *développable*.

Ainsi, *les surfaces applicables sur un plan sont des surfaces développables*.

469. Réciproquement, étant donnée une surface développable, nous allons montrer qu'elle est applicable sur un plan; pour cela, nous allons chercher, par un choix convenable des paramètres u, v, à mettre le ds^2 de cette surface sous la forme $du^2 + dv^2$.

Considérons la développable comme la surface engendrée par la tangente à son arête de rebroussement. Soient $M(x, y, z)$ le point de contact de cette tangente, α, β, γ ses cosinus directeurs. Un point quelconque M_1 de cette tangente, situé à la distance l du point M, a pour coordonnées

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad y_1 = y + l\beta, \qquad z_1 = z + l\gamma.$$

Quand le point M et la longueur l varient, le point M_1 décrit la surface développable. Soient s_1 l'arc d'une courbe quelconque décrite par M_1, s l'arc de l'arête de rebroussement; nous avons

$$ds_1^2 = \sum dx_1^2 = \sum (dx + l\,d\alpha + \alpha\,dl)^2,$$

$$ds_1^2 = \sum [\alpha(ds + dl) + l\,d\alpha]^2 = (ds + dl)^2 + l^2 \sum d\alpha^2.$$

R étant le rayon de courbure de l'arête de rebroussement en M, remplaçons $d\alpha$ par $\frac{\alpha_1}{R}ds$; il vient

$$ds_1^2 = (ds + dl)^2 + \frac{l^2}{R^2}ds^2.$$

Nous allons chercher à mettre ds^2 sous la forme

$$dX^2 + dY^2,$$

c'est-à-dire

$$(dX + i\,dY)(dX - i\,dY).$$

Or, ds_1^2 peut être mis sous la forme

$$ds_1^2 = \left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right)\left(ds + dl - il\frac{ds}{R}\right).$$

Cherchons une fonction μ telle que le produit

$$\mu\left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right) = \mu\left(1 + \frac{il}{R}\right)ds + \mu\,dl$$

soit une différentielle exacte; autrement dit, cherchons un facteur intégrant pour l'expression

$$ds + dl + il\frac{ds}{R}.$$

On est conduit à l'équation

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\mu\left(1 + \frac{il}{R}\right)\right] - \frac{\partial\mu}{\partial s} = 0$$

ou

$$\left(1 + \frac{il}{R}\right)\frac{\partial\mu}{\partial l} + \mu\frac{i}{R} - \frac{\partial\mu}{\partial s} = 0.$$

On a une solution en prenant μ indépendant de l et satisfaisant à

$$\frac{d\mu}{ds} = \mu\frac{i}{R},$$

d'où

$$\mu = e^{i\int\frac{ds}{R}}.$$

D'ailleurs, les deux facteurs $ds + dl + il\frac{ds}{R}$, $ds + dl - il\frac{ds}{R}$ étant imaginaires conjugués, le second a pour facteur intégrant $e^{-i\int\frac{ds}{R}}$, et, comme le produit de ces deux facteurs intégrants est égal à 1, nous pouvons écrire

$$ds_1^2 = \left[e^{i\int\frac{ds}{R}}\left(ds + dl + il\frac{ds}{R}\right)\right]\left[e^{-i\int\frac{ds}{R}}\left(ds + dl - il\frac{ds}{R}\right)\right].$$

Chacun de ces facteurs doit être une différentielle exacte. Pour mettre ce fait en évidence, posons

$$\sigma = \int \frac{ds}{R}.$$

Le premier facteur de ds_1^2 s'écrit

$$e^{i\sigma}\,dl + le^{i\sigma}\,i\,d\sigma + e^{i\sigma}\,ds\,;$$

c'est la différentielle de

$$le^{i\sigma} + \int e^{i\sigma}\,ds.$$

Dans cette expression, séparons les parties réelles et les coefficients de i, et posons

$$X = l\cos\sigma + \int \cos\sigma\,ds, \qquad Y = l\sin\sigma + \int \sin\sigma\,ds.$$

Nous aurons

$$ds_1^2 = (dX + i\,dY)(dX - i\,dY) = dX^2 + dY^2.$$

Il y a donc application entre la surface donnée et le plan (X, Y), ce qui démontre la proposition.

Examinons la correspondance qui se trouve ainsi établie entre la surface et le plan. Pour $l = 0$, le point M_1 décrit l'arête de rebroussement de la développable; le point qui lui correspond dans le plan décrit la courbe ayant pour équations

$$X = \int \cos\sigma\,ds, \qquad Y = \int \sin\sigma\,ds.$$

A une tangente à l'arête de rebroussement, obtenue pour $s = \text{const.}$, correspond une droite, car X, Y sont fonctions linéaires du paramètre l, de sorte que, dans l'application, aux droites de la surface correspondent des droites du plan. Ces droites sont d'ailleurs tangentes à la transformée de l'arête de rebroussement.

470. *Courbure totale.* — Nous avons appelé *courbure totale* en chaque point d'une surface le produit $\frac{1}{R_1 R_2}$, R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux en ce point. Nous avons vu que ces rayons de courbure sont les racines de l'équation du second degré suivante :

$$(EH - E_1 R)(GH - G_1 R) - (FH - F_1 R)^2 = 0,$$

de sorte qu'on a

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{(EG - F^2)^2}.$$

Nous allons montrer que la courbure totale en un point d'une surface ne dépend que des fonctions E, F, G et de leurs dérivées. Il suffit, d'après la forme de $\frac{1}{R_1 R_2}$, de montrer que la fonction $E_1 G_1 - F_1^2$ s'exprime en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. Rappelons qu'on a

$$E_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \cdots \end{vmatrix}, \qquad G_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \cdots \end{vmatrix}, \qquad F_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \cdots \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \cdots \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \cdots \end{vmatrix}.$$

En effectuant le produit des deux premiers déterminants lignes par lignes, nous avons

$$E_1 G_1 = \begin{vmatrix} E & F & \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ F & G & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \sum \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \end{vmatrix};$$

nous avons de même

$$F_1^2 = \begin{vmatrix} E & F & \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \\ F & G & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} \\ \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} & \sum \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}\right)^2 \end{vmatrix}.$$

Dans ces deux déterminants, tous les éléments, sauf le dernier dans chacun d'eux, s'expriment en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. On a, en effet, en dérivant E et G,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Dérivons F par rapport à u et v, et tenons compte des relations

précédentes. On a

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}.$$

Il résulte de là que, dans le développement de $E_1 G_1 - F_1^2$, tous les termes s'expriment en fonction de E, F, G et de leurs dérivées, sauf peut-être le terme

$$(EG - F^2)\sum\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right].$$

Or, en dérivant par rapport à u la somme

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

par rapport à v la somme

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},$$

et retranchant la seconde dérivée de la première, il reste

$$\sum\left[\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right],$$

qui s'exprime donc aussi en fonction des dérivées de E, F, G.

Par suite, *la courbure totale en un point ne dépend que des fonctions* E, F, G *et de leurs dérivées.*

Nous avons vu qu'étant données deux surfaces applicables l'une sur l'autre, il existe une certaine représentation paramétrique telle qu'en deux points correspondants, E, F, G sont les mêmes pour les deux surfaces. Il en résulte qu'en ces deux points les surfaces ont même courbure totale. On exprime ce fait en disant que *la courbure totale se conserve dans la déformation.*

Constatons, en particulier, que cela a lieu pour les surfaces développables, qui sont des surfaces applicables sur un plan. La courbure totale en chaque point de ces deux surfaces est nulle.

471. Signalons ce fait, qu'il existe des surfaces dont la courbure totale est constante. La sphère, par exemple, est une surface à courbure totale constante et positive.

Citons un exemple de surface à courbure totale constante et négative : c'est la *pseudo-sphère* ou surface de révolution engendrée par

la tractrice en tournant autour de son asymptote. En nous reportant à la figure 36 (page 208), nous voyons que GM, rayon de courbure de la tractrice en G, est l'un des rayons de courbure principaux en G; l'autre est GT. Les sections principales en G sont, en effet, la section méridienne et la section qui lui est perpendiculaire. Ces deux rayons de courbure étant ici de sens contraires, la courbure totale est négative; de plus elle est constante, car on a (p. 210)

$$GM.GT = GP^2 = \text{const.}$$

472. *Représentation d'une surface sur un plan.* — Supposons qu'on se propose de représenter une surface sur un plan, c'est-à-dire d'établir une correspondance point par point entre la surface et le plan, cette correspondance devant réaliser certaines conditions géométriques qu'on indique.

Cherchons, par exemple, une représentation qui conserve les angles [représentation *conforme* (*cf.* n° 466)].

Soient u, v les paramètres dont dépend la surface, X, Y les coordonnées rectangulaires dans le plan, ds^2 le carré de l'élément linéaire de la surface, $dX^2 + dY^2$ celui du plan. Nous avons

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et nous devons mettre cette expression sous la forme $\lambda(dX^2 + dY^2)$. Pour cela, mettons d'abord la forme quadratique en u, v qui représente ds^2 sous la forme d'un produit,

$$(a\,du + b\,dv)(a'\,du + b'\,dv),$$

a' et b' étant imaginaires conjugués de a et b. On cherchera un facteur intégrant pour l'expression $a\,du + b\,dv$, c'est-à-dire un facteur $m + ni$ (m et n étant réels) tel que l'expression

$$(m + ni)(a\,du + b\,dv)$$

soit différentielle exacte; $m - ni$ sera facteur intégrant pour l'expression $a'\,du + b'\,dv$.

Si nous posons

$$(m + ni)(a\,du + b\,dv) = dX + i\,dY,$$

nous aurons

$$(m - ni)(a'\,du + b'\,dv) = dX - i\,dY,$$

d'où

$$ds^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{m^2 + n^2}.$$

Le problème sera résolu, le facteur λ ayant pour valeur $\frac{1}{m^2 + n^2}$.

473. Cherchons, en particulier, des représentations d'une sphère sur un plan, dans lesquelles les angles soient conservés. Prenons pour coordonnées d'un point de la sphère

$$x = R \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = R \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = R \cos\theta.$$

On a, dans ces conditions,

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2).$$

Pour avoir une solution du problème, écrivons

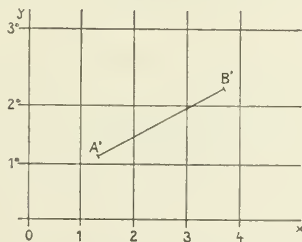
$$ds^2 = R^2 \sin^2\theta \left(d\varphi^2 + \frac{d\theta^2}{\sin^2\theta} \right).$$

Comme $d\varphi$ et $\frac{d\theta}{\sin\theta}$ sont deux différentielles exactes, il suffit de poser

$$X = \varphi, \qquad Y = -\int \frac{d\theta}{\sin\theta} = -L \left| \tang \frac{\theta}{2} \right|$$

pour avoir une représentation conforme de la sphère sur le plan (X, Y).

Fig. 42.



Supposons qu'il s'agisse de représenter une portion du globe terrestre, c'est-à-dire d'en tracer une carte. Prenons pour axe OZ l'axe polaire. Les courbes $\varphi =$ const. sont sur la Terre les différentes méridiennes; les courbes $\theta =$ const., les parallèles. Il leur correspond dans le plan les droites $X =$ const. pour les premières, les droites $Y =$ const. pour les secondes (*fig.* 42). A différents méridiens faisant entre eux des angles égaux correspondent des droites également dis-

tantes les unes des autres, mais à différents parallèles obtenus en donnant à θ les valeurs θ, $\theta + 1^\circ$, $\theta + 2^\circ$, ... correspondent des droites s'écartant de plus en plus l'une de l'autre. Si l'on va sur une méridienne de l'équateur au pôle, θ varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0, $\tang \frac{\theta}{2}$ varie de 1 à 0, Y varie donc de 0 à $+\infty$. A l'équateur correspond donc l'axe des X; à des points voisins du pôle correspondent des points très éloignés dans la direction de OY. On désigne cette projection sous le nom de *projection de Mercator*.

On appelle *loxodromie* une courbe tracée sur la surface du globe terrestre et qui coupe tous les méridiens sous un angle constant. Je dis que, dans la projection de Mercator, elle est représentée par une droite.

Soient, en effet, deux points A, B du globe terrestre ayant pour images A' et B'. Joignons A'B'. Ce segment A'B', qui rencontre toutes les droites $X = \text{const.}$ sous le même angle, est l'image d'une courbe tracée sur la sphère. Comme l'angle de deux courbes se conserve dans la projection, cette courbe AB rencontre tous les méridiens sous un angle constant. C'est donc bien une loxodromie.

474. Indiquons une autre représentation plane de la sphère, conservant également les angles. Nous pouvons écrire

$$ds^2 = 4\cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{R^2\,d\theta^2}{4\cos^4\frac{\theta}{2}} + R^2\tang^2\frac{\theta}{2}\,d\varphi^2\right).$$

Posons

$$\rho = R\tang\frac{\theta}{2};$$

on en déduit

$$d\rho = \frac{R\,d\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

de sorte qu'on a

$$ds^2 = 4\cos^4\frac{\theta}{2}(d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2).$$

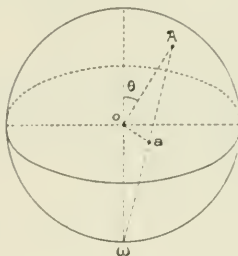
L'expression $d\rho^2 + \rho^2\,d\varphi^2$ représente le carré de l'élément linéaire d'un arc dans un plan rapporté à un système de coordonnées polaires φ et ρ. Il suffit d'établir entre θ et φ d'une part, ρ et φ d'autre part, la relation

$$\rho = R\tang\frac{\theta}{2},$$

pour avoir une représentation plane de la sphère dans laquelle les angles sont conservés.

C'est une *projection stéréographique* obtenue de la façon suivante : Soient ω l'une des extrémités de l'axe polaire (*fig.* 43).

Fig. 43.



A un point de l'hémisphère qui ne contient pas ω. On prend pour image de A l'intersection a de $A\omega$ avec le plan de l'équateur. En effet, prenons un méridien déterminé, c'est-à-dire attribuons à φ une certaine valeur; on a

$$O\omega A = \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$Oa = \rho = R \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

XIII. — Lignes géodésiques.

475. On appelle *ligne géodésique* d'une surface une courbe tracée sur cette surface et telle que son plan osculateur en chaque point est normal à la surface. Supposons la surface définie en fonction de deux paramètres u, v. Étant donnée une ligne décrite par le point (x, y, z), le plan osculateur en un point de cette ligne est défini par les deux directions de coefficients respectifs dx, dy, dz et d^2x, d^2y, d^2z. Pour que ce plan contienne la normale à la surface, il faut et il suffit que les trois directions (dx, dy, dz), (d^2x, d^2y, d^2z), (A, B, C) soient parallèles à un même plan, d'où la condition

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

On a ainsi, en exprimant tous les éléments de ce déterminant en

fonction de u, v, l'*équation différentielle des lignes géodésiques*. Cherchons quelle est la forme de cette équation. Remplaçons dx, d^2x, ... par leurs valeurs :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$d^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial x}{\partial v} d^2 v.$$

On voit que le premier membre de l'équation (1) se présente sous la forme d'un polynome en du, dv, $d^2 u$, $d^2 v$, du troisième degré par rapport à du, dv. L'ensemble des termes contenant seulement les différentielles premières est de la forme

$$L\, du^3 + M\, du^2\, dv + N\, du\, dv^2 + P\, dv^3.$$

Il peut y avoir, en outre, des termes en $du\, d^2 u$, $dv\, d^2 v$, $du\, d^2 v$, $dv\, d^2 u$. Les deux premiers ont leurs coefficients nuls, car ce sont des déterminants ayant deux lignes identiques. Le terme en $du\, d^2 v$ a pour coefficient

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ A & B & C \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire $A^2 + B^2 + C^2$ ou H^2. De même, le coefficient de $dv\, d^2 u$ est $-H^2$, de sorte que l'équation différentielle des lignes géodésiques peut se mettre sous la forme

$$(2) \quad L\, du^3 + M\, du^2\, dv + N\, du\, dv^2 + P\, dv^3 + H^2 (du\, d^2 v - dv\, d^2 u) = 0.$$

Si l'on prend comme variable indépendante u, v étant fonction de u, on a l'équation

$$(3) \qquad v'' = \alpha v'^3 + \beta v'^2 + \gamma v' + \delta,$$

α, β, γ, δ étant certaines fonctions de u, v; on déduit de là qu'*une ligne géodésique est déterminée par un point et la tangente en ce point*. En effet, donner un point, c'est donner un système de valeurs u_0, v_0; donner la tangente revient à donner la valeur de v'_0, et, d'après le théorème d'existence des solutions d'équations différentielles, il y a une fonction déterminée v de u qui satisfait à l'équation (3) et qui, pour $u = u_0$, prend la valeur v_0 en même temps que sa dérivée première prend la valeur v'_0.

476. Achevons de déterminer l'équation différentielle des lignes géodésiques en calculant les fonctions L, M, N, P. Remarquons que u et v jouent le même rôle, sauf que, par permutation de u et v, A, B, C changent de signe; de sorte que P se déduit de L, et N se déduit de M par permutation de u et v, et changement de signe. Il nous suffit donc de calculer L, coefficient de du^3, et M, coefficient de $du^2\,dv$. Nous avons

$$L = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

et

$$M = 2\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

Je dis que tous les coefficients de l'équation (2) s'expriment en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. Il suffit de le montrer pour L et M. En développant chaque déterminant par rapport aux éléments de la seconde ligne, nous avons

$$L = \sum_{x,y,z} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\left(B\frac{\partial z}{\partial u} - C\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

$$M = 2\sum\left(B\frac{\partial z}{\partial u} - C\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \sum\left(B\frac{\partial z}{\partial v} - C\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}.$$

Formons $B\frac{\partial z}{\partial u} - C\frac{\partial y}{\partial u}$:

$$\begin{aligned} B\frac{\partial z}{\partial u} - C\frac{\partial y}{\partial u} &= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial u} - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u} \\ &= \frac{\partial x}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] - \frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial x}{\partial v}\left[E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right] - \frac{\partial x}{\partial u}\left(F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ &= E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}. \end{aligned}$$

En permutant u et v, le premier membre se transforme en $-B\frac{\partial z}{\partial v} + C\frac{\partial y}{\partial v}$; le second, en $G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}$, de sorte qu'on a

$$B\frac{\partial z}{\partial v} - C\frac{\partial y}{\partial v} = F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}.$$

En portant ces valeurs dans L et M, il vient

$$L = E\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} - F\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$M = 2E\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} - 2F\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + F\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial v} - G\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u}.$$

Toutes les quantités figurant dans ces formules sous les signes $\sum$ s'expriment (n° 470, p. 266) en fonction de E, F, G et de leurs dérivées. Donc, tous les coefficients de l'équation différentielle des lignes géodésiques ne dépendent que de E, F, G et de leurs dérivées.

Il en résulte que, *dans l'application de deux surfaces l'une sur l'autre, les lignes géodésiques de l'une ont pour courbes transformées les lignes géodésiques de l'autre;* autrement dit, la propriété pour une ligne d'être géodésique se conserve dans la déformation.

477. Nous allons chercher une autre forme de l'équation différentielle des lignes géodésiques. Prenons comme paramètre, sur une telle ligne considérée comme inconnue, l'arc s de la courbe; u, v seront des fonctions de s liées par la relation

$$(4)\qquad E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1.$$

Pour exprimer que la ligne en question est ligne géodésique, il faut exprimer que sa normale principale en chaque point est normale à la surface, c'est-à-dire perpendiculaire aux deux directions de coefficients

$$\frac{\partial x}{\partial u},\quad \frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial u}\qquad \text{et}\qquad \frac{\partial x}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Or, étant donnée une courbe, si l'on prend l'arc comme variable indépendante, la normale principale a pour coefficients $\frac{d^2x}{ds^2}, \frac{d^2y}{ds^2}, \frac{d^2z}{ds^2}$. On a, en effet, avec les notations habituelles,

$$\frac{\alpha_1}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}.$$

On a donc les deux conditions

$$(5)\qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} = 0,\qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2x}{ds^2} = 0.$$

Nous allons leur donner une forme différente. Écrivons pour cela

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{ds} - \frac{dx}{ds}\frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{ds},$$

de sorte que la première condition (5) peut s'écrire

$$\frac{d}{ds}\sum \frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial u} - \sum \frac{dx}{ds}\frac{d\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)}{ds} = 0.$$

Remplaçons $\frac{dx}{ds}$ par $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}$, nous aurons

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{\partial x}{\partial u} = E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}.$$

Nous avons, d'autre part,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{du}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\frac{dv}{ds},$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = {} & \left(\frac{du}{ds}\right)^2 \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \\ & + \left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right)\left(\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) \\ & + \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v},\end{aligned}$$

ce qui s'écrit

$$\sum \frac{dx}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right].$$

La première condition (5) prend donc la forme suivante :

$$(6) \quad \frac{2\,d\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)}{ds} - \left[\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right] = 0;$$

de même, la seconde condition est

$$(7) \quad \frac{2\,d\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right)}{ds} - \left[\frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right] = 0.$$

Nous avons deux équations différentielles du second ordre par rapport à u et v considérés comme fonctions de s. A ces deux équations

il faut joindre la relation

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1.$$

Ces relations vont nous être utiles pour démontrer une propriété importante des lignes géodésiques.

178. *Calcul des variations.* — Considérons, dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées, deux points $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ et une courbe C passant par ces deux points, d'équation

$$y = f(x).$$

Supposons qu'on donne une fonction $V(x, y, y')$ dépendant de x, de $y = f(x)$ et de la dérivée de y par rapport à x, qu'on suppose exister en tout point. A une courbe C déterminée joignant les points A et B correspond, pour la fonction V, une valeur déterminée.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V(x, y, y')\, dx,$$

qui est en quelque sorte une intégrale curviligne prise le long de C. Proposons-nous de déterminer la courbe C de telle manière que U ait sa valeur minimum.

Supposons le problème résolu, et soit

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe cherchée. Faisons rentrer cette courbe dans une famille de courbes dépendant d'un paramètre. Nous obtiendrons ce résultat en prenant, par exemple, la famille de courbes suivante :

$$y = F(x, \alpha) = f(x) + \alpha(x - x_0)(x - x_1)\varphi(x, \alpha),$$

φ étant une fonction arbitraire de x et de α assujettie seulement à conserver une valeur finie et à avoir des dérivées également finies. On reconnaît que pour $\alpha = 0$ on obtient la courbe C. De plus, on a, quel que soit α,

$$F(x_0, \alpha) = f(x_0), \qquad F(x_1, \alpha) = f(x_1).$$

L'équation $y = F(x, \alpha)$ représente donc bien une famille de courbes passant toutes par A et B, et cette famille renferme la courbe C.

Si, dans U, on fait $y = \mathrm{F}(x, \alpha)$, U devient une certaine fonction de α, qui doit avoir sa valeur minimum pour $\alpha = 0$. Une condition nécessaire pour cela est que la dérivée $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha}$ soit nulle pour $\alpha = 0$.

Remarquons que y est fonction de x et de α, qu'on a $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ et que $\mathrm{F}(x, \alpha)$ prend, quel que soit α, la même valeur pour $x = x_0$; de même pour $x = x_1$. Il en résulte que $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ doit être nul pour $x = x_0$ et $x = x_1$, quel que soit α.

Cela étant, nous avons

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \alpha}\, dx.$$

Évaluons $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \alpha}$, V dépendant de α par l'intermédiaire de y et de y':

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}.$$

Or, on a

$$\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial \alpha} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x},$$

d'où

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x}\right] dx.$$

Transformons l'intégrale $\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x}\, dx$; on a, en intégrant par parties,

$$\int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x}\, dx = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha} - \int \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right)}{dx}\, dx,$$

en entendant par $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right)$ la dérivée de $\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}$ prise en considérant y et y' comme fonctions de x. Prenons les intégrales définies, nous avons

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)}{\partial x}\, dx = \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{d\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}\right)}{dx}\, dx.$$

Comme $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ est nul pour $x = x_0$ et $x = x_1$, la première expression

du second membre est nulle, de sorte qu'on peut écrire

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial y}{\partial \alpha} \left[\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} \right] dx,$$

et cette quantité doit être nulle pour que U puisse être minimum pour la courbe C. Je dis que, si la fonction U est minimum pour l'arc AB de la courbe C, elle l'est aussi pour une portion quelconque de l'arc. En effet, si elle ne l'était pas, il y aurait deux points A_1, B_1 entre lesquels on trouverait un nouvel arc $A_1 B_1$ pour lequel la fonction U aurait une valeur moindre. En raccordant cet arc aux arcs AA_1 et $B_1 B$ de C, on aurait une nouvelle courbe pour laquelle U aurait une valeur plus petite que pour la courbe C, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

La fonction U étant minimum pour une portion quelconque de l'arc, je dis qu'il en résulte qu'on a, en tout point de l'arc,

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} = 0.$$

En effet, supposons que le premier membre de cette équation ait une valeur positive pour tous les points d'un certain arc; on peut trouver pour y une fonction $F(x, \alpha)$ telle que $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ soit positif, autrement dit on peut faire rentrer la courbe à laquelle appartient l'arc considéré dans un faisceau tel qu'en passant d'une courbe du faisceau à l'autre, $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ reste différent de 0 et positif. Dans ces conditions, $\frac{\partial U}{\partial \alpha}$ aurait une valeur différente de 0, ce qui serait contraire à l'hypothèse. En résumé, une condition nécessaire pour que l'intégrale U soit minimum le long de la courbe C est qu'on ait, en tout point de C,

$$(8) \qquad \frac{d\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)}{dx} - \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Dans chaque question particulière, il y a lieu de voir si cette équation, qui est une équation différentielle du second ordre en y, définit une courbe déterminée à laquelle correspond effectivement un minimum pour U.

479. *Plus courte distance de deux points sur une surface.* —

Soient (u_0, v_0), (u_1, v_1) les coordonnées curvilignes de deux points donnés A et B sur une surface. Définissons une courbe passant par ces deux points par une relation de la forme $v = \varphi(u)$, et cherchons à quelle relation doit satisfaire la fonction φ pour que l'arc AB de cette courbe soit minimum. La longueur de cet arc AB est

$$U = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du,$$

v étant remplacé dans la fonction sous le radical par $\varphi(u)$. En appliquant l'équation (8) du numéro précédent, on voit qu'une condition nécessaire pour que U soit minimum est qu'on ait

$$\frac{d\left(\dfrac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}}\right)}{du} - \frac{\dfrac{\partial E}{\partial v} + 2\dfrac{\partial F}{\partial v}v' + \dfrac{\partial G}{\partial v}v'^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} = 0.$$

En introduisant la différentielle ds de l'arc, qui est égale à $\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}\, du$, cette condition s'écrit

$$(9) \qquad \frac{2\, d\left(\dfrac{F\, du + G\, dv}{ds}\right)}{ds} - \left[\frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{du}{ds}\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) + \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right] = 0.$$

C'est l'une des conditions que nous avons obtenues (n° 477) pour qu'une ligne soit géodésique sur la surface. En intervertissant le rôle de u et v, on montrerait que cette ligne satisfait aussi à l'autre condition. Donc, *le plus court chemin d'un point à un autre sur une surface ne peut être qu'une ligne géodésique.*

Cela étant, supposons qu'on ait tracé sur la surface : 1° une famille de lignes géodésiques telles que par un point de la surface passe une ligne de cette famille et une seule; 2° une famille de courbes orthogonales aux premières. Rapportons la surface à ces deux familles prises comme courbes coordonnées : prenons comme courbes $v =$ const. les géodésiques, comme courbes $u =$ const. les courbes orthogonales. Cherchons la forme des fonctions E, F, G. On a d'abord

$$F = 0.$$

En second lieu, la ligne $v =$ const. doit satisfaire à l'équation (9). On reconnaît que cela exige

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0.$$

E se réduit donc à une fonction de u. Le carré de l'élément linéaire de l'arc est, par suite, de la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}(u)\,du^2 + \mathrm{G}(u, v)\,dv^2.$$

Prenons un nouveau paramètre tel que sa différentielle soit égale à $\sqrt{\mathrm{E}(u)}\,du$. On voit que ds^2 prend la forme

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}(u, v)\,dv^2,$$

et, pour une ligne géodésique, nous aurons

$$ds^2 = du^2.$$

La distance de deux points $\mathrm{A}(u_0, v_0)$, $\mathrm{B}(u_1, v_0)$ sur une géodésique est donc

$$|s_1 - s_0| = |u_1 - u_0|.$$

Considérons une autre courbe joignant les points A et B. La longueur de l'arc AB sur cette courbe est

$$\mathrm{L} = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + \mathrm{G}v'^2}\,du.$$

C'est l'intégrale de l'expression $\sqrt{1 + \mathrm{G}v'^2}$, qui est constamment supérieure à 1, c'est-à-dire à la dérivée de u. Donc la valeur absolue de L est supérieure à $|u_1 - u_0|$ et, par suite, à $|s_1 - s_0|$. *Les lignes géodésiques sont donc bien des courbes de longueur minimum,* tout au moins dans une région suffisamment petite.



CHAPITRE VII.

FONCTIONS ELLIPTIQUES.

I. — Produits infinis.

480. Considérons une suite de quantités réelles ou complexes u_1, u_2, ..., u_n, ... et formons le produit

$$P_n = u_1 u_2 \ldots u_n.$$

Si ce produit tend vers une limite finie P *quand n croît indéfiniment, on dit que le produit infini*

$$u_1 u_2 \ldots u_n \ldots$$

est convergent et a pour valeur cette valeur limite.

Soit, par exemple, une série convergente

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

dont la somme est s. Le produit

$$e^{a_1} e^{a_2} \ldots e^{a_n}$$

est égal à $e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$. Par suite, lorsque n grandit indéfiniment, il a pour limite e^s. Nous dirons que le produit infini de facteur général e^{a_n} est un produit infini convergent.

Comme pour les séries, on peut, dans l'étude de la convergence d'un produit infini, supprimer un nombre fini de termes au commencement du produit.

Remarquons que, si un facteur est nul, tous les produits à partir d'un certain rang sont nuls, leur limite est zéro.

481. Cela posé, considérons un produit infini de la forme

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \ldots.$$

Je dis qu'*un produit de cette forme, où les nombres* u_1, u_2, ...,

u_n, ... sont réels et positifs, est convergent ou non en même temps que la série de terme général u_n est convergente ou non.

En effet, supposons d'abord cette série divergente; la somme de ses n premiers termes tend vers $+\infty$ avec n. Or, on a

$$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) > 1 + u_1 + \ldots + u_n;$$

donc P_n tend vers $+\infty$.

Supposons maintenant que la série soit convergente. On a

$$e^{u_1} > 1 + u_1, \qquad e^{u_2} > 1 + u_2, \qquad \ldots, \qquad e^{u_n} > 1 + u_n,$$

d'où

$$e^{u_1+u_2+\ldots+u_n} > (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n).$$

Quand n grandit indéfiniment, le premier membre, par suite de la convergence de la série, tend vers une limite. Le second membre, qui est P_n, va en croissant et reste inférieur à cette limite; il a donc, lui aussi, une limite P.

Je dis que *cette limite est indépendante de l'ordre des facteurs du produit*, c'est-à-dire que si l'on opère un déplacement de termes dans la suite u_1, u_2, ..., u_n, ..., de façon à former une suite v_1, v_2, ..., v_n, ... composée des mêmes termes écrits dans un autre ordre, le produit

$$P'_n = (1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)$$

est convergent et a même limite que le premier. D'abord, il est convergent parce que la série

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

est convergente. Soit P' sa limite.

Fixons un nombre n, et prenons q assez grand pour que, parmi les q premiers termes v, se trouvent les n termes u_1, u_2, ..., u_n. Nous aurons, comme tous les facteurs sont supérieurs à 1,

$$P_n \leqq P'_q \leqq P'.$$

On en déduit, en faisant croître n indéfiniment,

$$P = \lim P_n \leqq P'.$$

On montrerait de même que l'on a $P' \leqq P$. En résumé, on a

$$P = P',$$

ce qui démontre la proposition.

482. Théorème général. — *Si $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont des nombres complexes formant une série absolument convergente, le produit*

$$(1 + u_1)\ldots(1 + u_n)\ldots$$

est convergent; il a une valeur différente de zéro, à moins que l'un des facteurs ne soit nul; cette valeur est indépendante de l'ordre des facteurs.

1° Gardons les notations précédentes, et posons, en outre,

$$u'_n = |u_n|$$

et

$$P'_n = (1 + u'_1)\ldots(1 + u'_n).$$

La série

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

étant par hypothèse convergente, le produit P'_n, qui rentre dans le cas du n° 481, est convergent : soit P' sa limite. Donnons-nous un nombre positif ε. En vertu du théorème de Cauchy sur les limites (t. I, p. 15) et du fait que P'_n tend vers P', il existe un entier p tel que, pour $n > p$, on a, quel que soit $h > 0$,

$$P'_{n+h} - P'_n < \varepsilon.$$

Formons, d'autre part, l'expression $P_{n+h} - P_n$:

$$P_{n+h} - P_n = (1 + u_1)\ldots(1 + u_n)[(1 + u_{n+1})\ldots(1 + u_{n+h}) - 1].$$

On voit que le second membre, si on le suppose développé, est une somme de termes dont chacun est le produit de certains facteurs u et est affecté d'un coefficient positif. L'expression $P'_{n+h} - P'_n$ diffère de la précédente en ce que chaque quantité u_n est remplacée par u'_n, de sorte que les termes de cette seconde expression sont égaux respectivement aux modules de ceux de la première. Il en résulte qu'on a

$$|P_{n+h} - P_n| \leqq P'_{n+h} - P'_n$$

et, par suite,

$$|P_{n+h} - P_n| < \varepsilon.$$

En résumé, à tout nombre positif ε correspond un entier p tel que l'on a, pour $n > p$ et $h > 0$,

$$|P_{n+h} - P_n| < \varepsilon.$$

Cela prouve, d'après le théorème de Cauchy (p. 4), que la quantité P_n a, pour n infini, une limite déterminée.

2° Je dis que, *si aucun facteur du produit n'est nul, cette limite P est différente de zéro.*

u_n tendant vers zéro, on a, pour n supérieur à un certain entier p,

$$|u_n| < 1.$$

Mettons de côté les termes pour lesquels cette inégalité n'a pas lieu, c'est-à-dire supprimons au commencement du produit les termes de rang inférieur ou égal à p, et supposons que parmi ces termes aucun ne soit nul. Tout revient à montrer que le produit infini commencé au $(p+1)^{\text{ieme}}$ terme a une limite différente de zéro, ou, en d'autres termes, qu'un produit infini dans lequel tous les u sont plus petits que 1 en module a une limite différente de zéro. On a en effet, dans ces conditions,

$$1 + u_n \neq 0.$$

L'inverse de cette quantité est un nombre fini que nous écrivons

$$1 - \frac{u_n}{1+u_n},$$

de sorte que nous avons

$$\frac{1}{P_n} = \left(1 - \frac{u_1}{1+u_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{u_n}{1+u_n}\right).$$

Je dis que ce produit $\frac{1}{P_n}$ a, pour n infini, une limite finie, c'est-à-dire que c'est un produit infini convergent. Posons

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n};$$

nous avons, comme u_n tend vers 0,

$$\lim \frac{v_n}{u_n} = 1.$$

Donc la série de terme général v_n est absolument convergente, comme la série des u_n. Par suite (1°), le produit $\frac{1}{P_n}$ est convergent; donc le produit P_n a une limite différente de zéro.

3° Montrons enfin que cette limite P est indépendante de l'ordre des facteurs.

Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ écrites

dans un autre ordre. Posons

$$Q_n = (1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n),$$
$$v'_n = |v_n|,$$
$$Q'_n = (1+v'_1)(1+v'_2)\dots(1+v'_n).$$

La série de terme général v_n étant absolument convergente, le produit Q_n est convergent; soit Q sa limite. D'autre part, P'_n et Q'_n (qui rentrent dans le cas du n° 481) ont des limites P′ et Q′ qui sont égales.

Donnons-nous un nombre positif ε; nous pouvons trouver un entier p tel que l'on ait, quel que soit $h > p$,

$$|P'_h - P'| < \varepsilon, \qquad |Q'_h - Q'| < \varepsilon.$$

h étant choisi plus grand que p, prenons un entier $h' > h$ assez grand pour que tous les facteurs $(1+u_1)$, ..., $(1+u_h)$ appartiennent au produit $Q_{h'}$. On reconnaît que dans ces conditions l'expression $Q_{h'} - P_h$ est une somme de termes dont chacun est le produit de certains facteurs u. On en déduit, comme plus haut (*cf.* 1°),

$$|Q_{h'} - P_h| \leqq |Q'_{h'} - P'_h| \leqq |Q'_{h'} - Q'| + |P'_h - P'|,$$

d'où

$$|Q_{h'} - P_h| < 2\varepsilon.$$

Quand h grandit indéfiniment, h' grandit aussi indéfiniment, $Q_{h'}$ et P_h tendent respectivement vers Q et P, et l'on a

$$|Q - P| < 2\varepsilon;$$

ε étant arbitraire, cela montre que l'on a

$$Q = P,$$

ce qui démontre la proposition.

On dit, dans ces conditions, que l'on a *un produit infini absolument convergent.*

483. Considérons maintenant un produit infini dans lequel *les facteurs sont fonctions d'une ou plusieurs variables réelles ou complexes.* Le produit infini constitue lui-même une fonction de ces variables. Posons, comme précédemment,

$$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\dots(1+u_n);$$

nous avons

$$P_{n+1} = P_n(1+u_{n+1}) = P_n + u_{n+1}P_n,$$

et, si le produit est convergent et a pour limite P, nous pouvons écrire

$$P = \lim P_n = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \ldots + (P_{n+1} - P_n) + \ldots,$$

ou, d'après la relation précédente,

$$P = 1 + u_1 + P_1 u_2 + P_2 u_3 + \ldots + P_n u_{n+1} + \ldots.$$

Nous avons dans le second membre de cette relation une série; nous dirons qu'*elle est équivalente au produit donné.*

Supposons que les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ forment une série *normalement convergente*, c'est-à-dire qu'il existe des nombres positifs $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$ formant une série convergente et tels que

$$|u_n| \leqq g_n$$

dans les domaines que l'on considère. Posons

$$G_n = (1 + g_1)(1 + g_2)\ldots(1 + g_n).$$

Le produit G_n rentre dans le cas du n° 481 et a une limite G quand n croît indéfiniment. D'autre part, de

$$|u_n| \leqq g_n$$

on déduit, d'après un raisonnement déjà fait,

$$|P_n| \leqq G_n.$$

Considérons alors la série numérique à termes positifs

$$1 + g_1 + G_1 g_2 + \ldots + G_n g_{n+1} + \ldots;$$

d'après les remarques faites, elle est convergente et a pour valeur G. La série

$$1 + u_1 + P_1 u_2 + \ldots + P_n u_{n+1} + \ldots$$

a ses termes respectivement inférieurs ou égaux en module aux termes de cette série; donc elle est normalement convergente. On en déduit les conséquences suivantes (n°s 235 et 238, p. 31 et 34) :

Si les u sont fonctions continues d'une ou plusieurs variables réelles dans un certain domaine relatif à ces variables où la série des u est normalement convergente, le produit P *est dans le même domaine une fonction continue des mêmes variables.*

Si les u sont fonctions holomorphes de variables complexes dans un certain système de domaines A, B, C, ... *où la série des u est normalement convergente, le produit* P *est une fonction holomorphe en tout point intérieur aux domaines* A, B, C, ...

484. *Dérivée logarithmique d'un produit infini.* — Soit

$$f(z) = (1+u_1)\dots(1+u_n)\dots$$

un produit infini, les u_n étant fonctions holomorphes d'une variable complexe z, et la série $\sum u_n$ étant normalement convergente dans un domaine D. Soit α_n la borne supérieure de $|u_n|$ dans D; α_n tend vers o quand n tend vers $+\infty$. Prenons un nombre ρ tel que $0<\rho<1$; quand n dépasse un certain entier p, on a $\alpha_n<\rho$. Posons

$$(1)\qquad f(z) = (1+u_1)\dots(1+u_p)\varphi(z),$$

$$(2)\qquad \varphi(z) = (1+u_{p+1})\dots(1+u_n)\dots.$$

D'autre part, en supposant $|u|<1$, désignons par $\operatorname{Log}(1+u)$ la détermination du logarithme qui s'annule avec u, et qui est représentée (n° 253, p. 53) par la série

$$\frac{u}{1}-\frac{u^2}{2}+\dots.$$

Cette série représente une fonction holomorphe dans tout le cercle $|u|\leqq\rho$, puisqu'on a $\rho<1$.

Le rapport de cette fonction à u est égal à la série

$$1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+\dots$$

qui, étant comme la précédente, holomorphe dans le cercle $|u|\leqq\rho$, reste dans ce cercle inférieure en module à un nombre fini M. On a donc, sous la condition $|u|\leqq\rho$,

$$|\operatorname{Log}(1+u)|\leqq M|u|$$

et par suite, pour $n>p$,

$$|\operatorname{Log}(1+u_n)|\leqq M\alpha_n.$$

On en déduit que la série

$$(3)\qquad \operatorname{Log}(1+u_{p+1})+\dots+\operatorname{Log}(1+u_n)+\dots$$

est normalement convergente dans D; elle représente donc une fonction holomorphe en tout point intérieur à D, soit $g(z)$; on déduit de (3)

$$e^{\operatorname{Log}(1+u_{p+1})}\times\dots\times e^{\operatorname{Log}(1+u_n)}\times\dots = e^{g(z)}$$

ce qui s'écrit

$$\varphi(z) = (1+u_{p+1})\dots(1+u_n)\dots = e^{g(z)}.$$

Par conséquent, $g(z)$ est, pour chaque valeur de z, égale à une détermination de $\operatorname{Log}\varphi(z)$.

La série (3), étant normalement convergente dans D, peut être dérivée terme à terme, en tout point intérieur à D (n° 238, p. 36); en outre, si D_1 est formé des points de D dont la distance à la frontière de D surpasse un nombre positif r, la série dérivée est normalement convergente dans D_1. En formant cette série et remarquant que la dérivée de toute détermination de $\operatorname{Log}\varphi(z)$ est $\frac{\varphi'}{\varphi}$, on obtient

$$(4)\qquad \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{u'_{p+1}}{1+u_{p+1}} + \ldots + \frac{u'_n}{1+u_n} + \ldots.$$

Chacune des p fonctions $(1+u_1), \ldots, (1+u_p)$, étant holomorphe, a, dans un domaine borné, un nombre *fini* de zéros (n° 269, p. 67).

Soit A un point intérieur à D et pour lequel $f(z)$ est différent de 0; aucun des facteurs précédents n'est nul en A. Nous pouvons prendre un domaine borné Δ auquel A soit intérieur, ne contenant aucun zéro de $f(z)$, et contenu dans une région telle que D_1 obtenue par le procédé rappelé.

Chacune des fonctions $\frac{1}{1+u_1}, \ldots, \frac{1}{1+u_p}$ est holomorphe en tout point de Δ, donc reste bornée en module dans Δ qui est fermé et borné; il en est de même de $u'_1, u'_2, \ldots, u'_p$, de sorte que les p fonctions $\frac{u'_1}{1+u_1}, \ldots, \frac{u'_p}{1+u_p}$ sont bornées en module dans Δ. Cela étant, par dérivation logarithmique de (1), et en tenant compte de (4), on obtient

$$(5)\qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{u'_1}{1+u_1} + \ldots + \frac{u'_n}{1+u_n} + \ldots.$$

Cette formule est établie pour tout point A *qui n'annule pas* $f(z)$, et la série du second membre est normalement convergente dans tout domaine tel que Δ (par exemple, il y a certainement un cercle de centre A dans lequel la convergence normale est réalisée); par suite, *on peut effectuer la dérivation logarithmique du produit* $f(z)$, *et dériver indéfiniment la formule obtenue, le résultat restant toujours valable pour tout point autre qu'un zéro de* $f(z)$.

485. Comme application, partons de la formule (p. 76)

$$\cot z = \frac{1}{z} + \frac{2z}{z^2-\pi^2} + \ldots + \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2} + \ldots,$$

valable quand z n'est pas multiple de π.

Les termes de cette série sont les dérivées logarithmiques des expressions

$$z, \quad 1-\frac{z^2}{\pi^2}, \quad \ldots, \quad 1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}, \quad \ldots.$$

Formons alors le produit

$$(1) \qquad z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots.$$

La série $\sum \frac{z^2}{n^2\pi^2}$ est normalement convergente dans tout domaine borné; par suite, le produit considéré représente une fonction $f(z)$ holomorphe dans tout domaine borné, par suite dans tout le plan, autrement dit une fonction entière. Par application du n° 484, on peut opérer la dérivation logarithmique de cette série, ce qui donne

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \sum \frac{2z}{z^2-n^2\pi^2} = \cot z.$$

Mais la fonction $\sin z$ a aussi pour dérivée logarithmique $\cot z$; on en déduit que le rapport $\frac{\sin z}{f(z)}$ est égal à une constante A. Pour déterminer A, donnons à z une suite de valeurs tendant vers 0; on reconnaît, d'après (1), que $\frac{f(z)}{z}$ tend vers 1 comme $\frac{\sin z}{z}$; donc $A = 1$. En résumé, on a

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots.$$

On peut, en partant de là, obtenir un développement en produit infini de $\cos z$. On a, en effet,

$$\cos z = \frac{\sin 2z}{2\sin z}$$

et

$$\sin 2z = 2z\left(1-\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4z^2}{m^2\pi^2}\right)\cdots.$$

En portant cette valeur ainsi que celle de $\sin z$ dans la relation précédente et en remarquant, une fois le facteur $2z$ supprimé, que les termes du dénominateur sont les termes de rang pair du numérateur, il vient

$$\cos z = \left(1-\frac{z^2}{\frac{\pi^2}{4}}\right)\cdots\left(1-\frac{z^2}{(2m+1)^2\frac{\pi^2}{4}}\right)\cdots.$$

Remarquons que l'on retrouve bien ainsi, en annulant les différents

facteurs du produit, les zéros de $\cos z$, de même que le développement de $\sin z$ met en évidence les zéros de $\sin z$.

486. Il y a lieu de remarquer que, dans le développement de $\sin z$, chaque terme, sauf le facteur z, peut être décomposé en un produit de deux facteurs du premier degré; mais le produit infini

$$z\left(1-\frac{z}{\pi}\right)\left(1+\frac{z}{\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)\left(1+\frac{z}{m\pi}\right)\cdots$$

que l'on obtient ainsi ne satisfait pas aux conditions de convergence. En effet, les quantités u correspondantes ne forment pas une série convergente. Mais je dis qu'on peut écrire

$$\sin z = z\prod\left[\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}\right]\left[\left(1+\frac{z}{m\pi}\right)e^{-\frac{z}{m\pi}}\right],$$

en considérant comme facteur du produit $\prod$ chaque expression

$$\left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}$$

pour $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Pour montrer que ce produit infini est convergent, posons

$$1+U_m = \left(1-\frac{z}{m\pi}\right)e^{\frac{z}{m\pi}}.$$

U_m tend vers 0 avec $\frac{z}{m}$. Évaluons l'ordre de grandeur de U_m par rapport à $\frac{z}{m}$ quand $\frac{z}{m}$ tend vers 0; cela revient à évaluer l'ordre de grandeur de $\operatorname{Log}(1+U_m)$ (en désignant ainsi la détermination du Log qui s'annule avec U_m). Or, nous avons

$$\operatorname{Log}(1+U_m) = \frac{z}{m\pi} + \operatorname{Log}\left(1-\frac{z}{m\pi}\right) = \frac{z}{mz} - \left[\frac{z}{m\pi} + \frac{z^2}{2m^2\pi^2} + \ldots\right],$$

$$\operatorname{Log}(1+U_m) = -\frac{z^2}{2m^2\pi^2} - \ldots.$$

U_m est donc comparable à $\frac{z^2}{m^2}$, en entendant par là que le rapport de U_m à $\frac{z^2}{m^2}$ tend vers un nombre fini quand m tend vers $\pm\infty$, par suite, la série de terme général U_m ($m = \pm 1, \pm 2, \ldots$) est normalement convergente dans tout domaine borné. On en conclut (n° 483) que $\prod(1+U_m)$ est holomorphe dans tout domaine borné, et, par suite, dans tout le plan.

D'ailleurs ce produit est évidemment équivalent au produit qui représente $\sin z$, car si l'on groupe les termes comme il est indiqué, en prenant deux valeurs de m égales et de signes contraires, le produit de ces deux facteurs est égal au terme général du produit $\sin z$.

En résumé, on peut écrire

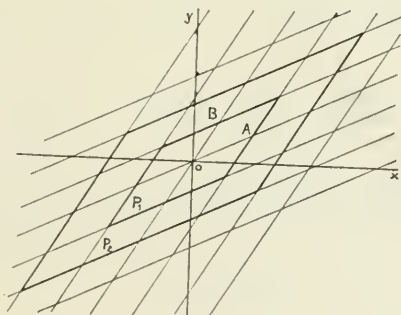
$$\sin z = z \prod \left[\left(1 - \frac{z}{m\pi} \right) e^{\frac{z}{m\pi}} \right] \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette fonction $\sin z$ et, d'une façon générale, toutes les fonctions trigonométriques, les fonctions exponentielles sont des fonctions à une période. Nous nous proposons, dans ce qui suit, de définir des fonctions analytiques de z à deux périodes.

II. — Définition de σu, ζu, pu.

487. Soient a et b deux nombres complexes dont le rapport est non réel. Ils sont représentés dans le plan par deux points A et B non en ligne droite avec O. Considérons les nombres de la forme $ma + nb$, où m et n prennent tous les couples de valeurs entières. Leurs points représentatifs sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes construit sur OA, OB (*fig.* 44).

Fig. 44.



Cela posé, étudions la série à termes positifs

$$\sum{}' \frac{1}{|ma + nb|^{\lambda}},$$

λ étant un nombre positif et $\sum'$ indiquant la somme des termes

obtenus en donnant à m et n tous les couples de valeurs entières possibles, sauf le couple $m = n = 0$, l'accent étant mis pour rappeler cette exclusion.

Je dis que, *si λ est plus grand que 2, cette série est convergente.* En effet, groupons les points $ma + nb$ de la façon suivante. Prenons d'abord le parallélogramme P_1 de centre O, tel que A et B soient milieux de côtés pour ce parallélogramme. Il y a sur P_1 huit points qui sont sommets du réseau. De plus, on voit que l'on obtiendra tous les sommets du réseau en prenant successivement tous les parallélogrammes $P_1, P_2, \ldots, P_h, \ldots$, P_h étant homothétique de P_1 par rapport à O, le rapport d'homothétie étant h (*fig.* 44).

Soit ρ un nombre positif tel que le cercle de centre O et de rayon ρ soit intérieur à P_1. Les huit sommets situés sur P_1 ont des modules supérieurs à ρ, de sorte que, pour chacun de ces huit sommets, nous avons

$$\frac{1}{|ma + nb|^\lambda} < \frac{1}{\rho^\lambda}.$$

P_2 contient 2.8 sommets, et le module de chaque terme correspondant de la série est plus petit que $\frac{1}{(2\rho)^\lambda}$. D'une façon générale, P_h contient $8h$ sommets, et le module de chaque terme correspondant de la série est plus petit que $\frac{1}{(h\rho)^\lambda}$. Il en résulte que l'on a

$$\sum{}' \frac{1}{|ma + nb|^\lambda} < 8\left(\frac{1}{\rho}\right)^\lambda + 2.8\left(\frac{1}{2\rho}\right)^\lambda + \ldots + h.8\left(\frac{1}{h\rho}\right)^\lambda + \ldots,$$

d'où

$$\sum{}' \frac{1}{|ma + nb|^\lambda} < \frac{8}{\rho^\lambda}\left(1 + \frac{1}{2^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{1}{h^{\lambda-1}} + \ldots\right).$$

Si $\lambda > 2$, $\lambda - 1$ est supérieur à 1 et la quantité entre crochets est une série convergente. Par conséquent, la série de terme général $\frac{1}{|ma + nb|^\lambda}$ est convergente si $\lambda > 2$ (les termes de cette série peuvent être écrits dans un ordre quelconque).

488. Remplaçons dans ce qui précède a par 2ω et b par $2\omega'$. On pose

$$\sigma u = u \prod{}' \left[\left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}}\right],$$

σu étant mis pour $\sigma(u)$, $\prod'$ désignant le produit infini des facteurs

obtenus en faisant $s = 2m\omega + 2n\omega'$, m et n prenant tous les couples de valeurs entières sauf le couple $m = n = 0$.

Nous allons d'abord montrer que $\prod'$ est convergent. Désignons le facteur général de ce produit par $1 + U$; on a

$$1 + U = \left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2}}.$$

U est une fonction entière de $\frac{u}{s}$. Formons $\text{Log}(1 + U)$, qui est, comme l'on sait, comparable à U; nous avons

$$\text{Log}(1 + U) = \frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2} - \left(\frac{u}{s} + \frac{u^2}{2s^2} + \frac{u^3}{3s^3} + \ldots\right),$$

$$\text{Log}(1 + U) = -\left(\frac{u^3}{3s^3} + \ldots\right).$$

La détermination de $\text{Log}(1 + U)$ qui s'annule avec U est donc une fonction analytique dont le développement en série commence par un terme du troisième degré en $\frac{u}{s}$; il en est donc de même pour U.

Soit $R > 0$. Astreignons-nous d'abord à prendre u dans le cercle $C : |u| \leqq R$; soit ρ un nombre positif inférieur aux modules de tous les nombres s autres que zéro; on a, dans ces conditions,

$$\left|\frac{u}{s}\right| \leqq \frac{R}{\rho}.$$

On peut, d'autre part, écrire

$$U = \frac{u^3}{s^3}\left[A + B\frac{u}{s} + \ldots\right],$$

la série entre crochets étant fonction entière de $\frac{u}{s}$. Comme $\frac{u}{s}$ reste borné, cette série reste bornée; soit M une limite supérieure de son module. On a ainsi

$$|U| \leqq \frac{MR^3}{|s|^3}.$$

La série $\sum' \frac{1}{|s^3|}$ (les termes de cette série étant écrits dans un ordre quelconque) est convergente (n° 487); on déduit de là que la série $\sum' U$, qui a ses termes au plus égaux en module à ceux d'une série à termes positifs convergente, est normalement convergente dans C; donc le produit $\prod'(1 + U)$ représente (n° 483) une fonc-

tion holomorphe dans tout cercle C′ intérieur à C. Comme le rayon R de C est arbitraire, le produit $\prod'(1+U)$ est holomorphe dans tout le plan.

D'après cela, *σu est une fonction entière de u*. Elle ne s'annule que si l'un des facteurs est nul (n° 482). Or, le facteur général s'annule pour $u=s$, le premier pour $u=0$; *les zéros de σu sont donc les sommets du réseau des points s, chacun d'eux est zéro simple.*

La fonction σu est impaire. En effet, le produit $\prod'$ est une fonction paire, car on peut grouper ses facteurs deux à deux en mettant dans un même groupe les facteurs correspondant à deux nombres s opposés. Si l'on change u en $-u$, chacun de ces facteurs se change en l'autre et, par suite, $\prod'$ ne change pas, σu étant égal au produit d'une fonction paire par le facteur u est une fonction impaire; on écrit

$$\sigma(-u) = -\sigma u.$$

489. Par application du principe du n° 484, on peut effectuer la dérivation logarithmique de la formule qui définit σu, puis ensuite dériver indéfiniment la formule obtenue, les résultats étant valables en tout point autre qu'un point s. On pose

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2}\right),$$

$$p u = -\zeta' u = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left[\frac{1}{(u-s)^2} - \frac{1}{s^2}\right],$$

$$p' u = -\frac{2}{u^3} + \sum{}'\frac{-2}{(u-s)^3}.$$

σu étant impaire, $\sigma' u$ est paire; donc ζu, $p' u$ sont impaires, pu est paire. Les seuls points singuliers de ces fonctions sont les points s; soit s_0 l'un d'eux. On a, s_0 étant zéro simple de σu,

$$\sigma u = \left(1 - \frac{u}{s_0}\right) g(u) \qquad [g(s_0) \neq 0];$$

on en déduit

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u - s_0} + \frac{g'}{g}.$$

Donc ζu admet s_0 comme pôle simple, avec résidu 1. Par dérivation, on voit que pu admet le même point comme pôle double, la partie principale étant $\frac{1}{(u-s_0)^2}$.

490. Considérons la formule

$$p'u = -\frac{2}{u^3} + \sum' \frac{-2}{(u-s)^3},$$

le signe $\sum'$ étant étendu à tous les points s, sauf l'origine. On peut encore écrire

$$p'u = \sum \frac{-2}{(u-s)^3},$$

le signe $\sum$ étant étendu à tous les sommets du réseau sans exception.

Sous cette forme, on reconnaît que $p'u$ est une fonction doublement périodique ayant pour périodes 2ω et $2\omega'$. En effet, augmentons u de 2ω par exemple; l'ensemble des expressions $(u-s)$ est identique à l'ensemble des expressions $(u+2\omega-s)$, car le terme $(u-s_0)$ du premier ensemble est égal au terme $[u+2\omega-(s_0+2\omega)]$ du second.

Donc $p'u$ ne change pas quand on augmente u de 2ω. De même, on reconnaît que $p'u$ admet la période $2\omega'$, de sorte que l'on a, m et n étant deux entiers quelconques,

$$p'(u+2m\omega+2n\omega') = p'u.$$

En particulier, on a

$$p'(u+2\omega) = p'u,$$

d'où, en intégrant,

$$p(u+2\omega) = pu + \text{const}.$$

Pour déterminer la constante, faisons $u=-\omega$, ce qui est légitime, ce point n'étant pas sommet du réseau; il vient

$$p\omega = p(-\omega) + \text{const}.,$$

et, comme pu est une fonction paire, on déduit de là que la constante doit être nulle. On a donc

$$p(u+2\omega) = pu,$$

ce qui montre que pu admet comme période 2ω. On verrait de même que $2\omega'$ est aussi période.

En résumé, nous voyons qu'*il existe des fonctions analytiques uniformes doublement périodiques*, à savoir la fonction pu et toutes ses dérivées. Toute fonction uniforme, en particulier toute fonction rationnelle, de pu et de ses dérivées, possède la même propriété.

III. — Théorèmes généraux sur les fonctions elliptiques.

491. Considérons, d'une façon générale, une fonction admettant pour périodes les nombres 2ω, $2\omega'$, dont le rapport est non réel. Formons comme précédemment le réseau de parallélogrammes dont les sommets sont les différents nombres $2m\omega + 2n\omega'$. Nous dirons que deux nombres complexes z, z' sont *congrus*, ou que les deux points correspondants sont *homologues*, par rapport à ce système de périodes, si la différence $z'-z$ est égale à une combinaison linéaire des périodes : on écrit alors

$$z' \equiv z \pmod{2\omega, 2\omega'}.$$

Les points homologues d'un point quelconque A sont tous les sommets d'un réseau de parallélogrammes obtenu en faisant subir au premier réseau une translation égale au vecteur OA. Remarquons aussi qu'étant donné un parallélogramme quelconque de périodes, par exemple celui qui a pour sommets les points 0, 2ω, $2\omega'$, $2\omega + 2\omega'$, tout point a un homologue dans ce parallélogramme.

492. Posons

$$\omega_1 = \lambda\omega + \mu\omega', \tag{1}$$

λ et μ étant deux entiers positifs ou négatifs. Il est évident qu'une fonction qui admet comme périodes 2ω et $2\omega'$ admet aussi comme période $2\omega_1$.

Supposons maintenant λ et μ premiers entre eux ; on peut trouver (en faisant les opérations du plus grand commun diviseur) deux entiers λ' et μ' tels que

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1.$$

Posons, dans ces conditions,

$$\omega'_1 = \lambda'\omega + \mu'\omega'. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) peuvent être résolues par rapport à ω et ω' ; les valeurs que l'on en tire sont de la forme

$$\omega = \lambda_1\omega_1 + \mu_1\omega'_1, \qquad \omega' = \lambda'_1\omega_1 + \mu'_1\omega'_1,$$

λ_1, μ_1, λ'_1, μ'_1 étant des *entiers*. On reconnaît, d'après cela, que toute combinaison linéaire de 2ω et $2\omega'$ est combinaison linéaire de $2\omega_1$,

$2\omega'_1$, et réciproquement. On dit que *le système de périodes* 2ω, $2\omega'$ *est équivalent au système de périodes* $2\omega_1$, $2\omega'_1$. En remplaçant l'un des systèmes par l'autre, on obtient les mêmes sommets de réseaux.

Soit R l'ensemble des points s obtenus en partant d'un système de périodes 2ω, $2\omega'$; on dit que ce système de périodes est *primitif* pour une fonction si cette fonction admet ces périodes et n'admet pas de système de périodes tel que le réseau correspondant à ces nouvelles périodes comprendrait d'autres sommets que ceux de R.

493. On appelle *fonction elliptique* une fonction méromorphe doublement périodique. Par exemple, pu et toutes ses dérivées sont des fonctions elliptiques.

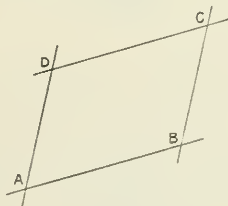
Par définition, une fonction elliptique n'a pas d'autres points singuliers que des pôles, qui sont d'ailleurs, comme pour toute fonction méromorphe, en nombre fini dans toute région limitée.

494. *Une fonction elliptique entière est nécessairement constante.* En effet, le module d'une fonction entière considérée dans un domaine borné est borné. Donc le module d'une fonction elliptique entière est borné dans un parallélogramme de périodes. Par suite de la double périodicité de la fonction, il reste donc borné dans tout le plan. D'après le théorème de Liouville (n° 265), une fonction qui possède cette propriété se réduit à une constante.

Une fonction elliptique qui ne se réduit pas à une constante a donc des pôles.

495. *Dans un parallélogramme de périodes, la somme des résidus d'une fonction elliptique $f(u)$ est nulle.*

Fig. 45.



Remarquons d'abord que nous pouvons toujours prendre un parallélogramme de périodes ne contenant aucun pôle sur son contour, en effectuant au besoin une translation. Soit ABCD un tel parallélo-

gramme (*fig.* 45), AB étant un vecteur équipollent au vecteur 2ω, AD au vecteur $2\omega'$.

Nous avons (*théorème des résidus*, n° 274)

$$\int_{ABCD} f(u)\,du = 2i\pi \sum R,$$

$\sum R$ représentant la somme des résidus relatifs aux pôles de f contenus dans ABCD. D'autre part, considérons dans l'intégrale les deux parties

$$\int_{AB} f(u)\,du - \int_{DC} f(u)\,du.$$

Posons, quand u décrit DC,

$$u = u_1 + 2\omega'.$$

Quand le point u décrit le côté DC, u_1 décrit AB, et l'on a, à cause de la périodicité de f,

$$\int_{DC} f(u)\,du = \int_{AB} f(u_1)\,du_1 = \int_{AB} f(u)\,du,$$

d'où

$$\int_{AB} f(u)\,du - \int_{DC} f(u)\,du = 0.$$

On reconnaît de même que l'on a

$$\int_{AD} f(u)\,du - \int_{BC} f(u)\,du = 0,$$

d'où

$$\int_{ABCD} f(u)\,du = 0$$

et, par suite,

$$\sum R = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Il résulte de là qu'*il ne peut exister de fonction elliptique ayant dans un parallélogramme de périodes un pôle simple unique*. En effet, pour un pôle simple le résidu est différent de zéro; d'ailleurs, le pôle étant unique, la somme $\sum R$ se réduirait à ce résidu et ne pourrait être nulle.

496. *Dans un parallélogramme de périodes relatif à la fonc-*

tion $f(u)$, le nombre des zéros de cette fonction est égal au nombre de ses pôles, chacun d'eux étant compté avec son ordre de multiplicité.

Remarquons d'abord que les zéros sont en nombre fini, car ce sont les pôles de $\frac{1}{f(u)}$ qui est une fonction elliptique. Prenons un parallélogramme de périodes ABCD ne contenant ni pôle ni zéro sur son contour.

D'après le numéro précédent, comme $\frac{f'(u)}{f(u)}$ est une fonction elliptique aux mêmes périodes que f, la somme de ses résidus dans le parallélogramme ABCD est nulle. D'autre part, cette somme est égale (n° 276, p. 71) à $\sum p - \sum q$, $\sum p$ étant le nombre des zéros de f dans le parallélogramme ABCD, $\sum q$ le nombre de ses pôles. On a donc

$$\sum p = \sum q.$$

On en déduit la conséquence suivante :

Considérons la fonction $f(u) - C$, C étant une constante. Elle a les mêmes pôles et les mêmes périodes que f. Donc elle a dans un parallélogramme de périodes un nombre de zéros égal au nombre de pôles de $f(u)$. Donc *une fonction elliptique prend dans chaque parallélogramme de périodes toute valeur finie ou infinie le même nombre de fois*. Pour appliquer ce théorème, on aura soin de prendre un parallélogramme sur le contour duquel $f(u)$ ne prend pas la valeur C.

497. *Dans un parallélogramme de périodes relatif à une fonction elliptique $f(u)$, la somme des zéros diffère de la somme des pôles d'une combinaison linéaire des périodes.*

Considérons le parallélogramme de périodes ABCD, et prenons l'intégrale

$$\int_{\text{ABCD}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = \int_{\text{AB}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du - \int_{\text{DC}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du + \int_{\text{BC}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du - \int_{\text{AD}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du.$$

Posons, sur DC,

$$u = u_1 + 2\omega';$$

quand le point u parcourt DC, le point u_1 parcourt AB, et nous avons

$$\int_{DC} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = \int_{AB} (u_1 + 2\omega') \frac{f'(u_1)}{f(u_1)} du_1,$$

d'où, en mettant dans la seconde intégrale u au lieu de u_1,

$$\int_{DC} \frac{u f'(u)}{f(u)} du - \int_{AB} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = 2\omega' \int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)} du,$$

et, de même,

$$\int_{BC} \frac{u f'(u)}{f(u)} du - \int_{AD} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = 2\omega \int_{AD} \frac{f'(u)}{f(u)} du.$$

Pour évaluer $\int_{AB} \frac{f'(u)}{f(u)} du$, par exemple, remarquons que, en A et B, $f(u)$ a la même valeur; la fonction primitive de $\frac{f'}{f}$, qui est une détermination de $\operatorname{Log} f(u)$, augmente, quand u va de A en B, d'un multiple de $2i\pi$; il en est de même pour $\int_{AD} \frac{f'(u)}{f(u)} du$. En revenant à l'intégrale $\int_{ABCD} \frac{u f'(u)}{f(u)} du$, on voit que l'on a

$$\int_{ABCD} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = 2i\pi(2m\omega + 2n\omega'),$$

m et n étant des nombres entiers.

Évaluons, d'autre part, cette intégrale, par application du théorème des résidus. La fonction $\frac{u f'(u)}{f(u)}$ a pour points singuliers les zéros et les pôles de f; en un point a qui est pôle ou zéro pour f, posons

$$f = (u-a)^h \varphi(u),$$

$\varphi(a)$ étant fini et différent de zéro; on en déduit

$$\frac{f'}{f} = \frac{h}{u-a} + \frac{\varphi'}{\varphi},$$

$\frac{\varphi'}{\varphi}$ étant régulière au point a. On déduit de là

$$\frac{uf'}{f} = \frac{uh}{u-a} + u\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{ah}{u-a} + h + u\frac{\varphi'}{\varphi},$$

ce qui montre que a est pôle simple pour la fonction $\frac{uf'}{f}$, le résidu correspondant étant ah. En prenant le parallélogramme de pé-

riodes ABCD de façon qu'il ne contienne aucun pôle ou zéro de f sur son contour, on voit que l'on a

$$\int_{\text{ABCD}} \frac{u f'(u)}{f(u)} du = 2 i \pi \sum a h,$$

$\sum ah$ étant la somme des zéros diminuée de la somme des pôles. En comparant les deux valeurs obtenues pour l'intégrale, on a

$$\sum ah = 2 m \omega + 2 n \omega',$$

ce qui démontre le théorème. On dit encore que *la somme des zéros est congrue à la somme des pôles* (mod. 2ω, $2\omega'$).

498. *Si deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes ont les mêmes pôles et même partie principale pour chaque pôle, elles ne diffèrent que par une constante.*

Soient, en effet, $f(u)$ et $\varphi(u)$ deux fonctions remplissant ces conditions, a un pôle d'ordre h pour ces deux fonctions. Écrivons, en mettant en évidence les parties principales en ce point,

$$f(u) = \frac{\text{A}}{(u-a)^h} + \frac{\text{A}_1}{(u-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{\text{A}_{h-1}}{u-a} + f_1(u),$$
$$\varphi(u) = \frac{\text{A}}{(u-a)^h} + \frac{\text{A}_1}{(u-a)^{h-1}} + \ldots + \frac{\text{A}_{h-1}}{u-a} + \varphi_1(u),$$

f_1 et φ_1 étant deux fonctions régulières en a. On voit que $f-\varphi$, qui est une fonction elliptique aux mêmes périodes que f et φ, est régulière en a. Comme $f-\varphi$ ne peut avoir d'autres pôles que ceux de f et de φ, et qu'elle est régulière en chacun de ces points, $f-\varphi$ se réduit à une constante (n° 494).

499. *Si deux fonctions elliptiques aux mêmes périodes ont les mêmes pôles et les mêmes zéros avec le même ordre de multiplicité, leur rapport est constant.*

En effet, le rapport de ces deux fonctions a une valeur finie et différente de zéro en chaque zéro et en chaque pôle. Comme il ne peut avoir d'autres points singuliers que ces zéros ou ces pôles, il se réduit à une constante.

Il résulte de là qu'*une fonction elliptique est déterminée, à un facteur constant près, par ses pôles et ses zéros, chacun étant donné avec son ordre de multiplicité.*

IV. — Propriétés des fonctions σ, ζ, p.

500. La fonction ζu a, en O, un pôle simple de résidu 1, et l'on a (n° 489, p. 294)

$$\zeta u - \frac{1}{u} = \sum{}' \left(\frac{1}{u-s} + \frac{1}{s} + \frac{u}{s^2} \right) = -\sum{}' \left(\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s} - \frac{u}{s^2} \right).$$

La fonction $\zeta u - \frac{1}{u}$ est holomorphe dans tout cercle C de centre O ne contenant pas de point s autre que O; elle est donc, dans C, développable en une série entière. Écrivons donc

$$-\sum{}' \left(\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s} - \frac{u}{s^2} \right) = A_0 + A_1 u + \ldots + A_n u^n + \ldots.$$

La série $\sum{}'$ du premier membre est normalement convergente dans C et peut être dérivée indéfiniment par rapport à u (n°s 484, 489); on a ainsi, pour $n \geqq 2$,

$$\frac{d^n \sum{}' \left(\frac{1}{s-u} - \frac{1}{s} - \frac{u}{s^2} \right)}{du^n} = \sum{}' \frac{n!}{(s-u)^{n+1}}.$$

En faisant $u = 0$ dans cette relation, on a

$$n!\, A_n = -\left(\frac{d^n \sum{}'}{du^n} \right)_0 = -n! \sum{}' \frac{1}{s^{n+1}};$$

donc

$$A_n = -\sum{}' \frac{1}{s^{n+1}}.$$

Pour $u = 0$, la somme $\sum{}'$ et sa dérivée première $\sum{}' \left[\frac{1}{(s-u)^2} - \frac{1}{s^2} \right]$ sont nulles; donc $A_0 = A_1 = 0$. Enfin les sommes $\sum{}' \frac{1}{s^3}, \sum{}' \frac{1}{s^5}, \ldots$ d'exposant impair sont nulles, parce que le réseau des s est symétrique par rapport à O. Nous avons donc, en posant $c_k = \sum{}' \frac{1}{s^{2k}}$,

$$\zeta u = \frac{1}{u} - c_2 u^3 - c_3 u^5 - c_4 u^7 - \ldots.$$

501. Nous pouvons, d'après la théorie des fonctions analytiques,

dériver cette série terme à terme; nous obtenons ainsi, en changeant tous les signes

$$\text{p}u = \frac{1}{u^2} + 3c_2u^2 + 5c_3u^4 + 7c_4u^6 + \ldots,$$

ce développement étant valable dans le cercle C. En dérivant de nouveau, on a successivement

$$\text{p}'u = -\frac{2}{u^3} + 6c_2u + 20c_3u^3 + 42c_4u^5 + \ldots,$$

$$\text{p}''u = \frac{6}{u^4} + 6c_2 + 60c_3u^2 + 210c_4u^4 + \ldots.$$

Tout polynome par rapport à $\text{p}u$ et $\text{p}'u$ est une fonction elliptique aux mêmes périodes que $\text{p}u$ et ne peut avoir d'autres points singuliers que ceux de $\text{p}u$. Nous allons chercher à former un polynome en $\text{p}u$ et $\text{p}'u$ qui soit régulier en O. Écrivons

$$\text{p}u = \frac{1}{u^2}(1 + 3c_2u^4 + 5c_3u^6 + \ldots),$$

$$\text{p}'u = -\frac{2}{u^3}(1 - 3c_2u^4 - 10c_3u^6 - \ldots).$$

Nous sommes conduits à former $\text{p}'^2u - 4\text{p}^3u$:

$$\text{p}'^2u - 4\text{p}^3u = \frac{4}{u^6}[(1 - 3c_2u^4 - 10c_3u^6 - \ldots)^2 - (1 + 3c_2u^4 + 5c_3u^6 + \ldots)^3].$$

Les premiers termes de l'expression entre crochets sont de degré 4 par rapport à u, et l'on reconnaît que l'on a

$$\text{p}'^2u - 4\text{p}^3u = -\frac{60c_2}{u^2} - 140c_3 + \ldots,$$

les termes qui suivent le terme $140c_3$ étant égaux au produit de u^2 par une série entière en u. En comparant cette expression avec le développement de $\text{p}u$, nous sommes conduits, pour avoir une expression entière en u, à former

$$\text{p}'^2u - 4\text{p}^3u + 60c_2\,\text{p}u + 140c_3.$$

Ce polynome en $\text{p}u$ et $\text{p}'u$ est une fonction elliptique de u; dans C, il est égal au produit de u^2 par une série entière en u; il s'annule pour $u = 0$. Nous pouvons trouver un parallélogramme de périodes ayant pour centre l'origine et dans lequel il ne peut avoir d'autre pôle que o. Comme ce point n'est pas pôle, la fonction n'a

aucun pôle et se réduit, par suite, à une constante. Comme au voisinage de l'origine le développement est applicable et que pour $u = 0$ la fonction est nulle, il en résulte qu'elle est constamment nulle. *pu satisfait donc à la relation suivante :*

$$p'^2 u = 4p^3 u - 60 c_2\, p u - 140 c_3,$$

ou, en posant

$$g_2 = 60 c_2 = 60 \sum{}' \frac{1}{s^4}, \qquad g_3 = 140 c_3 = 140 \sum{}' \frac{1}{s^6},$$

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2\, p u - g_3. \tag{1}$$

Les nombres g_2 et g_3 sont dits les *invariants* de la fonction pu.

502. En dérivant cette relation, on en déduit successivement

$$\left\{\begin{aligned} p'' u &= 6p^2 u - \frac{g_2}{2},\\ p''' u &= 12 p u\, p' u,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right. \tag{2}$$

L'une quelconque des dérivées de pu s'exprime donc au moyen d'un polynome en pu et $p'u$.

On a obtenu (n° 501)

$$p u = \frac{1}{u^2} + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1) c_n u^{2n-2},$$

$$p'' u = \frac{6}{u^4} + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1)(2n-2)(2n-3) c_n u^{2n-4}.$$

En portant ces expressions dans la première relation (2), on obtient l'identité en u

$$\left[6 + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1)(2n-2)(2n-3) c_n u^{2n}\right]$$
$$= 6\left[1 + \sum_{n=2,3,\ldots} (2n-1) c_n u^{2n}\right]^2 - \frac{g_2}{2} u^4.$$

En égalant les coefficients de u^4 et u^6, on a des identités. En égalant les coefficients de u^{2n} ($n \geqq 4$), on a une égalité de la forme

$$(2n-1)(2n-2)(2n-3) c_n = 6[2(2n-1) c_n + \alpha c_2 c_{n-2} + \beta c_3 c_{n-3} + \ldots],$$

α, β, ... étant numériques. On tire de là une formule de la forme

$$c_n = A c_2 c_{n-2} + B c_3 c_{n-3} + C c_4 c_{n-4} + \ldots,$$

A, B, ... étant des nombres variables avec n.

Ainsi chaque coefficient c_n, à partir de c_4, s'exprime en fonction de $c_2, c_3, \ldots, c_{n-2}$.

Il en résulte que *tous ces coefficients s'expriment en fonction de c_2 et c_3, c'est-à-dire des invariants g_2 et g_3*. En d'autres termes, les sommes $\sum' \frac{1}{s^{2n}}$ s'expriment en fonction de $\sum' \frac{1}{s^4}$ et $\sum' \frac{1}{s^6}$.

503. *Homogénéité.* — Si l'on multiplie ω, ω' et u par un facteur μ, on reconnaît que tous les facteurs de σu restent invariables, sauf le facteur u ; σu est donc multiplié par μ ; de même ζu est multiplié par $\frac{1}{\mu}$, pu par $\frac{1}{\mu^2}$.

Remarquons, d'autre part, que g_2, g_3 sont, par rapport à ω, ω', homogènes et de degrés respectifs -4, -6.

504. Nous avons vu que pu, ainsi que ses dérivées, admet les périodes 2ω, $2\omega'$. Étudions l'effet de l'addition de 2ω ou $2\omega'$ à l'argument de ζu. Partons de la relation

$$p(u+2\omega) - pu = 0.$$

En prenant les fonctions primitives des deux membres, nous avons

$$\zeta(u+2\omega) - \zeta u = \text{const.},$$

d'où, en faisant $u = -\omega$,

$$\zeta\omega - \zeta(-\omega) = \text{const.},$$

et, comme la fonction ζ est impaire, on voit que la constante est égale à $2\zeta\omega$, de sorte que l'on a

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\zeta\omega,$$

et, de même,

$$\zeta(u+2\omega') = \zeta u + 2\zeta\omega'.$$

On pose d'ordinaire

$$\zeta\omega = \eta, \qquad \zeta\omega' = \eta',$$

d'où

$$(3) \qquad \zeta(u+2\omega) = \zeta u + 2\eta, \qquad \zeta(u+2\omega') = \zeta u + 2\eta'.$$

En remontant à la fonction σ, on déduit de là

$$\sigma(u+2\omega) = \sigma u\, e^{2\eta u} c.$$

Pour déterminer la constante c, faisons $u = -\omega$; nous avons

$$\sigma\omega = \sigma(-\omega)e^{-2\eta\omega}c,$$

et, comme σ est impaire,

$$c = -e^{2\eta\omega}.$$

On a ainsi les formules suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \sigma(u+2\omega) = -\sigma u\, e^{2\eta(u+\omega)}, \\ \sigma(u+2\omega') = -\sigma u\, e^{2\eta'(u+\omega')}. \end{cases}$$

505. Les constantes η, η' jouent un rôle important dans les formules précédentes. Il y a d'ailleurs une relation simple entre les quatre constantes ω, ω', η, η'.

Considérons un parallélogramme de périodes ABCD ne contenant sur son contour aucun point singulier de la fonction (*fig.* 45), et prenons l'intégrale $\int_{ABCD} \zeta u\, du$. Remarquons que le contour ABCD est direct ou non suivant les valeurs relatives de ω et ω'. Évaluons

$$\int_{AB} \zeta u\, du - \int_{DC} \zeta u\, du$$

Sur DC, posons

$$u = u_1 + 2\omega' ;$$

quand u parcourt DC, u_1 parcourt AB, et nous avons

$$\int_{DC} \zeta u\, du = \int_{AB} \zeta(u_1 + 2\omega')\, du_1.$$

ou, d'après ce qui précède,

$$\int_{DC} \zeta u\, du = \int_{AB} \zeta u_1\, du_1 + 2\eta' \int_{AB} du_1$$

En remplaçant $\int_{AB} du$ par sa valeur 2ω, nous déduisons de là

$$\int_{AB} \zeta u\, du + \int_{CD} \zeta u\, du = -4\eta'\omega.$$

Nous aurons de même

$$\int_{BC} \zeta u\, du + \int_{DA} \zeta u\, du = 4\eta\omega',$$

d'où, par addition,

$$\int_{ABCD} \zeta u \, du = 4\eta_1\omega' - 4\eta_1'\omega.$$

D'autre part, à l'intérieur du parallélogramme de périodes, il n'y a qu'un pôle, qui est simple et a pour résidu 1. L'intégrale précédente est donc égale à $+2i\pi$ ou $-2i\pi$ suivant que le contour est parcouru dans le sens direct ou non. On a donc la relation

$$\eta_1\omega' - \eta_1'\omega = \pm \frac{i\pi}{2},$$

le signe qu'il faut prendre devant le second membre dépendant de la position relative des points B et D.

506. Cherchons maintenant à exprimer les fonctions elliptiques les plus générales en fonction de σ, ζ, p.

Expression d'une fonction elliptique au moyen de σ. — Soit une fonction elliptique $f(u)$ ayant pour périodes 2ω, $2\omega'$. Considérons un parallélogramme de périodes ne contenant sur son contour aucun pôle ni aucun zéro de f et contenant à son intérieur les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et les pôles $b_1, b_2, \ldots, b_n$ (ces points étant distincts ou non). Nous avons montré (n° 497, p. 301) que l'on a

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_n \quad (\text{mod.}\, 2\omega,\, 2\omega').$$

Remplaçons a_n par un nombre qui lui soit congru et tel que la congruence précédente se transforme en égalité.

Cela posé, considérons la fonction

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u - a_1)\,\sigma(u - a_2)\ldots\sigma(u - a_n)}{\sigma(u - b_1)\,\sigma(u - b_2)\ldots\sigma(u - b_n)}.$$

Je dis que cette fonction admet la période 2ω. En effet, si nous augmentons u de 2ω, $\sigma(u - a_i)$ est multiplié (n° 504, p. 306) par $-e^{2\eta_1(u - a_i + \omega)}$, de sorte que le numérateur est multiplié par $(-1)^n e^{2\eta_1(nu - \Sigma a_i + n\omega)}$. De même, le dénominateur est multiplié par $(-1)^n e^{2\eta_1(nu - \Sigma b_i + n\omega)}$. Comme $\sum a_i = \sum b_i$, $\varphi(u)$ est multiplié par 1, et, par suite, admet la période 2ω. De même $\varphi(u)$ admet la période $2\omega'$. φ étant d'ailleurs méromorphe, est une fonction elliptique.

Je dis que $\frac{f}{\varphi}$, qui est, par suite, aussi une fonction elliptique, n'a pas de pôles. En effet, cette fonction ne peut avoir d'autres points singuliers que les zéros ou les pôles de f et φ. Or, en chacun de ces points, c'est-à-dire en chaque point $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, $\frac{f}{\varphi}$ a une valeur finie et différente de zéro. Donc $\frac{f}{\varphi}$ se réduit à une constante A, et l'on a, par suite,

$$f(u) = \mathrm{A}\,\varphi(u).$$

Nous avons là une expression pour une fonction elliptique dont on connaît les zéros et les pôles.

507. Comme application, considérons $pu - pa$, a n'étant pas congru à zéro, c'est-à-dire pa étant fini. Cette fonction est elliptique et a, dans un parallélogramme de périodes contenant l'origine, un pôle unique d'ordre 2 en O. Elle a donc deux zéros dans un parallélogramme de périodes : ce sont, comme on le constate directement, a et $-a$. Ces deux zéros sont, en général, distincts; ils ne sont confondus que si l'on a

$$a = -a + 2m\omega + 2n\omega'$$

ou

$$a = m\omega + n\omega'.$$

En mettant à part ces valeurs et appliquant le résultat précédent, nous avons

$$pu - pa = \mathrm{A}\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}{\sigma^2 u}.$$

Pour déterminer A, multiplions les deux membres de cette relation par u^2 et faisons tendre u vers zéro. Le premier membre tend vers 1, $\frac{u^2}{\sigma^2 u}$ tend vers 1; à la limite, on a

$$1 = \mathrm{A}\,\sigma(-a)\,\sigma a = -\mathrm{A}\,\sigma^2 a,$$

d'où

$$(5) \qquad pu - pa = -\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a)}{\sigma^2 a\,\sigma^2 u}.$$

D'ailleurs, les deux membres étant fonctions continues de a, l'égalité a encore lieu pour les valeurs $a = m\omega + n\omega'$ que nous avions mises à part; *la formule est donc générale.*

308. Prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de (5); nous obtenons

$$(6) \qquad \frac{p'u}{pu - pa} = \zeta(u-a) + \zeta(u+a) - 2\zeta u,$$

et, en permutant u et a,

$$-\frac{p'a}{pu - pa} = -\zeta(u-a) + \zeta(u+a) - 2\zeta a,$$

d'où, en ajoutant membre à membre et divisant par 2,

$$(7) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'a}{pu - pa} = \zeta(u+a) - \zeta u - \zeta a.$$

En dérivant les deux membres de cette formule, nous obtenons

$$(8) \qquad p(u+a) - pu = -\frac{1}{2}\,\frac{d\dfrac{p'u - p'a}{pu - pa}}{du},$$

formule qui peut être considérée comme une formule d'addition pour la fonction pu.

En développant le second membre, il vient

$$p(u+a) - pu = -\frac{1}{2}\,\frac{p''u(pu - pa) - p'u(p'u - p'a)}{(pu - pa)^2}.$$

Permutons de nouveau u et a, et ajoutons membre à membre; il vient

$$2p(u+a) - pu - pa = -\frac{1}{2}\,\frac{p''u - p''a}{pu - pa} + \frac{1}{2}\,\frac{(p'u - p'a)^2}{(pu - pa)^2}.$$

D'autre part, d'après la relation (2) (n° 302), nous avons

$$p''u - p''a = 6p^2u - 6p^2a = 6(pu - pa)(pu + pa).$$

En portant cette valeur de $p''u - p''a$ dans la relation précédente, nous avons finalement

$$(9) \qquad p(u+a) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'a}{pu - pa}\right)^2 - pu - pa;$$

c'est la formule classique d'addition de pu. En la dérivant, nous aurons une expression de $p'(u+a)$ en fonction de pu, $p'u$. En résumé, nous savons exprimer $p(u+a)$, $p'(u+a)$ en fonction rationnelle des valeurs de ces fonctions pour u et a.

509. *Expression d'une fonction elliptique au moyen de ζ et de ses dérivées.* — D'après l'étude de ζ, on a, a étant une valeur quelconque de u,

$$\zeta(u-a) = \frac{1}{u-a} + \text{fonction régulière en } a,$$

$$\zeta'(u-a) = \frac{-1}{(u-a)^2} + \text{fonction régulière en } a,$$

. . . .

$$\zeta^{(\alpha-1)}(u-a) = \frac{(-1)^{\alpha-1}(\alpha-1)!}{(u-a)^\alpha} + \text{fonction régulière en } a.$$

Cela posé, soit $f(u)$ une fonction elliptique ayant pour pôles a, b, ..., l, d'ordres de multiplicité respectifs α, β, ..., λ.

Mettons en évidence la partie principale de f en a; soit, au voisinage de a,

$$f(u) = \frac{A_\alpha}{(u-a)^\alpha} + \ldots + \frac{A_1}{u-a} + \text{fonction régulière en } a.$$

La fonction

$$f(u) - \left[A_1\zeta(u-a) - A_2\zeta'(u-a) + \ldots + \frac{(-1)^{\alpha-1}A_\alpha}{(\alpha-1)!}\zeta^{(\alpha-1)}(u-a)\right]$$

est, d'après la manière dont elle est formée, régulière en a. Formons des développements analogues pour chacun des autres pôles b, c, ..., l, et prenons la fonction

$$\varphi(u) = f(u) - \sum_{a,b,\ldots,l}\left[A_1\zeta(u-a) - \ldots + \frac{(-1)^{\alpha-1}A_\alpha}{(\alpha-1)!}\zeta^{(\alpha-1)}(u-a)\right].$$

La fonction φ ne peut avoir d'autres points singuliers que a, b, ..., l; étant régulière en chacun de ces points, elle est donc partout régulière.

Je dis qu'elle admet la période 2ω. En effet, si nous augmentons u de 2ω, les fonctions ζ', ζ'', ..., $\zeta^{(\alpha-1)}$, ..., qui sont elliptiques et de période 2ω, ne changent pas; $f(u)$, par hypothèse, ne change pas non plus; $\zeta(u-a)$ augmente de 2η, donc $\sum A_1\zeta(u-a)$ augmente de $2\eta\sum A_1$. Or $\sum A_1$ est nul, comme étant la somme des résidus de $f(u)$.

En résumé, $\varphi(u)$ est une fonction elliptique de périodes 2ω, $2\omega'$,

partout régulière. C'est donc une constante C, de sorte qu'on a

$$f(u) = C + \sum\left[A_1\zeta(u-a) + \ldots + (-1)^{\alpha-1}\frac{A_\alpha}{(\alpha-1)!}\zeta^{(\alpha-1)}(u-a)\right].$$

Ceci nous donne *une expression de la fonction elliptique f, connaissant ses pôles et les parties principales relatives à ces pôles.*

510. *Expression d'une fonction elliptique en fonction de* pu, p'u. — *Une fonction elliptique de périodes* 2ω, $2\omega'$ *est fonction rationnelle des fonctions* pu, p'u *construites avec ces deux périodes.*

En effet, utilisons la dernière formule obtenue en remarquant que, dans le second membre, toutes les fonctions, sauf les fonctions $\zeta(u-a)$, sont, à des facteurs numériques près, égales à p et ses dérivées, par conséquent s'expriment en fonction de p et p'. Comme d'autre part, en remplaçant a par $-a$ dans (7) (n° 508), on obtient

$$\zeta(u-a) = \zeta u - \zeta a + \frac{1}{2}\,\frac{p'u + p'a}{pu - pa},$$

nous avons

$$\sum A_1\zeta(u-a) = \zeta u\sum A_1 + \text{fonction rationnelle de } pu \text{ et } p'u;$$

$\sum A_1$ étant nul comme nous l'avons vu, il ne reste, dans l'expression de $f(u)$, que des fonctions rationnelles de pu, p'u.

511. *Deux fonctions elliptiques de mêmes périodes sont liées par une relation algébrique.* — Soient, en effet, $f(u)$ et $\varphi(u)$ deux fonctions elliptiques de périodes 2ω, $2\omega'$; considérons la fonction pu construite avec ces périodes; nous avons

$$f(u) = R(pu, p'u), \qquad \varphi(u) = R_1(pu, p'u),$$

R et R_1 étant deux fonctions rationnelles. Joignons à ces deux équations la relation

$$p'^2u = 4p^3u - g_2pu - g_3.$$

Si, entre ces trois relations algébriques, nous éliminons p et p', nous obtiendrons une relation algébrique entre f et φ, ce qui établit le fait énoncé.

512. Considérons la fonction $p'u$. On reconnaît qu'elle a, dans un parallélogramme de périodes contenant l'origine à son intérieur, un seul pôle, à savoir : l'origine, qui est pôle triple ; donc $p'u$ a, dans un parallélogramme de périodes, trois zéros (n° 496). Je dis que ces trois zéros sont congrus respectivement aux nombres ω, ω', $\omega+\omega'$. En effet, la relation

$$p'(u+2\omega)=p'u$$

donne, en faisant $u=-\omega$,

$$p'\omega=p'(-\omega)=-p'\omega,$$

d'où, comme $p'\omega$ est fini,

$$p'\omega=0.$$

Le même raisonnement s'applique à ω' et $\omega+\omega'$; deux quelconques de ces trois nombres ne sont pas congrus entre eux, car si l'on avait, par exemple,

$$\omega'=\omega+2m\omega+2n\omega',$$

on en déduirait que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ est réel ; ainsi ces trois zéros sont distincts.

Cela étant, si nous désignons par e_1, e_2, e_3 les racines du trinome

$$4x^3-g_2x-g_3,$$

nous avons, en vertu de la relation fondamentale (1) (n° 501, p. 304),

$$p'^2u=4(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3).$$

Chacun des trois nombres ω, ω', $\omega+\omega'$, qui annulent $p'u$, doit annuler l'un des trois facteurs du second membre. Donc $p\omega$ doit être égal à l'un des trois nombres e_1, e_2, e_3 ; de même pour $p\omega'$ et $p(\omega+\omega')$.

Ces trois nombres $p\omega$, $p\omega'$, $p(\omega+\omega')$ sont distincts. En effet, on a vu que l'équation $pu=C$ a deux racines de somme nulle (n° 507) ; donc, pour que deux valeurs de u donnent la même valeur à p, il faut que leur somme ou leur différence soit une combinaison linéaire des périodes, ce qui n'a pas lieu pour les nombres ω, ω', $\omega+\omega'$ considérés deux à deux. Donc *les trois nombres e_1, e_2, e_3 sont distincts;*

si l'on appelle *discriminant* (¹) du polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ la quantité $g_2^3 - 27 g_3^2$, ce fait s'exprime par la condition

$$g_2^3 - 27 g_3^2 < 0.$$

V. — Cas des invariants réels.

513. Nous allons maintenant particulariser cette étude *en supposant le réseau des points s symétrique par rapport à l'axe* Ox (par suite aussi symétrique par rapport à Oy). Je dis que, dans ces conditions :

1° g_2 et g_3 sont réels, ainsi que tous les coefficients désignés par $c_2, c_3, \ldots$;

2° σ, ζ, $\wp$, $\wp'$, ... prennent pour deux valeurs conjuguées de u des valeurs conjuguées, et en particulier prennent pour u réel des valeurs réelles.

Nous distinguerons, dans le réseau, d'une part les sommets situés sur Ox, d'autre part les sommets non situés sur Ox, qui se groupent par couples de deux, deux points d'un même couple étant symétriques par rapport à Ox. Dans les sommes $\sum' \frac{1}{s^4}$, $\sum' \frac{1}{s^6}$, ..., distinguons de même les termes qui se rapportent à ces deux sortes de points. Aux points situés sur Ox correspondent des termes réels. A deux points symétriques par rapport à Ox correspondent deux termes dont la somme est réelle. Donc les sommes $\sum' \frac{1}{s^4}$, $\sum' \frac{1}{s^6}$, ..., par suite les quantités g_2, g_3, c_2, c_3, ..., sont réelles.

Démontrons maintenant la seconde propriété. Rappelons que les facteurs de σ, les termes de ζ, de $\wp$ ou $\wp'$ sont tous des expressions contenant l'argument u et une certaine valeur de s. Soient u_0, u_1 deux valeurs imaginaires conjuguées de l'argument. A un facteur qui entre dans σu_0 et qui contient le nombre s_0, faisons correspondre

(¹) On ramène le polynome considéré à la forme $4(x^3 + px + q)$ en posant $p = \frac{-g_2}{4}$, $q = \frac{-g_3}{4}$, d'où résulte

$$4p^3 + 27q^2 = -\frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2).$$

dans σu_1 le facteur qui contient le nombre s_1, conjugué de s_0. A chaque facteur de σu_0 correspond ainsi un facteur et un seul de σu_1, et deux facteurs correspondants sont imaginaires conjugués.

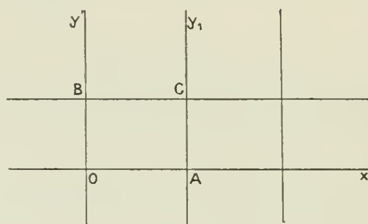
De même, les termes de ζu_1 sont les imaginaires conjugués des termes de ζu_0; il en est de même encore pour $p u$, $p' u$.

Donc σu_1, ζu_1, $p u_1$, ... sont imaginaires conjugués de σu_0, ζu_0, $p u_0$, ...

514. Cherchons de quelle manière le réseau des points s peut être symétrique par rapport à Ox. Soient s un sommet non situé sur Ox, s' le symétrique par rapport à Ox. En complétant le parallélogramme sur Os et Os', nous obtenons un point qui fait partie du réseau et qui est situé sur Ox. Il y a donc des sommets du réseau situés sur Ox.

Prenons le sommet situé sur Ox le plus rapproché de O; soit A

Fig. 46.



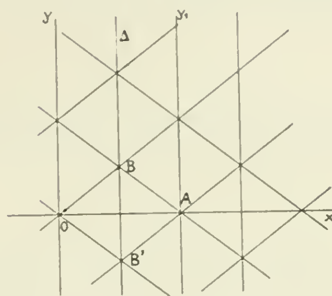
ce point (*fig.* 46). Menons par A la parallèle Ay_1 à Oy; deux cas sont possibles :

1° Il n'y a pas, entre Oy et Ay_1, de sommet du réseau. Tous les sommets sont alors sur Oy, Ay_1, et des parallèles successives équidistantes. *On a un réseau de rectangles* (*fig.* 46). Soit B le sommet le plus voisin de O situé sur Oy; un parallélogramme de périodes sera le rectangle OACB construit sur OA et OB, et nous voyons que *les périodes primitives* OA *et* OB *sont, l'une réelle, l'autre imaginaire pure.*

2° Il y a, entre Oy et Ay_1, des sommets du réseau. Soit Δ la parallèle à Oy équidistante de Oy et Ay_1 (*fig.* 47). S'il y avait un sommet C du réseau entre Oy et Δ, on en déduirait, en construisant le parallélogramme sur OC, OC' (C' étant le symétrique de C par rapport à Ox), un sommet D, situé sur Ox entre O et A, ce qui serait con-

traire au fait que A est le sommet le plus rapproché de O. Tous les sommets du réseau situés entre Oy et Ay_1 sont donc sur la droite Δ.

Fig. 47.



Soit B celui de ces sommets qui est le plus rapproché de Ox; soit B' son symétrique. Le parallélogramme OBAB' est un losange; *les périodes primitives* OB, OB' *sont deux nombres imaginaires conjugués.*

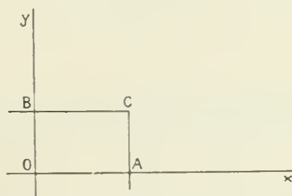
Nous allons étudier les fonctions elliptiques particulières qu'on obtient dans ces deux cas.

515. *Supposons* ω *réel et positif,* ω' *imaginaire pur; soit*

$$\omega' = i\lambda,$$

λ *étant réel et positif.* Soient A le point ω, B le point ω'; considérons le rectangle OACB construit sur OA, OB (*fig.* 48). Un

Fig. 48.



parallélogramme de périodes est le rectangle R ayant O pour centre, OA et OB comme demi-côtés.

Cherchons les valeurs de u qui rendent pu réel. A cause de la double périodicité de la fonction p, il suffit de chercher ces valeurs

dans un parallélogramme de périodes, par exemple dans le rectangle R. La fonction pu étant paire, il suffit d'étudier cette fonction dans la moitié du rectangle R située à droite de Oy. Enfin, la fonction prenant des valeurs conjuguées pour deux valeurs conjuguées de u, on peut se contenter d'étudier pu dans le rectangle OACB. Soient

$$u = a + bi, \qquad u_0 = a - bi$$

deux valeurs conjuguées de l'argument; comme pu et pu_0 sont conjuguées (n° 513), pour que pu soit réel, il faut et il suffit qu'on ait

$$pu = pu_0.$$

Or, nous avons vu que, pour que deux arguments donnent la même valeur à p, il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit égale à une combinaison linéaire des périodes. Nous devrons donc avoir

$$u \pm u_0 = 2m\omega + 2n\omega'.$$

En remplaçant u par $a + bi$, u_0 par $a - bi$, ω' par $i\lambda$, et en prenant soit le signe +, soit le signe −, nous aurons les deux solutions

1° $$a = m\omega + ni\lambda,$$

d'où

$$n = 0, \qquad a = m\omega;$$

2° $$bi = m\omega + ni\lambda,$$

d'où

$$m = 0, \qquad b = n\lambda.$$

La première solution $a = m\omega$ nous donne, dans le rectangle OACB, les côtés OB et AC. La seconde solution, $b = n\lambda$, nous donne les côtés OA et BC.

En résumé, *dans le rectangle* OACB, pu *est réel pour tous les points du contour et pour eux seulement.*

Dans le plan, pu *est réel en tout point dont l'abscisse est un multiple de* ω *ou l'ordonnée un multiple de* λ, *et pour ces points seulement.*

516. Étudions la variation de pu sur le contour OACBO. En A, C, B, nous avons pour valeurs respectives de pu les trois nombres $p\omega$,

$p(\omega + \omega')$, $p\omega'$, qui sont égaux dans leur ensemble aux nombres e_1, e_2, e_3 (n° 512). Posons

$$p\omega = e_1, \qquad p(\omega + \omega') = e_2, \qquad p\omega' = e_3.$$

Dans le cas actuel, e_1, e_2, e_3 *sont réels et distincts*, de sorte qu'on a

$$g_2^3 - 27 g_3^2 > 0.$$

D'ailleurs, quand pu est réel, $p'u$, dont le carré est réel, ne peut être que réel ou imaginaire pur. Sur OA, $p'u$ est réel et n'a, en dehors des points O et A, ni pôle ni zéro. Donc, sur OA, pu varie toujours dans le même sens. *Il part de* $+\infty$ $\left(\text{puisque la partie principale est } \frac{1}{u^2}\right)$ *et décroît jusqu'à* e_1 *lorsque* u *varie de* o *à* ω.

En outre, comme $p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3$ n'est pas nul sur OA, sauf en A, on voit que e_1 *est la plus grande racine du polynome* $4x^3 - g_2 x - g_3$.

Posons $x = pu$; nous aurons, sur OA,

$$dx = p'u\, du = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}\, du.$$

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

d'où, en intégrant entre les limites $x = +\infty$, $x = e_1$,

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Nous exprimons ainsi ω *en fonction des invariants* g_2, g_3.

Pour étudier pu sur OB, posons

$$u = iv,$$

v allant de o à λ, quand u décrit le côté OB. Nous devons étudier la fonction $p(iv)$ construite avec les périodes 2ω, $2\omega'$, ce qu'on désigne par

$$p(iv \mid \omega, \omega').$$

Nous avons, d'après une remarque faite sur l'homogénéité (n° 503),

$$p(iv \mid \omega, \omega') = \frac{1}{i^2} p\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right)$$

ou

$$p(iv \mid \omega, \omega') = -p(v \mid \lambda, i\omega),$$

en remarquant que l'on peut changer l'ordre et le signe des périodes sans changer la fonction construite avec ces périodes.

Nous sommes ramenés à étudier la fonction $p(v \mid \lambda, i\omega)$ quand v va par valeurs réelles de o à λ. C'est justement l'étude que nous venons de faire. De plus, les invariants de cette nouvelle fonction p sont égaux (n° 503) aux invariants de pu multipliés respectivement par i^4 et i^6, c'est-à-dire à g_2 et $-g_3$.

En appliquant le résultat obtenu, on voit que lorsque v va de o à λ, $p(v \mid \lambda, i\omega)$ décroît de $+\infty$ à la valeur $p(\lambda \mid \lambda, i\omega)$, et cette valeur est la plus grande des racines du polynome $4x^3 - g_2x + g_3$. Or, ce polynome est, au signe près, le transformé en $-x$ du polynome $4x^3 - g_2x - g_3$. Ses racines sont donc $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$, et $-e_3$, qui est égal à $p(\lambda \mid \lambda, i\omega)$, est la plus grande de ces racines. Donc, e_3 *est la plus petite racine du polynome* $4x^3 - g_2x - g_3$.

En résumé, *quand u va de* O *en* B *sur le côté* OB, *la fonction* pu *est réelle et varie de* $-\infty$ *à* e_3, e_3 *étant la plus petite racine du polynome* $4x^3 - g_2x - g_3$. En C, pu prend la valeur e_2, qui est la racine moyenne du polynome.

Sur OB, $p'u$ est imaginaire pur, car l'accroissement de la variable est imaginaire pur.

Par application de ce qui précède, on a

$$\frac{\omega'}{i} = \lambda = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x + g_3}}.$$

Quant aux valeurs de pu sur AC et sur CB, elles sont également réelles; de plus, $p'u$ est réel sur BC, imaginaire pur sur AC. D'ailleurs, $p'u$ ne s'annule ni dans un cas ni dans l'autre, sauf au point C; donc pu varie toujours dans le même sens soit sur AC, soit sur CB. En résumé, *quand un point u parcourt le contour* OACBO, pu *est réel et décroît de* $+\infty$ *à* $-\infty$, *en passant par les valeurs* e_1 *en* A, e_2 *en* C, e_3 *en* B.

En appliquant les deux principes de symétrie énoncés au début, on en déduit la valeur de la fonction pu en tout point où elle est réelle.

517. *Supposons maintenant les deux périodes primitives ima-*

ginaires conjuguées, soit

$$2\omega = \alpha + \beta i, \qquad 2\omega' = \alpha - \beta i,$$

α et β étant deux nombres positifs. Nous tirons de là

$$\alpha = \omega + \omega', \qquad \beta i = \omega - \omega'.$$

Cherchons les valeurs de l'argument qui rendent pu réel. Soient deux valeurs conjuguées de l'argument

$$u = a + bi, \qquad u_0 = a - bi;$$

pour que pu soit réel, il faut et il suffit que l'on ait

$$pu = pu_0,$$

ce qui exige

$$u \pm u_0 = 2m\omega + 2n\omega',$$

m et n étant entiers.

On obtient, en prenant le signe +,

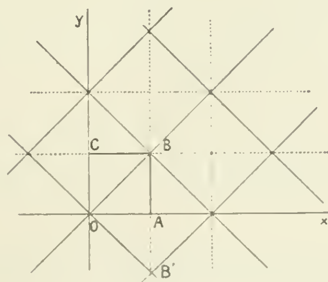
$$2a = (m+n)\alpha + (m-n)\beta i,$$

ce qui exige $m = n$, $a = m\alpha$ et, en prenant le signe —,

$$2bi = (m+n)\alpha + (m-n)\beta i,$$

ce qui exige $n = -m$, $b = m\beta$.

Fig. 49.



Il faut donc que a soit multiple de α ou que b soit multiple de β. Tous les points $u = a + bi$ satisfaisant à cette condition sont les points des diagonales du réseau des parallélogrammes (*fig.* 49). Nous avons ainsi tous les points d'un réseau de rectangles formé par la

parallèle à Oy menée par A, la parallèle à Ox menée par C et les parallèles équidistantes.

Posons encore

$$\mathrm{p}\omega = e_1, \qquad \mathrm{p}(\omega + \omega') = e_2, \qquad \mathrm{p}\omega' = e_3.$$

Nous avons

$$\mathrm{p}(\omega + \omega') = \mathrm{p}\alpha = e_2.$$

e_2 est réel, e_1 et e_3 sont imaginaires conjugués, car les points ω et ω' n'appartiennent ni l'un ni l'autre au réseau de rectangles. Par suite, pour le polynome $4x^3 - g_2x - g_3$, on a

$$g_2^3 - 27g_3^2 < 0.$$

A cause de la double périodicité de $\mathrm{p}u$, il suffit, pour étudier les valeurs réelles de cette fonction dans tout le plan, de les étudier sur OA et sur OC.

Lorsque u décrit OA, $\mathrm{p}'u$ qui est réel ne s'annule pas, sauf au point A. $\mathrm{p}u$ varie donc toujours dans le même sens : *il décroît de $+\infty$ à e_2 lorsque u varie de* o *à* α. Posons encore

$$x = \mathrm{p}u;$$

nous aurons

$$\frac{dx}{du} = \mathrm{p}'u = -\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3},$$

$$du = -\frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Intégrons entre les limites $x = +\infty$, $x = e_2$. u va de o à α, d'où

$$\alpha = -\int_{+\infty}^{e_2} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}} = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}.$$

Nous avons ainsi la valeur de α en fonction de g_2 et g_3.

Étudions maintenant la fonction sur OC. Posons, sur OC, $u = iv$. Quand u va de O en C, v varie de o à β. De plus, on a

$$\mathrm{p}(iv \mid \omega, \omega') = \frac{1}{i^2}\mathrm{p}\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right) = -\mathrm{p}\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right).$$

Le système de périodes $\frac{2\omega}{i}$, $\frac{2\omega'}{i}$ n'est autre que le système $\beta - i\alpha$, $\beta + i\alpha$. On passe donc de la fonction étudiée à cette fonction auxiliaire $\mathrm{p}\left(v \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right)$, en permutant le rôle des deux nombres α, β.

Lorsque v varie de 0 à β, cette fonction va de $+\infty$ à la racine réelle du polynome correspondant. Or, les invariants nouveaux sont égaux aux anciens, multipliés respectivement par i^4 et i^6; ce sont donc g_2 et $-g_3$. Le polynome en x correspondant est $4x^3 - g_2 x + g_3$, et ses racines sont $-e_1$, $-e_2$, $-e_3$. La racine réelle est $-e_2$, et l'on a

$$-e_2 = p\left(\beta \,\middle|\, \frac{\omega}{i}, \frac{\omega'}{i}\right), \qquad \beta = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

La fonction auxiliaire allant de $+\infty$ à $-e_2$, la fonction donnée va de $-\infty$ à e_2.

VI. — Inversion.

518. D'après la théorie générale, g_2 et g_3 sont fonctions de ω, ω'; dans le cas du réseau symétrique par rapport aux axes, nous avons inversement obtenu les expressions de ω et ω' en fonction de g_2 et g_3. Nous allons, en restant dans ce cas, étudier d'une manière plus complète les relations entre les périodes 2ω, $2\omega'$ d'une part, et les invariants g_2, g_3 d'autre part.

Considérons le cas (n°s 515, 516) où ω et $\frac{\omega'}{i}$ sont réels et positifs; nous avons obtenu

$$(1) \qquad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad \frac{\omega'}{i} = \lambda = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}}.$$

Nous allons tout d'abord transformer la première intégrale. Les racines e_1, e_2, e_3 du polynome sous le radical sont réelles, et l'on a

$$e_1 > e_2 > e_3.$$

Nous poserons

$$(2) \qquad \mu^2 = e_1 - e_3, \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}.$$

On a $k^2 < 1$; en adjoignant aux deux dernières équations la relation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, on peut les résoudre par rapport à e_1, e_2, e_3, ce qui donne

$$e_1 = \frac{(2 - k^2)\mu^2}{3}, \qquad e_2 = \frac{(2k^2 - 1)\mu^2}{3}, \qquad e_3 = \frac{-(1 + k^2)\mu^2}{3}.$$

On reconnaît ainsi qu'à tout système de deux nombres positifs μ^2

et k^2 tels que $k^2 < 1$ correspond un système de trois nombres réels e_1, e_2, e_3 satisfaisant à $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, et, par suite, un polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ de discriminant positif.

Écrivons

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}.$$

Nous poserons

$$x - e_3 = \frac{\mu^2}{z^2} = \frac{e_1 - e_3}{z^2},$$

z allant de 1 à 0 quand x va de e_1 à $+\infty$. On déduit de là

$$x - e_1 = x - e_3 - (e_1 - e_3) = \frac{\mu^2(1-z^2)}{z^2},$$

$$x - e_2 = x - e_3 - (e_2 - e_3) = \frac{\mu^2(1-k^2 z^2)}{z^2},$$

$$dx = -\frac{2\mu^2\,dz}{z^3},$$

$$\frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \frac{-\mu^2\,dz}{z^3}\,\frac{z^3}{\mu^3\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

d'où, en changeant le signe de l'intégrale,

$$\omega = \frac{1}{\mu}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \tag{3}$$

Pour passer de ω à λ, il faut remplacer les nombres e_1, e_2, e_3 par $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$; par cette transformation, μ^2 reste invariable, k^2 est remplacé par le nombre

$$k'^2 = \frac{-e_2 - (-e_1)}{-e_3 - (-e_1)} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = 1 - k^2.$$

On a donc

$$\lambda = \frac{1}{\mu}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} \qquad (k'^2 = 1 - k^2). \tag{4}$$

519. Nous sommes conduits à étudier la fonction de k

$$\psi(k) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (k < 1).$$

Posons $z = \sin\varphi$, φ allant de o à $\frac{\pi}{2}$. Comme on a

$$dz = \cos\varphi\, d\varphi, \qquad \sqrt{1 - z^2} = \cos\varphi,$$

il vient

$$\psi(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi.$$

On peut appliquer à la fonction à intégrer la formule du binome, puisqu'on a

$$k^2 \sin^2\varphi \leqq k^2 < 1 ;$$

on obtient une série normalement convergente, qui peut s'intégrer terme à terme, de sorte qu'on a

$$\psi(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{p=1,2,\ldots} k^{2p} \frac{1.3\ldots(2p-1)}{2.4\ldots 2p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi.$$

Pour avoir la valeur des intégrales du second membre, partons de la formule

$$\begin{aligned}(\sin^{2p-1}\cos\varphi)' &= (2p-1)\sin^{2p-2}\varphi\cos^2\varphi - \sin^{2p}\varphi \\ &= (2p-1)\sin^{2p-2}\varphi - 2p\sin^{2p}\varphi,\end{aligned}$$

qui, intégrée entre o et $\frac{\pi}{2}$, donne

$$0 = (2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-2}\varphi\, d\varphi - 2p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi.$$

Par le procédé de récurrence, on en tire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\, \frac{1.3\ldots\overline{2p-1}}{2.4\ldots 2p},$$

et, par suite, en supposant toujours $k < 1$,

$$(5) \quad \psi(k) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots\overline{2p-1}}{2.4\ldots 2p}\right)^2 k^{2p} + \ldots\right].$$

$\psi(k)$ est une fonction croissante de k; je dis que, *quand k tend*

vers 1, $\psi(k)$ *croît indéfiniment.* Reprenons la formule

$$\psi(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

Remarquons que, si l'on remplace k par 1, la fonction sous le signe $\int$ est $\frac{1}{\cos\varphi}$, dont la fonction primitive est

$$\mathrm{L}\left|\cot\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

et cette fonction croît indéfiniment quand φ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Cela posé, considérons l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \qquad (\varepsilon > 0,\ k^2 \leq 1).$$

Le dénominateur reste borné inférieurement, de sorte que cette intégrale est fonction continue du paramètre k, même pour $k = 1$; elle a donc pour limite, quand k tend vers 1, l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

laquelle, si l'on a choisi ε assez petit, peut surpasser tout nombre donné. La fonction $\psi(k)$, supérieure à la valeur de l'intégrale I, peut donc surpasser tout nombre donné.

En résumé, la fonction $\psi(k)$, lorsque k varie de 0 à 1 (extrêmes exclus), va en croissant de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$.

520. Cela posé, partons d'un système de deux nombres positifs arbitraires (ω, λ); construisons la fonction $p(u \mid \omega, i\lambda)$: elle satisfait à une équation de la forme

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 p u - g_3 \qquad (g_2^3 - 27 g_3^2) > 0.$$

De g_2 et g_3 on déduit (n° 518) un système de deux nombres positifs (μ, k) $(k < 1)$ *qui peut être considéré comme fonction du système* (ω, λ). Ces quantités sont liées par les relations (3), (4),

qu'on peut mettre sous la forme

$$(6) \qquad \omega = \frac{1}{\mu}\psi(k), \qquad \lambda = \frac{1}{\mu}\psi(\sqrt{1-k^2}).$$

On en déduit

$$\frac{\omega}{\lambda} = \frac{\psi(k)}{\psi(\sqrt{1-k^2})}.$$

Le second membre de cette relation est une fonction de k; quand k va de o à 1, le numérateur va de $\frac{\pi}{2}$ à $+\infty$ en croissant, le dénominateur va de $+\infty$ à $\frac{\pi}{2}$ en décroissant; le rapport va donc en croissant de o à $+\infty$. Par suite, en considérant inversement k comme fonction de $\frac{\omega}{\lambda}$, on voit que, *lorsque* $\frac{\omega}{\lambda}$ *va de* o *à* $+\infty$, k *prend une fois et une seule chaque valeur comprise entre* o *et* 1.

Si l'on fait varier maintenant ω et λ de manière que $\frac{\omega}{\lambda}$ reste fixe, la relation $\mu = \frac{1}{\omega}\psi(k)$ montre, k étant fixe, que μ *peut prendre toutes les valeurs positives possibles, chaque valeur étant obtenue pour une seule valeur de* ω.

En résumé, *si l'on attribue à l'avance à* μ *et* k *certaines valeurs positives et telles que* $k < 1$, *on peut trouver un et un seul système de nombres positifs* ω, λ *pour lequel les fonctions* μ, k, *précédemment définies, prennent ce système de valeurs.*

D'autre part, un système de nombres (μ, k) $(k < 1)$ détermine (n° 518) un polynome $4x^3 - g_2x - g_3$ de discriminant positif, et réciproquement.

Par conséquent, *si* ω *et* λ *varient de toutes les manières possibles, les invariants* g_2, g_3 *qui s'en déduisent prennent tous les systèmes de valeurs possibles pour lesquels on a* $g_2^3 - 27g_3^2 > 0$, *chaque système* (g_2, g_3) *étant obtenu pour un seul système* (ω, λ). De là résulte la conséquence suivante :

Soit l'équation différentielle

$$(7) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3 \qquad [(g_2^3 - 27g_3^2) > 0].$$

Il existe un et un seul système (ω, λ) tel que la fonction pu correspondante satisfasse à cette équation; ce système, étant unique, est nécessairement donné par les relations (1).

Donc, *étant donnée l'équation différentielle* (7), *la fonction* $p(u \mid \omega, \omega')$, *construite avec les demi-périodes*

$$(1) \qquad \omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad \omega' = i \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}},$$

où e_1 *et* e_3 *sont la plus grande et la plus petite racine du polynome* $4x^3 - g_2 x - g_3$, *satisfait à cette équation différentielle.*

La relation (7) pouvant se mettre sous la forme

$$du = \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

on exprime le résultat en disant qu'*on effectue l'inversion de l'intégrale elliptique*

$$u = \int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}.$$

Remarquons enfin que, pour calculer ω, λ, connaissant g_2, g_3, on se sert des formules (2) qui donnent μ et k, puis des formules (5) et (6).

521. Considérons maintenant le cas des périodes imaginaires conjuguées (n° 517). On a

$$2\omega = \alpha + \beta i, \qquad 2\omega' = \alpha - \beta i, \qquad \alpha > 0, \qquad \beta > 0,$$

$$(8) \qquad \alpha = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad \beta = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}},$$

e_2 étant l'unique racine réelle du dénominateur. Comme e_1, e_3 sont imaginaires conjuguées, nous poserons

$$(9) \qquad \begin{cases} e_2 - e_3 = \rho(\cos\theta + i \sin\theta), \\ e_2 - e_1 = \rho(\cos\theta - i \sin\theta). \end{cases}$$

Faisons d'abord, dans l'intégrale qui représente α, le changement de variable

$$x - e_2 = \rho t^2,$$

t allant de 0 à $+\infty$. On a alors

$$x - e_3 = \rho(t^2 + \cos\theta + i \sin\theta),$$
$$x - e_1 = \rho(t^2 + \cos\theta - i \sin\theta),$$
$$dx = 2\rho t \, dt,$$
$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) = 4\rho^3 t^2[(t^2 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta],$$

d'où

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1 + 2t^2 \cos\theta + t^4}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{+\infty} \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{2t}{1+t^2}\right)^2 \sin^2\dfrac{\theta}{2}}}.$$

Posons maintenant

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = k^2, \qquad t = \tang\frac{\varphi}{2}, \qquad \frac{dt}{1+t^2} = \frac{d\varphi}{2};$$

nous ferons varier φ de o à π. On peut alors écrire

$$2\alpha\sqrt{\rho} = \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

D'ailleurs, en faisant dans la dernière intégrale $\varphi = \pi - \varphi'$, φ' allant de $\frac{\pi}{2}$ à o, on reconnaît que les deux dernières intégrales ont même valeur, d'où

(10)
$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\psi(k).$$

Pour passer de α à β, il faut remplacer e_1, e_2, e_3 par $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$, ce qui revient à remplacer θ par $\theta + \pi$, ou $\sin^2\frac{\theta}{2}$ par $\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - k^2$. On a donc

(11)
$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\rho}}\psi(\sqrt{1-k^2}),$$

et, par suite,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\psi(k)}{\psi(\sqrt{1-k^2})}.$$

De même que précédemment (n° 320), on tire de ces formules les conséquences suivantes. Si $\frac{\alpha}{\beta}$ varie de o à $+\infty$, k prend une fois et une seule chaque valeur comprise entre o et 1; si α et β varient, $\frac{\alpha}{\beta}$ restant fixe, k reste fixe et ρ prend toutes les valeurs positives, cha-

cune étant obtenue pour une seule valeur de α. Par suite, *il y a un et un seul système de valeurs positives de α et β donnant à ρ et k un système de valeurs donné à l'avance* (k étant < 1).

D'autre part, un système (ρ, k) définit (par l'intermédiaire de l'angle θ), à l'aide des relations (9) et de l'équation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, un système de nombres e_1, e_2, e_3 (e_2 réel, e_1, e_3 imaginaires conjugués) et, par suite, un polynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ de discriminant négatif. Réciproquement, un tel polynome détermine un système (ρ, k).

On en déduit que, si les deux nombres positifs α, β varient de toutes les manières possibles, les invariants g_2, g_3 de la fonction $p\left(u \,\middle|\, \frac{\alpha+\beta i}{2}, \frac{\alpha-\beta i}{2}\right)$ prennent tous les systèmes de valeurs possibles pour lesquels on a $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$, chaque système (g_2, g_3) étant obtenu pour un seul système (α, β). Donc, *étant donnée l'équation différentielle*

$$(12) \qquad \left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \qquad [(g_2^3 - 27 g_3^2) < 0],$$

la fonction $p\left(u \,\middle|\, \frac{\alpha+\beta i}{2}, \frac{\alpha+\beta i}{2}\right)$ *telle que l'on a*

$$\alpha = \int_{e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}, \qquad \beta = \int_{-e_2}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x + g_3}},$$

e_2 étant la racine réelle de $4x^3 - g_2 x - g_3$, satisfait à cette équation.

Le calcul de α et β, connaissant g_2, g_3, se fait au moyen des formules (5), (10), (11).

322. En résumé, nous sommes parvenus à intégrer l'équation différentielle (7) ou (12) dans tous les cas où g_2 et g_3 sont réels (en supposant $g_2^3 - 27 g_3^2 \neq 0$). La fonction p obtenue se note

$$p(u;\, g_2, g_3).$$

On a donc

$$x = pu,$$

d'où

$$\frac{dx}{du} = p'u = \pm\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}.$$

Comme u n'intervient que par sa différentielle, on peut, dans la

solution, remplacer u par $u+c$, c étant une constante arbitraire.

Le résultat peut encore s'interpréter de la manière suivante : *Si l'on a deux variables x, y liées par une relation de la forme*

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

g_2, g_3 étant réels et $g_2^3 - 27 g_3^2$ étant différent de o, on peut trouver pour x et y des fonctions uniformes d'un paramètre u satisfaisant à cette relation ; il suffit pour cela de prendre

$$x = \mathfrak{p}(u;\, g_2, g_3), \qquad y = \mathfrak{p}'(u;\, g_2, g_3).$$

Ce résultat est à rapprocher de la théorie de la représentation unicursale des courbes.

Remarquons d'ailleurs que, dans le cas où $g_2^3 - 27 g_3^2 = 0$, l'équation différentielle est de la forme

$$\frac{dx}{du} = 2(x-a)\sqrt{x-b}.$$

On est ramené, pour l'intégrer, à effectuer la quadrature de la fonction $\dfrac{1}{(x-a)\sqrt{x-b}}$, qui se ramène aux fonctions rationnelles.

523. Considérons maintenant l'équation

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = P(x),$$

où A, B, C, D sont des coefficients réels quelconques. Pour ramener ce cas au précédent, effectuons sur x *la transformation à coefficients réels bien déterminée*

$$x = \lambda y + \mu,$$

telle que le polynome en y transformé de $P(x)$ ait 4 pour coefficient de x^3 et o pour coefficient de x^2. Posons aussi

$$u = \lambda v;$$

l'équation prend la forme suivante :

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

On l'intègre en prenant

$$y = p(v; g_2, g_3), \qquad \frac{dy}{dv} = p'(v; g_2, g_3),$$

et l'on en déduit, pour l'équation donnée,

$$x = \lambda\, p\left(\frac{u}{\lambda}; g_2, g_3\right) + \mu, \qquad \frac{dx}{du} = \sqrt{P(x)} = p'\left(\frac{u}{\lambda}\right).$$

524. Prenons le cas de l'équation

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(z), \tag{1}$$

R étant un polynome du quatrième degré à coefficients réels admettant des racines réelles. Supposons qu'on détermine une racine réelle z_0 de ce polynome ; soit alors

$$R(z) = (z - z_0) f(z).$$

Posons

$$z = z_0 + \frac{1}{x}, \qquad dz = -\frac{dx}{x^2};$$

l'équation donnée devient

$$\frac{1}{x^4}\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = R\left(z_0 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} f\left(z_0 + \frac{1}{x}\right) = \frac{P(x)}{x^4},$$

P étant du troisième degré ; on est ramené à l'équation

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = P(x).$$

C'est le cas qui vient d'être traité (n° 523). x s'exprime en fonction elliptique de u ; il en est donc de même de z et de $\frac{dz}{du} = \sqrt{R(z)}$.

525. Nous allons indiquer une autre méthode pour l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(z),$$

dans le cas où $R(z)$ est un polynome réel du quatrième degré dont le coefficient de z^4 est positif.

Remarquons que le cas qui échappe à la méthode du n° 524, à savoir le cas où R a ses quatre racines imaginaires, est compris dans le cas

actuel; en effet, le polynome ayant alors un signe constant pour les valeurs réelles de z, si ce signe est $-$, l'équation n'est vérifiée pour aucun système de valeurs réelles, nous ne nous en occuperons pas. Si le signe est $+$, c'est que le coefficient de z^4 est positif.

Par une transformation de la forme

$$z = \lambda z_1 + \mu,$$

λ et μ étant *réels*, on peut remplacer l'équation donnée par une autre de même forme, où le coefficient de z^4 sera 1 et où le coefficient de z^3 sera nul. Nous sommes ramenés au problème suivant.

Étant donnée une relation de la forme

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = z'^2 = \mathrm{R}(z) = z^4 + 6\lambda_2 z^2 + 4\lambda_3 z + \lambda_4,$$

nous allons chercher pour z et z' des fonctions elliptiques de u vérifiant cette relation. Prenons

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a};$$

nous allons montrer que la fonction p et la constante a peuvent être déterminées de manière que cette fonction satisfasse à la relation précédente. Rappelons la formule générale d'addition [n° 508, formule (9), p. 309],

$$\mathrm{p}u + \mathrm{p}a + \mathrm{p}(u+a) = \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a}\right)^2,$$

ou, en tenant compte de (1),

$$\mathrm{p}u + \mathrm{p}a + \mathrm{p}(u+a) = z^2.$$

Nous avons obtenu la formule [n° 508, (8)]

$$\mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+a) = \frac{1}{2}\,\frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'a}{\mathrm{p}u - \mathrm{p}a}\right),$$

ou, avec les notations actuelles,

$$(2) \qquad \mathrm{p}u - \mathrm{p}(u+a) = z'.$$

De (1) nous déduisons

$$z' = \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}''u(\mathrm{p}u - \mathrm{p}a) - \mathrm{p}'u(\mathrm{p}'u - \mathrm{p}'a)}{(\mathrm{p}u - \mathrm{p}a)^2}.$$

Remplaçons, en tenant compte de la valeur de z, $p'u - p'a$ par $2z(pu - pa)$; il vient

$$z' = \frac{1}{2}\frac{p''u - 2zp'u}{pu - pa},$$

d'où, d'après (2),

$$(3) \qquad pu - p(u+a) = \frac{1}{2}\frac{p''u - 2zp'u}{pu - pa}.$$

Posons, pour la suite du calcul,

$$A = pu - pa, \qquad B = p(u+a) - pa.$$

Dans (3), permutons u et a; en remarquant que z ne change pas, nous obtenons

$$(4) \qquad pa - p(u+a) = -\frac{1}{2}\frac{p''a - 2zp'a}{pu - pa}.$$

Nous pouvons écrire

$$A + B = pa + pu + p(u+a) - 3pa,$$

d'où, en tenant compte de la valeur de z^2,

$$A + B = z^2 - 3pa.$$

Calculons de même AB. En comparant avec la formule (4) mise sous forme entière, on reconnaît que l'on a

$$A.B = \frac{1}{2}(p''a - 2zp'a).$$

D'ailleurs, on a aussi, d'après (2),

$$z'^2 = [pu - p(u+a)]^2 = (A - B)^2,$$

ou

$$z'^2 = (A+B)^2 - 4AB = (z^2 - 3pa)^2 - 2(p''a - 2zp'a).$$

Nous voyons ainsi que z'^2 est égal à un polynome du quatrième degré en z. Cette relation n'est autre qu'une équation différentielle à laquelle satisfait la fonction elliptique z, définie par la formule (1). En développant, nous avons

$$z'^2 = z^4 - 6pa\,z^2 + 4p'a\,z + 9p^2a - 2p''a,$$

ou, en remplaçant $p''a$ par $6p^2a - \frac{g_2}{2}$,

$$z'^2 = z^4 - 6pa\,z^2 + 4p'a\,z - 3p^2a + g_2.$$

Nous allons chercher une fonction elliptique pu et une constante a telles qu'il y ait identité entre les polynomes

$$z^4 + 6\lambda_2 z^2 + 4\lambda_3 z + \lambda_4$$

et

$$z^4 - 6pa\,z^2 + 4p'a\,z - 3p^2a + g_2.$$

Cela exige que l'on ait

$$pa = -\lambda_2, \qquad p'a = \lambda_3, \qquad -3p^2a + g_2 = \lambda_4.$$

Prenons comme inconnues les invariants g_2, g_3 de la fonction p cherchée. De la dernière relation on tire, en tenant compte de la première,

$$g_2 = \lambda_4 + 3p^2a = \lambda_4 + 3\lambda_2^2.$$

D'autre part, on a

$$p'^2a = 4p^3a - g_2pa - g_3,$$

d'où

$$\lambda_3^2 = -4\lambda_2^3 + \lambda_2(\lambda_4 + 3\lambda_2^2) - g_3, \qquad g_3 = \lambda_2\lambda_4 - \lambda_2^3 - \lambda_3^2.$$

g_2 et g_3 sont ainsi déterminés; la constante a est déterminée par les deux relations

$$pa = -\lambda_2, \qquad p'a = \lambda_3$$

qui sont compatibles, car, en vertu du calcul fait, on peut en déduire

$$p'^2a = 4p^3a - g_2pa - g_3;$$

par suite, elles déterminent un nombre a à une combinaison linéaire des périodes près. En effet, dans un parallélogramme de périodes, la fonction pu prend deux fois la valeur déterminée $-\lambda_2$ pour deux valeurs différentes de u, ces valeurs étant congrues à deux nombres opposés. Pour ces deux nombres opposés, $p'u$ prend deux valeurs opposées et, par conséquent, différentes. L'une de ces valeurs sera égale à λ_3; la valeur correspondante de l'argument sera la constante cherchée a.

La fonction pu et la constante a étant déterminées, la fonction

$$z = \frac{1}{2}\frac{p'u - p'a}{pu - pa}$$

est telle que l'on a

$$\frac{dz}{du} = pu - p(u+a) \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = R(z);$$

z et $\frac{dz}{du} = \sqrt{R(z)}$ s'expriment tous deux en fonctions elliptiques de u.

526. On appelle *intégrale elliptique* une intégrale de la forme

$$\int F\left[x, \sqrt{P(x)}\right] dx,$$

P étant un polynome du troisième ou du quatrième degré n'ayant pas de racines multiples et F une fonction rationnelle. Nous supposerons, de plus, les coefficients et les variables réels. Posons

$$X = \sqrt{P(x)}.$$

On peut (nos 522 à 525) exprimer x et X en fonctions rationnelles de pu et $p'u$, pu étant convenablement choisi. L'élément différentiel de l'intégrale prend alors la forme $\Phi(pu, p'u)du$, Φ étant rationnel. Posons alors

$$z = pu, \qquad y = p'u.$$

Φ, étant une fonction rationnelle par rapport à z et à y, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Phi = \frac{A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots}{B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots},$$

$A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots$ étant des polynomes en z. Remplaçons y^2 par le polynome $4z^3 - g_2 z - g_3$; Φ prend la forme

$$\Phi = \frac{A + By}{C + Dy}.$$

Multiplions et divisons le second membre par $C - Dy$. Le dénominateur $C^2 - D^2y^2$ s'exprime rationnellement en z ; la fraction se ramène à la forme

$$R + Sy,$$

R et S étant rationnels en z. L'intégrale à calculer est

$$\int R(pu)\,du + \int S(z)\,y\,du.$$

Comme on a $y\,du = dz$, la seconde intégrale s'écrit

$$\int S(z)\,dz\,;$$

c'est une intégrale de fraction rationnelle que l'on sait évaluer.

En prenant u comme nouvelle variable, nous sommes donc ramenés à évaluer l'intégrale

$$\int R(pu)\,du.$$

où R est une fonction rationnelle de pu.

R (pu) constitue une fonction elliptique aux mêmes périodes que pu. Appliquant à cette fonction la décomposition en une somme de fonctions ζ, ζ', ... (n° 509, p. 310), on a une formule de la forme

$$R(pu) = c + \sum\Big[A\zeta(u-a) + A_1\zeta'(u-a) + A_2\zeta''(u-a) + \ldots\Big],$$

c étant une constante et le signe $\sum$ étant étendu aux différents pôles a, b, ..., l de la fonction R. En intégrant, on déduit de là

$$\int R(pu)\,du = cu + \sum\Big[A\,\mathrm{Log}\,\sigma(u-a) + A_1\zeta(u-a) + A_2\zeta'(u-a) + \ldots\Big].$$

La théorie des fonctions elliptiques fournit ainsi l'expression d'une intégrale elliptique.

VII. — Courbes de genre *un*.

527. Considérons la fonction elliptique pu, et posons

(1) $$x = pu, \qquad y = p'u.$$

Nous avons vu que x et y sont liés par la relation suivante :

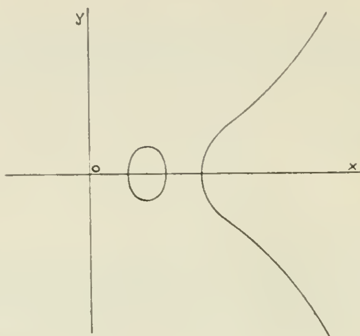
(2) $$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

En nous bornant au cas où g_2 et g_3 sont réels, nous savons

construire la courbe représentée par cette équation en coordonnées rectangulaires. C'est une cubique ayant pour axe de symétrie l'axe des x et pour direction asymptotique l'axe des y.

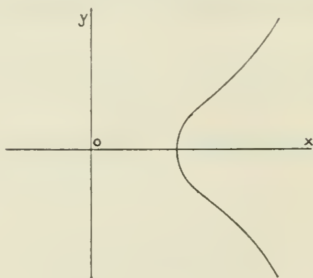
Si l'on a $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$, auquel cas le polynome a trois racines réelles, la courbe rencontre l'axe des x en trois points (*fig.* 50).

Fig. 50.



Si $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$, auquel cas le polynome n'a plus qu'une racine réelle, la courbe ne rencontre l'axe des x qu'en un point réel (*fig.* 51).

Fig. 51.



A une valeur de u correspond un point de la courbe. Inversement, soit (x_0, y_0) un point de la courbe, c'est-à-dire un système de valeurs de x_0 et y_0 satisfaisant à (2). Cherchons combien il y a de valeurs de u correspondant à ce point.

Étant donnée une valeur x_0 attribuée à x, il y a dans un parallélogramme de périodes deux points u pour lesquels $pu = x_0$. Ces deux valeurs de u sont congrues à deux nombres opposés u_0 et $-u_0$ et donnent à $y = p'u$ deux valeurs différentes, dont l'une seulement

est égale à la valeur choisie y_0. Donc, *à un système de valeurs* (x_0, y_0) *vérifiant* (2) *correspond, à une combinaison linéaire près des périodes, une seule valeur de* u. On exprime ce fait en disant qu'*il y a correspondance entre le paramètre u et les points de la courbe*.

528. Donnons quelques applications géométriques de la théorie des fonctions elliptiques.

Cherchons la condition pour que trois points de la cubique correspondant respectivement aux valeurs u_1, u_2, u_3 du paramètre soient en ligne droite. Cherchons l'intersection de la courbe avec la droite d'équation

$$ax + by + c = 0.$$

L'équation aux paramètres des points d'intersection est

$$a\,pu + b\,p'u + c = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction elliptique aux mêmes périodes que pu, $p'u$ et n'a, dans un parallélogramme de périodes contenant l'origine, d'autre pôle que l'origine, lequel est pôle d'ordre *trois*. Cette fonction elliptique a, par suite, trois zéros dans un parallélogramme de périodes. De plus, la somme des zéros est congrue à celle des pôles ; la somme des pôles étant nulle, si u_1, u_2, u_3 sont les trois zéros, on a, m et n étant entiers,

$$u_1 + u_2 + u_3 = 2m\omega + 2n\omega'.$$

Telle est la relation à laquelle satisfont les paramètres de trois points de la courbe situés en ligne droite. Je dis que cette condition qui est nécessaire est aussi suffisante, c'est-à-dire que, *si elle est remplie pour trois paramètres, les trois points correspondants sont en ligne droite*.

En effet, considérons la droite D qui joint les points de paramètres u_1, u_2 ; elle rencontre la cubique en un troisième point autre que u_1, u_2. Soit u'_3 le paramètre de ce point ; nous avons

$$u_1 + u_2 + u'_3 \equiv 0.$$

En comparant cette relation avec celle qui existe par hypothèse entre u_1, u_2, u_3, on voit que u_3 et u'_3 sont congrus. Donc u_3 et

u'_3 correspondent au même point de la courbe. La droite qui joint u_1, u_2 passe par u_3, ce que nous voulions démontrer.

Considérons sur la courbe un point de paramètre u; la tangente à la courbe en ce point la rencontre en un autre point de paramètre v. En considérant cette tangente comme la position limite d'une sécante passant par u et par un second point voisin u_1 qui se rapproche indéfiniment de u, on voit qu'on doit avoir

$$2u + v = 2m\omega + 2n\omega'.$$

Cherchons à quelle condition u sera point d'inflexion pour la cubique; il faut que la tangente en ce point rencontre la courbe en trois points confondus avec le point de contact. Il faut pour cela qu'on ait

$$v = u,$$

d'où la condition

$$3u = 2m\omega + 2n\omega',$$

$$u = \frac{2m\omega + 2n\omega'}{3}.$$

On reconnaît que, pour avoir tous les points d'inflexion, il suffit de donner à m et n trois valeurs entières consécutives, par exemple 0, 1, 2, et de prendre toutes les combinaisons de ces valeurs deux à deux. Ces combinaisons étant au nombre de neuf, il y a neuf points d'inflexion.

529. Considérons d'une façon générale une cubique plane. On démontre qu'une telle courbe ne peut avoir plus d'un point double sans se décomposer. Si elle a un point double, elle est unicursale. Nous mettrons à part ces cas, et nous étudierons les cubiques planes sans point double.

Étant donnée une telle courbe, plaçons l'origine en un point de la courbe; son équation sera de la forme

$$\varphi_3(x,y) + \varphi_2(x,y) + \varphi_1(x,y) = 0,$$

φ_3, φ_2, φ_1 étant des polynomes homogènes et de degrés respectifs 3, 2, 1. Coupons la courbe par une droite passant par l'origine, d'équation $y = tx$. L'équation aux abscisses des points d'intersection autres que l'origine est

$$x^2\varphi_3(1, t) + x\varphi_2(1, t) + \varphi_1(1, t) = 0,$$

d'où

$$x = \frac{-\varphi_2 + \sqrt{\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_3}}{2\varphi_3};$$

$\varphi_2^2 - 4\varphi_1\varphi_3$ est un polynome du quatrième degré en t, soit $R(t)$. On sait, au moyen de la théorie des fonctions elliptiques, exprimer t et $\sqrt{R(t)}$ au moyen de fonctions elliptiques d'un même paramètre u. *Nous pouvons donc exprimer les coordonnées d'un point de la courbe par des fonctions uniformes d'un paramètre u.*

530. *Courbes planes de genre* un. — On démontre, en Géométrie analytique, que le nombre maximum de points doubles d'une courbe plane de degré n, qui ne se décompose pas, est $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. On démontre en second lieu qu'une courbe de degré n qui a $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles est unicursale, c'est-à-dire que les coordonnées d'un de ses points peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles d'un paramètre; la réciproque est vraie.

Étant donnée une courbe de degré n qui a d points doubles, on appelle *genre* de cette courbe le nombre

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d,$$

de sorte que les courbes unicursales sont les courbes de genre *zéro*. *Nous allons étudier les courbes de genre* un. Le nombre de leurs points doubles est

$$d = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Soit C une telle courbe, ayant pour équation

$$(1) \qquad F(x, y) = 0.$$

Nous allons introduire des courbes auxiliaires d'ordre $n-2$, que nous appellerons des *adjointes*. Rappelons qu'une courbe d'ordre n est déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ conditions linéaires, de sorte qu'une courbe d'ordre $n-2$ est déterminée par $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ points. Assujettissons une adjointe à passer par les $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles de C.

Il faut encore, pour la déterminer, un nombre de points égal à

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = n-1.$$

Si donc nous assujettissons cette adjointe à passer en outre par $(n-3)$ points simples choisis arbitrairement sur C, il restera dans son équation deux paramètres linéaires arbitraires. Elle sera de la forme

$$A f_1(x,y) + B f_2(x,y) + C f_3(x,y) = 0,$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions déterminées, A, B, C des paramètres arbitraires. On a ainsi *un réseau de courbes adjointes*.

Étudions l'intersection d'une courbe γ de ce réseau avec C. Ces deux courbes étant d'ordres n et $n-2$, le nombre de leurs points d'intersection est, d'après le théorème de Bezout, $n(n-2)$. Or, en chaque point double de C, il y a deux points de l'intersection confondus, d'où $n(n-3)$ points d'intersection fixes. De même, les $n-3$ points simples de C par lesquels passe γ donnent $n-3$ points d'intersection fixes. Le nombre d'intersections qui restent, et qui sont les intersections variables, est

$$n(n-2) - n(n-3) - (n-3) = 3.$$

Ainsi, C et γ *ont trois points d'intersection variables*. Cela étant, posons

$$(2) \qquad x' = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}, \qquad y' = \frac{f_3(x,y)}{f_1(x,y)}.$$

A un point (x,y) correspond, moyennant ces formules, un point (x',y'). Quand le point (x,y) décrit C, le point (x',y') décrit une courbe C' dont l'équation s'obtiendrait en éliminant x, y entre les équations (1) et (2).

Inversement, je dis qu'*à un point* (x',y') *de* C' *correspond un point* (x,y) *de* C *et un seul*, c'est-à-dire que, x', y' étant donnés, les équations (2) jointes à (1) n'ont en x, y qu'un seul système de solutions variable avec x', y'.

En effet, supposons qu'il existe deux points (a,b), (a',b') correspondant au même point (x',y') et variant d'une façon continue avec $x'y'$; on aura

$$\frac{f_2(a,b)}{f_1(a,b)} = \frac{f_2(a',b')}{f_1(a',b')}, \qquad \frac{f_3(a,b)}{f_1(a,b)} = \frac{f_3(a',b')}{f_1(a',b')},$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{f_1(a',b')}{f_1(a,b)} = \frac{f_2(a',b')}{f_2(a,b)} = \frac{f_3(a',b')}{f_3(a,b)}.$$

Considérons le réseau des courbes γ et assujettissons les courbes de ce réseau à passer par (a, b). Nous déterminons ainsi dans le réseau un faisceau γ_1. En vertu de (3), toute courbe du réseau qui contient (a, b) contient aussi (a', b'). Les courbes de γ_1 contenant (a, b) et (a', b') ne rencontrent donc C qu'en $3 - 2$, c'est-à-dire un point variable. Comme l'équation de ces courbes dépend linéairement d'un paramètre, on pourrait exprimer les coordonnées de ce point en fonctions rationnelles du paramètre. C serait donc une courbe unicursale, ce qui n'est pas, puisque C n'a pas son nombre maximum de points doubles.

Donc il ne peut correspondre à un point (x', y') de C' qu'un seul point (a, b), et, par suite, les équations (2) n'ont qu'un seul système de solutions en x, y variable avec x', y'. On peut obtenir par des opérations rationnelles ce système de solutions, soit

$$x = \varphi_1(x', y'), \qquad y = \varphi_2(x', y'),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions rationnelles. On dit qu'*il y a entre les deux courbes* C *et* C' *une correspondance biunivoque et birationnelle.*

Cherchons le degré de C'. Prenons son intersection avec la droite d'équation

$$Ax' + By' + C = 0.$$

En remplaçant x', y' par leurs valeurs en fonction de x, nous sommes conduits à l'équation

$$Af_2(x, y) + Bf_3(x, y) + Cf_1(x, y) = 0,$$

x, y étant liés par l'équation de la courbe C,

$$F(x, y) = 0.$$

Nous savons que ces deux équations ont, en dehors des points de base du réseau, trois systèmes de solutions variables. C', étant rencontré par une droite quelconque en trois points, est donc du troisième degré.

En résumé, nous voyons qu'*il est possible d'établir une correspondance biunivoque et birationnelle entre une courbe quelconque de genre* un *et une certaine courbe du troisième degré.* Comme d'autre part les coordonnées d'un point d'une cubique peuvent s'exprimer en fonctions elliptiques d'un paramètre, il en est donc de

même pour les coordonnées d'un point de la courbe de genre *un*. *On peut exprimer les coordonnées d'un point d'une courbe de genre* UN *en fonctions elliptiques d'un paramètre.*

531. *Remarque.* — Soit une courbe unicursale; exprimons les coordonnées d'un de ses points en fonctions rationnelles d'un paramètre t et posons $t = \varphi(u)$, φ étant une fonction elliptique. x et y sont ainsi exprimés en fonctions elliptiques du paramètre u. Je dis que cette représentation ne possède pas toutes les propriétés de la représentation obtenue pour les courbes de genre *un*.

Considérons une courbe de genre *un*; faisons-la correspondre à une cubique plane que nous pouvons faire correspondre elle-même à la courbe

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3.$$

Les coordonnées x, y d'un point de cette courbe s'expriment au moyen de deux fonctions elliptiques. Dans un parallélogramme de périodes commun à ces deux fonctions, *à un point de la courbe donnée correspond un seul point u et inversement*. Une telle représentation est dite *propre*.

Montrons qu'elle ne peut exister pour une courbe unicursale. En effet, la courbe étant unicursale, x, y sont fonctions rationnelles d'un paramètre t, et, inversement, t est fonction rationnelle de x, y, de sorte que, si x et y sont fonctions elliptiques d'un paramètre u, t sera aussi fonction elliptique de u. Cette fonction aura pour périodes tout système de périodes commun à x et y; et, dans un parallélogramme de périodes, à une valeur de t, c'est-à-dire à un point de la courbe, correspondent au moins deux valeurs de u. Autrement dit, *il est impossible de trouver un parallélogramme de périodes tel qu'à un point de la courbe corresponde une seule valeur de u dans ce parallélogramme.* C'est ce qu'on exprime en disant que la représentation obtenue est *impropre*.

VIII. — Équation d'Euler.

532. On appelle *équation d'Euler* une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}} = 0, \tag{1}$$

R étant un polynome du troisième ou du quatrième degré.

Remarquons que, si R est du premier ou du deuxième degré, cette équation a une solution qui est algébrique. Supposons par exemple $R(\lambda)$ du deuxième degré; nous pouvons, par une transformation linéaire, ramener $R(\lambda)$ à la forme

$$R(\lambda) = 1 - \lambda^2.$$

L'équation à intégrer est alors

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = 0.$$

d'où

$$\arcsin\lambda \pm \arcsin\mu = \text{const.}$$

Posons

$$\arcsin\lambda = u, \qquad \arcsin\mu = v;$$

l'intégrale est

$$u \pm v = \text{const.},$$

d'où

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \sin v \cos u = \text{const.},$$
$$\lambda\sqrt{1-\mu^2} \pm \mu\sqrt{1-\lambda^2} = \text{const.}$$

En faisant disparaître les radicaux, on obtient entre λ et μ une relation algébrique entière qui est l'intégrale cherchée.

533. Supposons maintenant R du troisième ou du quatrième degré et posons

$$u = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \qquad v = \int \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}};$$

on tire de là, en faisant l'inversion de l'intégrale,

$$\lambda = f(u), \qquad \mu = f(v),$$

f étant une certaine fonction elliptique. D'ailleurs, avec les nouvelles variables u, v, l'équation différentielle s'écrit

$$du \pm dv = 0.$$

d'où

$$u \pm v = \text{const.} = c,$$
$$v = \pm(c - u),$$
$$\mu = f[\pm(c-u)].$$

$f[\pm(c-u)]$, en tant que fonction de u, est une certaine fonction elliptique $f_1(u)$. Entre les deux fonctions $\lambda=f(u)$, $\mu=f_1(u)$ aux mêmes périodes existe une relation algébrique. Ainsi, *la solution générale de* (1) *est donnée par une relation algébrique entre* λ *et* μ.

534. Cherchons la forme de cette relation. Partons d'une relation symétrique en λ et μ et du deuxième degré par rapport à chacune de ces variables, soit

$$F(\lambda, \mu) = 0. \tag{2}$$

ou, en ordonnant par rapport à μ,

$$F(\lambda, \mu) = (A\lambda^2 + B\lambda + C)\mu^2 + (B\lambda^2 + D\lambda + E)\mu + C\lambda^2 + E\lambda + F = 0.$$

En différentiant cette équation, nous avons

$$F'_\lambda d\lambda + F'_\mu d\mu = 0, \tag{3}$$

ce qui définit le rapport $\frac{d\mu}{d\lambda}$. Calculons, par exemple, F'_μ,

$$F'_\mu = 2\mu(A\lambda^2 + B\lambda + C) + B\lambda^2 + D\lambda + E.$$

Résolvons d'autre part $F(\lambda, \mu) = 0$ par rapport à μ; nous avons

$$\mu = \frac{-(B\lambda^2 + D\lambda + E) \pm \sqrt{R(\lambda)}}{2(A\lambda^2 + B\lambda + C)},$$

$R(\lambda)$ étant un polynome du quatrième degré en λ. On reconnaît que l'on a

$$F'_\mu = \pm\sqrt{R(\lambda)};$$

on obtiendrait de même

$$F'_\lambda = \pm\sqrt{R(\mu)}.$$

La relation différentielle (3) peut donc s'écrire

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} \pm \frac{d\mu}{\sqrt{R(\mu)}} = 0; \tag{4}$$

c'est précisément une relation de la forme (1).

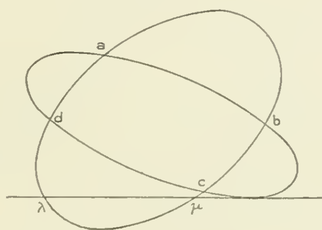
Je dis que l'équation (2) constitue l'intégrale générale de (4).

Cela résulte de ce que dans $F(\lambda, \mu)$ il y a cinq paramètres arbitraires, tandis qu'il n'y en a que quatre dans R. F contenant un paramètre de plus que R, on pourra disposer de ce paramètre pour faire correspondre à une valeur donnée λ_0 de λ une valeur arbitraire μ_0 de μ.

$F(\lambda, \mu) = 0$ est donc l'intégrale générale de l'équation d'Euler. Il reste à faire le calcul des coefficients de F, en supposant connus ceux de R. Pour cela, nous ferons usage de l'interprétation géométrique suivante.

535. *Interprétation géométrique.* — Donnons-nous une conique C et exprimons les coordonnées de l'un de ses points en fonction rationnelle d'un paramètre t. Soit γ une autre conique qui coupe la première en quatre points distincts correspondant respectivement aux valeurs a, b, c, d du paramètre. Désignons ces quatre points par les mêmes lettres a, b, c, d (*fig.* 52).

Fig. 52.



Cela étant, prenons sur C deux points de paramètres λ, μ, et cherchons la condition pour que la droite qui les joint soit tangente à γ. La relation entre λ et μ qui exprime cette condition doit être algébrique et symétrique en λ et μ. De plus, à une valeur donnée de λ correspondent deux valeurs de μ, car par un point de C on peut mener deux tangentes à γ, et à chacune de ces tangentes correspond un point μ. Donc cette relation est de la forme étudiée au nº 534, soit

$$F(\lambda, \mu) = 0.$$

Je dis que les racines du polynome $R(\lambda)$ qui se déduit de F par le procédé du nº 534 sont les paramètres a, b, c, d des points communs à C et à γ. En effet, chaque racine de $R(\lambda)$ est telle que les deux valeurs de μ correspondantes sont confondues en une seule. Les deux

tangentes à γ issues de ce point λ sont confondues. Donc ce point appartient à γ.

Il résulte de là que, si γ varie en passant par les mêmes points a, b, c, d, $F(\lambda, \mu)$ varie, mais les quatre racines de $R(\lambda)$ restent invariables; la relation différentielle entre λ et μ reste donc aussi la même.

On peut déduire de là un moyen pratique pour former $F(\lambda, \mu)$, étant donnée l'équation (1), c'est-à-dire $R(\lambda)$. On considère une conique C définie en fonction d'un paramètre t, et l'on prend les points de cette conique correspondant aux valeurs du paramètre qui sont racines de $R(\lambda)$. Ces quatre points déterminent un faisceau de coniques γ. On exprime que la droite passant par les points λ, μ de C est tangente à une conique γ. La relation obtenue est l'intégrale cherchée.

536. On peut rattacher à cette méthode un théorème classique de Géométrie. Prenons sur C quatre points a, b, c, d et considérons plusieurs coniques $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$, passant par ces quatre points. Soit A_1 un point de C; menons par A_1 une tangente à γ_1, elle coupe C en un second point A_2; par A_2 menons une tangente à γ_2, elle coupe C en un second point A_3, et ainsi de suite. Nous arrivons finalement à un point A_{n-1} par lequel nous menons une tangente à γ_{n-1}; cette tangente coupe C en un second point A_n. Je dis que *la droite* $A_n A_1$ *obtenue en joignant le dernier point au premier enveloppe une nouvelle conique* γ_n *passant par* a, b, c, d.

En effet, soient $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les valeurs du paramètre correspondant à $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Du fait que la droite $A_1 A_2$ est tangente à γ_1 résulte que l'on a

$$\frac{dt_1}{\sqrt{R(t_1)}} = \varepsilon_1 \frac{dt_2}{\sqrt{R(t_2)}},$$

ε_1 étant égal à ± 1 et gardant un signe déterminé si t_1, t_2 varient d'une façon continue. De même, $A_2 A_3$ étant tangente à γ_2, on a

$$\frac{dt_2}{\sqrt{R(t_2)}} = \varepsilon_2 \frac{dt_3}{\sqrt{R(t_3)}}$$

et finalement

$$\frac{dt_{n-1}}{\sqrt{R(t_{n-1})}} = \varepsilon_{n-1} \frac{dt_n}{\sqrt{R(t_n)}}.$$

On a, en multipliant ces relations membre à membre,

$$\frac{dt_1}{\sqrt{R(t_1)}} = \pm \frac{dt_n}{\sqrt{R(t_n)}}.$$

Ceci montre qu'entre t_1 et t_n existe une relation algébrique de la forme $F(\lambda, \mu) = 0$. Donc *la droite $A_1 A_n$ qui joint les deux points de paramètres t_1, t_n est tangente à une conique passant par a, b, c, d.*

FIN DU TOME II.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
40731 Quai des Grands-Augustins, 55.

40731 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.